Warszawa 24.01.2006

Piotr Nieżurawski

Rozwiązania zadań 8 (S. II), 2 i 6' (S. III)

Zadanie 8 (S. II). „Ćma"

Ćma leci do źródła światła. Wektor prędkości ćmy jest nachylony pod stałym kątem α względem odcinka ćma–źródło. Znaleźć tor, po jakim porusza się ćma oraz jego długość. Założyć stałą szybkość lotu owada i podać równanie jego ruchu przy warunkach początkowych $\phi(t=0)=0$ oraz $\rho(t=0)=r_0$.

Rozwiązanie

W układzie biegunowym, w którego początku znajduje się źródło światła, wektor położenia ćmy: $\vec{r}=\rho\hat{e}_\rho$

Prędkość ćmy: $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\rho}\hat{e}_\rho+\rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi$

Warunki zadania: $\vec{v}=v(-\cos\alpha\hat{e}_\rho+\sin\alpha\hat{e}_\phi)$, czyli $\dot{\rho}=-v\cos\alpha$ oraz $\rho\dot{\phi}=v\sin\alpha$.

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho\dot{\phi}}=-\cot\alpha$$

Eliminujemy czas:

$$\frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}}=\frac{d\rho}{dt}\frac{dt}{d\phi}=\frac{d\rho}{d\phi}$$

Czyli:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\phi}=-\cot\alpha$$

$$\int_{r_0}^{\rho}\frac{1}{\rho'}d\rho'=-\cot\alpha\int_0^{\phi}d\phi'$$

Równanie toru: $\ln\rho-\ln r_0=-\phi\cot\alpha$

Lub: $\rho=r_0\exp(-\phi\cot\alpha)$

Przy założeniu stałej szybkości, $v\equiv|\vec{v}|=\text{const}$, czas ruchu od $\rho=r_0$ do $\rho=0$ wynosi $t_k=r_0/|v_\rho|=r_0/(v\cos\alpha)$.

Długość toru:

$$S=vt_k=r_0/\cos\alpha$$

Równanie ruchu.

$$\frac{d\rho}{dt}=-v\cos\alpha\quad\Rightarrow\quad\int_{r_0}^{\rho}d\rho'=-v\cos\alpha\int_0^t dt'$$

Całkując otrzymujemy: $\rho-r_0=-vt\cos\alpha$

Równanie ruchu:

$$\begin{aligned}\rho(t)&=r_0-vt\cos\alpha\\ \phi(t)&=-\tan\alpha\ln(\rho(t)/r_0)=-\tan\alpha\ln(1-vt\cos\alpha/r_0)\end{aligned}$$

Zadanie 2 (S. III). „Awaria rakiety”

Z Ziemi wyrusza rakieta lecąca z prędkością $c/2$. Po 10 dniach rakieta ulega awarii. Załoga wysyła sygnał świetlny z prośbą o pomoc. Po otrzymaniu wiadomości centrum lotów na Ziemi natychmiast wysyła rakietę ratunkową. Z jaką szybkością v powinna się ona poruszać, aby uratować załogę pierwszej z rakiet, w której astronauci mogą utrzymać się przy życiu przez 30 dni od awarii?

Rozwiązanie

Konwencja: *Wielkość*$_{\textit{Obiekt/Wydarzenie}}$ w *Układ*

Z - Ziemia

R - pierwsza rakieta

A - awaria R

I - dotarcie informacji

C - czekanie na pomoc

P - druga rakieta („Pomoc”)

S - spotkanie R i P

Dane: $v_{RwZ} = c/2$; $t_{AwR} = 10$ dni; $\Delta t_{CwR} = 30$ dni

Szukamy v_{PwZ}.

$$v_{PwZ} = \frac{x_{SwZ}}{\Delta t_{PwZ}}$$

Przejście z układu *R* do Z: $x_{SwZ} = \gamma_{RwZ}(x_{SwR} + v_{RwZ}t_{SwR})$. Ale $x_{SwR} = x_{RwR} = 0$, więc: $x_{SwZ} = \gamma_{RwZ}v_{RwZ}t_{SwR}$.

Wiemy, że $t_{SwR} = t_{AwR} + \Delta t_{CwR}$. Obliczyliśmy więc x_{SwZ}.

Obliczmy Δt_{PwZ}, czyli czas lotu *P*.

$x_{AwZ} = \gamma_{RwZ}(x_{AwR} + v_{RwZ}t_{AwR})$

Ale $x_{AwR} = x_{RwR} = 0$. Tak więc $x_{AwZ} = \gamma_{RwZ}v_{RwZ}t_{AwR}$.

Można już obliczyć czas Δt_{IwZ} potrzebny na dotarcie wezwania z miejsca *A* do *Z* w układzie *Z*: $\Delta t_{IwZ} = x_{AwZ}/c$.

Okres oczekiwania w układzie Z: $\Delta t_{CwZ} = \gamma_{RwZ}(\Delta t_{CwR} + v_{RwZ}\Delta x_{CwR}/c^2)$. Ale $\Delta x_{CwR} = \Delta x_{RwR} = 0$.

Ostatecznie:

$$\Delta t_{PwZ} = \Delta t_{CwZ} - \Delta t_{IwZ} = \gamma_{RwZ}(\Delta t_{CwR} - v_{RwZ}t_{AwR}/c)$$

$$v_{PwZ} = \frac{x_{SwZ}}{\Delta t_{PwZ}} = \frac{v_{RwZ}(t_{AwR} + \Delta t_{CwR})}{\Delta t_{CwR} - v_{RwZ}t_{AwR}/c}$$

Podstawiając wartości otrzymujemy odpowiedź:

$$v_{PwZ} = c/2\frac{10+30}{30-10/2} = \frac{4}{5}c$$

Zadanie 6' (S. III). „Fotografia pręta"

Równoległy do osi Y pręt porusza się wzdłuż osi X z prędkością v. Fotografujemy pręt aparatem znajdującym się w punkcie $x = y = 0$, $z = a$. Na zdjęciu środek pręta znajduje się w początku układu współrzędnych. Jaki jest kształt pręta na fotografii?

Rozwiązanie

Zakładamy, że na zdjęciu widzimy obraz utworzony przez promienie świetlne, które dotarły do kliszy w chwili t_K.

Dla każdego punktu pręta $\vec{r}_P(t)$, który w chwili t wysłał promień światła musi być spełniony warunek:

$$t_K = |\vec{r}_P(t) - \vec{r}_K|/c + t,$$

gdzie $\vec{r}_K = [0, 0, a]$ jest wektorem położenia kliszy (zaniedbujemy jej rozmiary).

Opis pręta: $\vec{r}_P(t) = [vt, y, 0]$ z warunkiem $y \in [-D, D]$ dla skończonego pręta o długości $2D$.

Na zdjęciu środek pręta przekracza punkt $x = 0$, $y = 0$. Zakładamy, że promień świetlny ze środka pręta był wysłany w chwili $t = 0$. Z tego wyznaczamy t_K: $t_K = a/c$

Równanie przybiera postać:

$$a - ct = \sqrt{(vt)^2 + y^2 + a^2}$$

Ponieważ interesuje nas tylko obraz, eliminujemy czas wykorzystując równanie ruchu pręta: $t = x/v$.

$$a - x/\beta = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$$

gdzie $\beta = v/c$. Jest to już równanie opisujące obraz uzyskany na kliszy. Staramy się je uprościć i sprawdzić, czy nie jest to jakaś znana nam krzywa. Podnosimy do kwadratu i mnożymy przez β^2:

$$x^2 - 2ax\beta = \beta^2(x^2 + y^2)$$

$$x^2 - 2xa\beta\gamma^2 - (\beta\gamma y)^2 = 0,$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Zbieramy wyrazy z x w kwadrat i dzielimy przez $(a\beta\gamma^2)^2$:

$$\frac{(x - a\beta\gamma^2)^2}{(a\beta\gamma^2)^2} - \frac{y^2}{(a\gamma)^2} = 1.$$

Jest to równanie hiperboli o asymptotach: $y = \pm(x/\beta\gamma - a\gamma)$.