Warszawa 18.01.2006

Zadania z Fizyki I BC: Seria V – Rozwiązania

Więzy, tarcie, siły pozorne, ruch w polu elektrycznym i magnetycznym

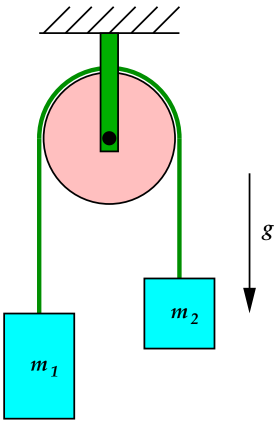
Piotr Nieżurawski, pniez@fuw.edu.pl

Zadanie 1.

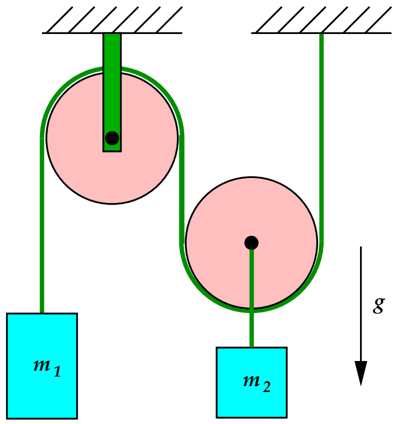
Dwa odważniki o masach m_1 oraz m_2 połączono nieważką, nierozciągliwą liną i przewieszono przez bloczek o promieniu R, który przymocowano do sufitu (układ przedstawiono na rysunku). Z jakim przyśpieszeniem będzie poruszać się odważnik o masie m_1, jeśli:
a) bloczek jest nieważki,
b) moment bezwładności bloczka względem jego osi obrotu wynosi I.
Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie.

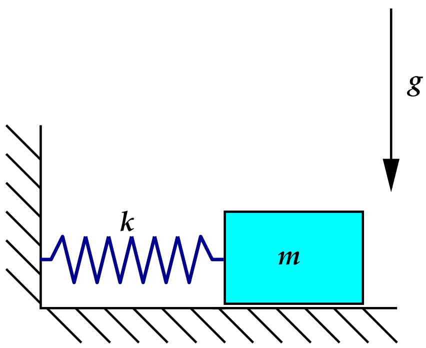
Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $a_1m_1 = m_1g - T_1$ oraz $a_2m_2 = m_2g - T_2$.
a) W przypadku nieważkich liny i bloczka (zakładamy, że lina nie ślizga się po bloczku) można pokazać rowność $T_1 = T_2$ przynajmniej na dwa sposoby:
1) Z równania na ruch liny: $M_{L+B\ eff}a_L = T_1 - T_2$.
2) Z równania na ruch bloczka: $I_{L+B\ eff}\varepsilon_B = R(T_1 - T_2)$, gdzie R jest promieniem bloczka.
Ponieważ lina i bloczek są nieważkie, więc $M_{L+B\ eff} = 0$ oraz $I_{L+B\ eff} = 0$, co prowadzi do wniosku $T_1 = T_2 = T$.
Wiąz na długość liny: $x_1 + \pi R + x_2 = L$ =const. A więc: $a_1 = -a_2$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$.
b) Z równania dla bloczka $I\vec{\varepsilon} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$ mamy: $I\varepsilon = R(T_1 - T_2)$. Położenie ciężarka 1 możemy powiązać z kątem obrotu bloczka: $x_1 = R\alpha$. Prowadzi to do: $a_1 = R\varepsilon$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + I/R^2)$.



Rysunek do Zadania 1.



Rysunek do Zadania 2.



Rysunek do Zadania 7.

Zadanie 2.

Odważnik o masie m_1 przymocowano do nieważkiej, nierozciągliwej liny, którą przewieszono przez bloczek przyczepiony do sufitu. Na linę nawleczono następnie drugi bloczek z uwiązanym do jego osi odważnikiem o masie m_2. Koniec liny zaczepiono pod sufitem (układ przedstawiono na rysunku). Z jakim przyśpieszeniem będzie poruszać się odważnik o masie m_1, jeśli bloczki są nieważkie? Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie.

Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $a_1m_1 = m_1g - T$ oraz $a_2m_2 = m_2g - 2T$.
Wiąz na długość liny: $x_1 + \pi R + x_2 + \pi R + x_2 = L$ =const. A więc: $a_1 = -2a_2$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2/2)/(m_1 + m_2/4)$.

Zadanie 3.

Odważnik o masie M przymocowano do nieważkiej, nierozciągliwej liny, którą przewieszono przez bloczek przyczepiony do sufitu. Za swobodny koniec liny chwyciła małpa o masie m i wspina się. Jakim ruchem względem liny przemieszcza się małpa, skoro jej odległość od sufitu się nie zmienia? Obliczyć parametry tego ruchu. Bloczek jest nieważki, a układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie.

Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $AM = Mg - T$ oraz $am = mg - T$.

Wiąz na długość liny: $X + \pi R + x = L$, gdzie L jest długością liny miedzy odważnikiem a małpą. A więc przyśpieszenie małpy względem liny $a' \equiv \ddot{L} = A + a$.

Warunek zadania: $a = 0$, co oznacza, że: $a' \equiv \ddot{L} = A$

Odpowiedź: Ruch jednostajnie przyśpieszony z $a' = g(1 - m/M)$. Jeśli $m > M$, to rzeczywiście małpa się wspina.

Zadanie 4.

Płyta gramofonowa o promieniu R kręci się z prędkością kątową ω względem układu inercjalnego. Ze środka płyty wyrusza biedronka o masie m. Ile powinien wynosić współczynnik tarcia między biedronką a płytą, aby owad mógł osiągnąć krawędź płyty, poruszając się cały czas ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością v' względem płyty? Rozwiązać korzystając z wzorów na siły pozorne. Porównać odpowiedź z wynikami Zadania 7. z Serii II. Czy zwiększenie masy biedronki pozwoliłoby jej na taki sam spacer po szybciej wirującej płycie? Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni płyty.

Rozwiązanie.

W układzie związanym z płytą: $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_{z'}$, $\vec{v}' = v'\hat{e}_{x'}$, $\vec{r}' = v't\hat{e}_{x'}$.

Siły pozorne: $\vec{F}_{poz} = -m2\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -m2\omega v'\hat{e}_{y'} + m\omega^2 v't\hat{e}_{x'}$

Warunek spaceru ruchem jednostajnym prostoliniowym: siły tarcia statycznego (biedronka musi iść, nie może się ślizgać) powinny równoważyć siły pozorne:

$|\vec{F}_{poz}| = |\vec{F}_T|$

Największa siła pozorna: $\max(|\vec{F}_{poz}|) = \max(m\omega v'\sqrt{4 + (\omega t)^2}) = m\omega v'\sqrt{4 + (\omega R/v')^2}$.

Największa możliwa siła tarcia statycznego: $\max|\vec{F}_T| = \mu mg$ (największa siła pozioma, jaką podłoże może działać na biedronkę; można wspomnieć III zasadę dynamiki).

Ponieważ chodzi o współczynnik tarcia, to zamieniamy równość $|\vec{F}_{poz}| = |\vec{F}_T|$ (zgodną z III zasadą dynamiki) na nierówność $\max|\vec{F}_{poz}| \leq \max|\vec{F}_T|$. Odpowiedź:

$\mu \geq \frac{\omega v'}{g}\sqrt{4 + (\omega R/v')^2}$

W Zadaniu 7. z Serii II otrzymaliśmy przyśpieszenie biedronki w układzie inercjalnym $\vec{a} = -\vec{F}_{poz}/m$. Zauważyć, że następuje relacja między wersorami inercjalnego i obracającego się układu: $\hat{e}_\rho = \hat{e}_{x'}$ oraz $\hat{e}_\phi = \hat{e}_{y'}$.

Zwiększenie masy nie pozwoli biedronce spacerować po szybciej wirujących płytach.

Zadanie 5.

Na przesuwaną po stole deskę kładziona jest w chwili $t_0 = 0$ cegła, która początkowo spoczywa w inercjalnym układzie związanym ze stołem. Współczynnik tarcia między deską a cegłą wynosi μ. W układzie związanym z deską oraz w układzie związanym ze stołem podać równania ruchu cegły oraz naszkicować zależność jej prędkości od czasu. Rozpatrzyć następujące przypadki:

a) deska porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością v_D,

b) deska porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym prostoliniowym: $v_D = at$,

c) deska porusza się ruchem przyśpieszonym prostoliniowym: $v_D = bt^2$,

gdzie a i b są pewnymi stałymi. Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni deski.

Rozwiązanie.

Oznaczenia: C - cegła, D - deska; $\eta \equiv \mu g$; x jest współrzędną w układzie związanym ze stołem, a x' w układzie związanym z deską. Druga zasada dynamiki prowadzi nas do równania w układzie związanym ze stołem: $ma_C = -\mu mgv'_C/|v'_C|$, gdzie czynnik $v'_C/|v'_C|$ jest związany z ruchem w (czasami) nieinercjalnym układzie związanym z deską. Warunki początkowe: $x_C = v_C = x'_C = 0$. Obowiązują transformacje:

$a_C = a_D + a'_C$ (a więc $ma'_C = -\mu mgv'_C/|v'_C| - ma_D$)

$v_C = v_D + v'_C$

$x_C = x_D + x'_C$

Wybieram układ, w którym zawsze $v_D \geq 0$.

Z braku dodatkowych informacji zakładam, że $\mu = \mu_k = \mu_s$.

a)

W układzie związanym z deską.

Początkowo $v'_C = -v_D$, a więc:

$a'_C = \eta$, $v'_C = \eta t - v_D$ oraz $x'_C = \eta t^2/2 - v_D t$

dopóki $v'_C \neq 0$, czyli do czasu $t_1 = v_D/\eta$.

Dla $t > t_1$mamy:

$a'_C = 0$, $v'_C = 0$ oraz $x'_C = -v_D^2/(2\eta)$.

W układzie związanym ze stołem.

Dla $t \leq t_1$:

$a_C = \eta$, $v_C = \eta t$ oraz $x_C = \eta t^2/2$

Dla $t > t_1$:

$a_C = 0$, $v_C = v_D$ oraz $x_C = v_D t - v_D^2/(2\eta)$

b)

W układzie związanym z deską.

Rozważam 'naiwny' wynik:

$a'_C = \eta - a_D = \eta - a$,

gdzie $a_D = a$ jest przyśpieszeniem deski względem stołu. Występują dwa przypadki:

1. Gdy $\eta \geq a_D$, cegła przyczepia się do deski i pozostaje względem niej w spoczynku: $a'_C = v'_C = x'_C = 0$.
2. Gdy $\eta < a_D$, otrzymujemy: $a'_C = \eta - a_D$, $v'_C = (\eta - a_D)t$ oraz $x'_C = (\eta - a_D)t^2/2$. Zawsze $v'_C < 0$.

W układzie związanym ze stołem.

Występują dwa przypadki:

1. Gdy $\eta \geq a_D$, cegła przyczepia się do deski i pozostaje względem niej w spoczynku: $a_C = a_D$, $v_C = a_D t$ oraz $x_C = a_D t^2/2$.
2. Gdy $\eta < a_D$, otrzymujemy: $a_C = \eta$, $v_C = \eta t$ oraz $x_C = \eta t^2/2$. Zawsze $v_C > 0$.

c)

W układzie związanym z deską.

Rozważam 'naiwny' wynik:

$a'_C = \eta - a_D = \eta - 2bt$,

gdzie $a_D = 2bt$ jest przyśpieszeniem deski względem stołu.

Początkowo cegła przyczepia się do deski i do chwili $t_1 = \eta/(2b)$ cegła spoczywa na desce: $a'_C = v'_C = x'_C = 0$.

Dla $t > t_1$ cegła porusza się ruchem przyśpieszonym: $a'_C = \eta - 2bt$, $v'_C = \eta(t - t_1) - b(t^2 - t_1^2)$ oraz $x'_C = \eta(t - t_1)^2/2 - b[(t^3 - t_1^3)/3 - t_1^2(t - t_1)]$.

W układzie związanym ze stołem.

Do chwili $t_1 = \eta/(2b)$ cegła spoczywa na desce: $a_C = a_D = 2bt$, $v_C = v_D = bt^2$ oraz $x_C = bt^3/3$.

Dla $t > t_1$: $a_C = \eta$, $v_C = \eta(t - t_1) + bt_1^2$ oraz $x_C = \eta(t - t_1)^2/2 + bt_1^2(t - t_1) + bt_1^3/3$.

A więc po czasie t_1 cegła porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

Zadanie 6.

Równia pochyła o kącie nachylenia α oraz o masie M może bez tarcia przesuwać się po stole. Na równię położono ciężarek o masie m. Obliczyć przyśpieszenie równi oraz przyśpieszenie ciężarka w inercjalnym układzie związanym ze stołem, a także przyśpieszenie ciężarka w układzie związanym z równią. Rozpatrzyć dwa przypadki:

a) ciężarek zsuwa się po równi bez tarcia,

b) ciężarek zsuwa się po równi z tarciem, a współczynnik tarcia wynosi μ.

Czy ciężarek może oderwać się od powierzchni równi? Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni stołu.

Rozwiązanie.

Wybór układów: nieprimowane - związane ze stołem; primowane związane z równią; osie X i X' równoległe względem siebie, powierzchni stołu oraz podstawy równi; osie Y i Y' prostopadłe względem stołu. Siła normalna do powierzchni równi z jaką równia działa na ciężarek: $\vec{F}_N$. Związek między przyśpieszeniami:

$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$, gdzie $\vec{a}$ - przyśpieszenie ciężarka, a $\vec{A}$ - przyśpieszenie równi. Orientacja równi: wysokość ciała na równi zmniejsza się przy zwiększaniu wartości x' (lub x): $y' = -\tan\alpha\, x' + \text{const}$.

a) Równania ruchu:
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N$
$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F}_N - m\vec{A}$
$M\vec{A} = M\vec{g} - \vec{F}_N + \vec{F}_{RP}$,
gdzie $\vec{F}_{RP}$ jest siłą, z jaką podłoże działa na równię (Reakcja Podłoża). Siły $M\vec{g}$ oraz $\vec{F}_{RP}$ są prostopadłe do podłoża (równoległe do osi Y).
Więzy:
równia porusza się tylko poziomo, zachodzi więc: $M\vec{g} - F_{Ny}\hat{e}_y + \vec{F}_{RP} = 0$;
siła reakcji ciało-równia jest prostopadła do równi: $F_{Nx}/F_{Ny} = \tan\alpha$;
przyśpieszenie ciała w układzie związanym z równią jest równoległe do powierzchni równi:$-a'_y/a'_x = \tan\alpha$ (ciężarek bedzie zjeżdżał, więc $a'_y \leq 0$).
Stąd równania ruchu rozpisane na współrzędne:
$MA_x = -F_{Nx}$; $MA_y = 0$
$ma'_x = F_{Nx} - mA_x$; $ma'_y = -mg + F_{Ny} - mA_y$
Czyli otrzymujemy z drugiej pary równań:
$ma'_x = F_{Nx}(1 + m/M)$; $-ma'_x \tan\alpha = -mg + F_{Nx}\cot\alpha$
Eliminując F_{Nx} otrzymujemy [przydatna równość: $\sin\alpha\cos\alpha(\cot\alpha + \tan\alpha) = 1$]:
$a'_x = \cos\alpha\, g \sin\alpha(M + m)/(M + m\sin^2\alpha)$
z równania więzów:
$a'_y = -\sin\alpha\, g\sin\alpha(M + m)/(M + m\sin^2\alpha)$
Przyśpieszenie równi względem stołu:
$A_x = -a'_x m/(M + m) = -\cos\alpha\, g\sin\alpha\, m/(M + m\sin^2\alpha)$
$A_y = 0$
Przyśpieszenie ciężarka względem stołu:
$a_x = A_x + a'_x = \cos\alpha\, g\sin\alpha M/(M + m\sin^2\alpha)$
$a_y = A_y + a'_y = -\sin\alpha\, g\sin\alpha(M + m)/(M + m\sin^2\alpha)$.
W rzeczywistości gdyby ciężarek oderwał się od równi, to równia rozpoczęłaby ruch ze stałą prędkością, gdyż nie działałaby na nią żadna wypadkowa siła. Byłoby to sprzeczne z wynikiem $A_x = \text{const}$. Ponieważ w rozwiązaniu używamy równości $-a'_y/a'_x = \tan\alpha$ (wiąz dwustronny), więc odrywaniu się ciężarka odpowiadałoby zniknięcie siły nacisku w pewnej chwili (później siła $\vec{F}_N$ zmieniłaby zwrot; ciężarek hamowałby równię). Zgodnie z równaniem $MA_x = -F_{Nx}$ przyśpieszenie równi osiągnęłoby wtedy wartość 0. Ponieważ otrzymaliśmy stałe przyśpieszenie $|A_x| > 0$, więc przy $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ciężarek nie oderwie się od równi podczas zsuwania.

b) Równania ruchu:
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_T$
$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_T - m\vec{A}$
$M\vec{A} = M\vec{g} - \vec{F}_N - \vec{F}_T$.
Więzy:
Jak w punkcie **a)**
oraz siła tarcia $\vec{F}_T$ jest równoległa do powierzchni równi.
Długość wektora siły tarcia: $F_T = \mu F_N$
Rozkłady na współrzędne:
$F_{Nx} = F_N\sin\alpha$, $F_{Ny} = F_N\cos\alpha$
$F_{Tx} = -F_T\cos\alpha$, $F_{Ty} = F_T\sin\alpha$
Stąd równania ruchu rozpisane na współrzędne:
$MA_x = -F_{Nx} - F_{Tx} = F_N(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$; $MA_y = 0$
$ma'_x = F_{Nx} + F_{Tx} - mA_x = F_N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(1 + m/M)$;
$ma'_y = -mg + F_{Ny} + F_{Ty} - mA_y = -mg + F_N(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$
Eliminując F_N oraz a'_yotrzymujemy:

$a'_x = \cos\alpha\, g \cos\alpha(\tan\alpha - \mu)(M+m)/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$
A więc dla $\tan\alpha > \mu$ ciężarek będzie się zsuwać. Z więzów:
$a'_y = -a'_x \tan\alpha$
Przyśpieszenie równi:
$A_x = -a'_x m/(M+m) = -\cos\alpha\, g\cos\alpha(\tan\alpha - \mu)m/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$
Przyśpieszenie ciężarka względem stołu:
$a_x = A_x + a'_x = \cos\alpha\, g\cos\alpha(\tan\alpha - \mu)M/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$
$a_y = a'_y$
Uwaga: Inne podejście do problemu można znaleźć w artykule
`http://xxx.lanl.gov/abs/physics/9808049`.

Zadanie 7.

Ciężarek o masie m jest przyczepiony do poziomej, przytwierdzonej do ściany sprężyny o współczynniku sprężystości k (schemat na rysunku). Współczynnik tarcia między ciężarkiem a podłożem wynosi μ. Podać równanie ruchu ciężarka, jeśli początkowo spoczywał, a długość sprężyny była o $L = \frac{5}{2}\mu mg/k$ większa od jej długości swobodnej. Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do podłoża.
Wskazówka: Otrzymane równanie różniczkowe można sprowadzić do równania oscylatora harmonicznego za pomocą podstawienia $u = x - \mu mg/k$.

Rozwiązanie.

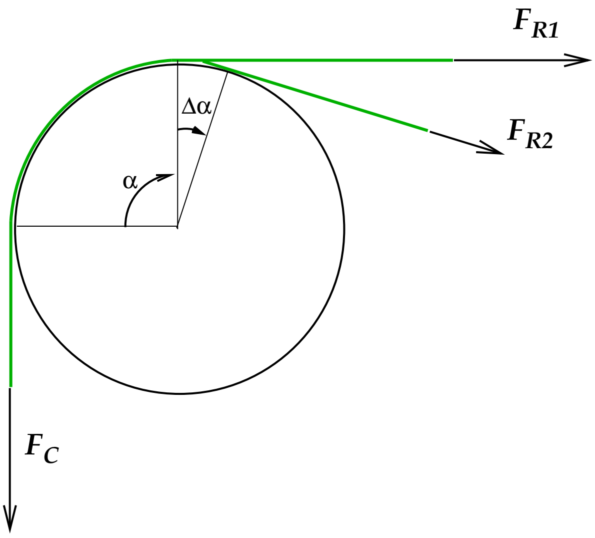
Wybór układu: położenie ciężarka: x; przyjmuję $x = 0$ dla długości swobodnej sprężyny; wychylenie o L niech będzie od ściany, zgodnie ze zwrotem osi X.
Równanie wynikające z drugiej zasady dynamiki: $m\ddot{x} = -kx - F_T\dot{x}/|\dot{x}|$,
gdzie $F_T = \mu mg$. Czy ciężarek ruszy? Siła sprężystości, $kL = \frac{5}{2}\mu mg$, jest większa od maksymalnej siły tarcia, F_T, więc ciężarek ruszy. Do chwili zatrzymania się mamy równanie:
$m\ddot{x} = -kx + F_T$.
Zapisujemy je w postaci: $\ddot{x} = -(k/m)(x - F_T/k)$. Wprowadzamy zmienną $u = x - F_T/k$ i, korzystając z równości $\ddot{u} = \ddot{x}$, otrzymujemy znane równanie:
$\ddot{u} = -\omega^2 u$,
gdzie $\omega^2 = k/m$. Rozwiązania szukamy w postaci $u = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, czyli w zmiennej x:
$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + F_T/k$.
Z warunków początkowych, $x(t=0) = L$ oraz $\dot{x}(t=0) = 0$, otrzymujemy: $A = L - F_T/k$ oraz $B = 0$.
A więc do chwili zatrzymania się ciężarek porusza się zgodnie z równaniem:
$x(t) = (L - F_T/k)\cos(\omega t) + F_T/k$
aż do chwili $t_1 = \pi/\omega$, gdy się zatrzyma. Wtedy ciężarek będzie w położeniu:
$x(t_1) = -(L - F_T/k) + F_T/k = -L + 2F_T/k = -\frac{1}{2}\mu mg/k$.
Ponieważ $k|x(t_1)| < F_T$ ciężarek pozostanie w spoczynku. Podsumowując:
$x(t < t_1) = (L - F_T/k)\cos(\omega t) + F_T/k$,
$x(t \geq t_1) = -\frac{1}{2}F_T/k$.

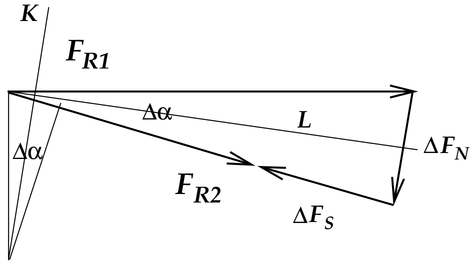
Zadanie 8.

Linę, na której wisi odważnik o ciężarze F_C, przerzucono przez nieruchomy, poziomy walec. Lina dotyka walca na łuku o mierze kątowej α. Z jaką najmniejszą siłą F_R należy trzymać wolny koniec liny, aby odważnik nie opadł? Współczynnik tarcia między liną a walcem wynosi μ.
Wskazówka: Ułożyć równanie różniczkowe rozpatrując zmiany siły F_R przy małych zmianach kąta α; przyczynek do siły nacisku liny na walec można uzyskać z bilansu sił.

Rozwiązanie.

Siła, z jaką należy trzymać koniec liny, musi być równoległa do liny w punkcie zaczepienia. Po zwiększeniu kąta α o $\Delta\alpha$ rozważyć należy bilans sił:





Gdyby nie występowało tarcie, to $|\vec{F}_{R1}| = |\vec{F}_{R2}|$. Tarcie między walcem a liną pozwala na zmniejszenie siły F_R o na razie nieznaną wartość ΔF_S. Sieczne K i L kąta $\Delta\alpha$ są do siebie prostopadłe. A więc siła $\Delta\vec{F_N}$ (równoległa do odcinka środek_walca-środek_łuku) jest przyczynkiem do siły nacisku liny na walec. Związek między wartościami przyczynków:

$\Delta F_S = \mu \Delta F_N$

Z dobrym przybliżeniem, dla małych wartości $\Delta\alpha$ zachodzi:

$\Delta F_N = F_{R1} \Delta\alpha$

Długość wektora $\vec{F}_{R1}$ zmiejsza się o ΔF_S:

$\Delta F_{R1} = -\Delta F_S$

Otrzymujemy równanie:

$\Delta F_{R1} = -\mu F_{R1} \Delta\alpha$,

które zapisujemy jako równanie różniczkowe:

$dF_R/d\alpha = -\mu F_R$

Rozwiązaniem, uwzględniającym warunek początkowy $F_R(\alpha = 0) = F_C$, jest:

$F_R(\alpha) = F_C \exp(-\mu\alpha)$.

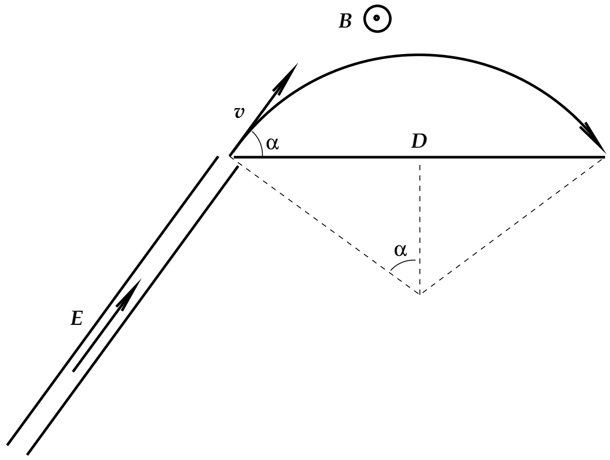
Wniosek: Owijanie bardzo się opłaca.

Zadanie 9.

Początkowo spoczywającą cząstkę o dodatnim ładunku Q i masie m przyśpieszono za pomocą akceleratora o długości L. W akceleratorze wytwarzane jest jednorodne pole elektryczne E. Tuż za akceleratorem cząstka wleciała w obszar jednorodnego pola magnetycznego B. W jakiej odległości D od końca akceleratora cząstka uderzy w ekran? Kąt między osią akceleratora a płaszczyzną ekranu wynosi α. W wybranym układzie współrzednych wektory pól są wyrażone następująco: $\vec{E} = E(\cos\alpha \hat{e}_x + \sin\alpha \hat{e}_y)$ i $\vec{B} = B\hat{e}_z$, równanie ekranu ma postać $y = 0$, a cząstka opuszczając akcelerator przelatuje przez początek układu współrzędnych.

Rozwiązanie.

Układ eksperymentalny:



W akceleratorze cząstka porusza się z przyśpieszeniem: $a = QE/m$. Na długości L uzyska prędkość $v = \sqrt{2QEL/m}$. W polu B będzie poruszać się po łuku o promieniu R wynikającym z równości: siła Lorenza = siła dośrodkowa, $mv^2/R = QvB$. A więc $R = mv/(QB)$.
Cząstka od wylotu z akceleratora do uderzenia w ekran będzie się poruszać po łuku o mierze kątowej 2α. Stąd $D = 2R\sin\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{2ELm/Q}/B$

Zadanie 10.

Cząstka o ładunku Q i masie m, mając początkową prędkość $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$, wlatuje w obszar równoległych, jednorodnych pól: elektrycznego $\vec{E} = E\hat{e}_y$ i magnetycznego $\vec{B} = B\hat{e}_y$. Wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona równania na współrzędne położenia cząstki x i z rozwiązać po sprowadzeniu do jednego równania na zmienną zespoloną $f = \dot{x} + i\dot{z}$. Podać równanie ruchu cząstki zakładając, że w chwili początkowej przelatywała przez początek układu współrzędnych. Jaki warunek musi być spełniony, aby cząstka dotarła do ekranu, którego równanie ma postać $x = L$? Jaki obraz utworzą na ekranie cząstki o różnych wartościach v_{0x}, jeśli założyć, że odległość L jest mała w porównaniu z promieniem toru w płaszczyźnie XZ, tzn. $L \ll |v_{0x}m/(QB)|$?
Wskazówka: Obraz można znaleźć jako zależność $y(z)$ po zastosowaniu następujących przybliżeń dla $x(t)$ i $z(t)$: jeśli $\sin\alpha \ll 1$, to $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$.

Rozwiązanie.

Równanie ruchu, $m\ddot{\vec{r}} = Q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$, rozpisane na współrzędne:
$\ddot{x} = -\lambda\dot{z}$
$\ddot{y} = \kappa$
$\ddot{z} = \lambda\dot{x}$,
gdzie $\lambda = QB/m$ oraz $\kappa = QE/m$. Zakładam, że $t_0 = 0$. Rozwiązanie drugiego równania:
$y(t) = \kappa t^2/2 + v_{0y}t$.
Pierwsze i trzecie równanie sprowadza się do:
$\dot{f} = i\lambda f$,
którego rozwiązaniem uwzględniającym warunki początkowe jest:
$f = v_{0x}\exp(i\lambda t)$,
co odpowiada: $\dot{x} = v_{0x}\cos(\lambda t)$ oraz $\dot{z} = v_{0x}\sin(\lambda t)$. Całkując otrzymujemy:
$x(t) = (v_{0x}/\lambda)\sin(\lambda t)$
$z(t) = (v_{0x}/\lambda)(1 - \cos(\lambda t))$.
Warunek dotarcia do ekranu: $x(t) \geq L$, czyli $v_{0x}/\lambda \geq L$.
Cząstka dotrze do ekranu po czasie t_1: $L\lambda/v_{0x} = \sin(\lambda t_1) \approx \lambda t_1$ (zgodnie z warunkiem $L \ll |v_{0x}m/(QB)|$).
$t_1 = L/v_{0x}$
$z(t_1) \approx v_{0x}\lambda t_1^2/2 = \lambda L^2/(2v_{0x})$
$y(t_1) = \kappa t_1^2/2 + v_{0y}t_1 = \kappa L^2/(2v_{0x}^2) + v_{0y}L/v_{0x}$.
Eliminując v_{0x} otrzymujemy:
$y(z) = 2z[z\kappa/(\lambda L) + v_{0y}]/(\lambda L)$,
czyli równanie paraboli. Położenie jej ekstremum jest zależne od v_{0y}.

Zadanie 11.
Cząstka o ładunku Q i masie m znajduje się w obszarze prostopadłych, jednorodnych pól: elektrycznego $\vec{E} = E\hat{e}_z$ i magnetycznego $\vec{B} = B\hat{e}_y$. Wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona równania na współrzędne położenia cząstki x i z rozwiązać po sprowadzeniu do jednego równania na zmienną zespoloną $f = \dot{x} + i\dot{z}$. Podać równanie ruchu cząstki zakładając, że w chwili początkowej wyruszała ona z początku układu współrzędnych z prędkością początkową $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$. Jakie warunki muszą być spełnione, aby torem cząstki była zwykła cykloida? Jakie warunki muszą być spełnione, aby cząstka poruszała się ruchem jednostajnym prostoliniowym? Jaka będzie wtedy jej prędkość?
Rozwiązanie.
Równanie ruchu, $m\ddot{\vec{r}} = Q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$, rozpisane na współrzędne:
$\ddot{x} = -\lambda\dot{z}$
$\ddot{y} = 0$
$\ddot{z} = \lambda\dot{x} + \kappa,$
gdzie $\lambda = QB/m$ oraz $\kappa = QE/m$. Zakładam, że $t_0 = 0$. Rozwiązanie drugiego równania:
$y(t) = v_{0y}t.$
Pierwsze i trzecie równanie sprowadza się do:
$\dot{f} = i\lambda f + i\kappa,$
którego rozwiązaniem uwzględniającym warunki początkowe jest:
$f = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\exp(i\lambda t) - \kappa/\lambda,$
co odpowiada: $\dot{x} = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\cos(\lambda t) - \kappa/\lambda$ oraz $\dot{z} = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\sin(\lambda t)$. Całkując otrzymujemy:
$x(t) = [(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda]\sin(\lambda t) - \kappa/\lambda t,$
$z(t) = [(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda](1 - \cos(\lambda t)).$
Przykład zwykłej cykloidy: $x = R[\sin(\omega t) - \omega t]$, $z = R[1 - \cos(\omega t)]$. A więc żądamy:
$\kappa/\lambda/[(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda] = \lambda$, po uproszczeniu: $v_{0x} = 0$.
Tor jest zwykłą cykloidą, gdy $v_{0x} = 0$ oraz $v_{0y} = 0$.
Cząstka będzie poruszała się ruchem jednostajnym prostoliniowym, gdy $v_{0x} = -\kappa/\lambda$ (pomijam przypadki zerowych pól, ładunku itp.). Jej prędkość w takim wypadku to $\vec{v} = -(\kappa/\lambda)\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$.