Wycieczki fizyka

Zadania z rozwiązaniami

Piotr Nieżurawski
pniez@fuw.edu.pl

Wersja 0.4 z dnia 28.06.2006

Pierwsza wersja (0.1): 04.02.2006

Spis treści

1 Kinematyka

1.1 Zakręcona ćma

Ćma leci do źródła światła. Wektor prędkości ćmy jest nachylony pod kątem α względem odcinka ćma–źródło. Tor zawarty jest w płaszczyźnie (tzw. ruch płaski). Owad startuje z odległości ρ_0 od źródła. Rozważyć przypadki, gdy:
a) kąt α jest stały, a szybkość ćmy zależy od odległości ćma–źródło jak $v(\rho) = v_0(\rho/\rho_0)^n$, gdzie v_0 i n są stałymi. Znaleźć tor, po jakim porusza się ćma oraz jego długość. Podać równanie ruchu owada. Kiedy czas lotu jest skończony?
b) szybkość lotu owada jest stała, a kąt α zależy od odległości ćma–źródło jak $\alpha(\rho) = \arctan(a\rho^m)$, gdzie a i m są stałymi. Znaleźć tor, po jakim porusza się ćma.

Rozwiązanie

W układzie biegunowym, w którego początku znajduje się źródło światła, wektor położenia ćmy: $\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho$

Prędkość ćmy: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi$

Warunki zadania: $\vec{v} = v(-\cos\alpha\hat{e}_\rho + \sin\alpha\hat{e}_\phi)$, czyli $\dot{\rho} = -v\cos\alpha$ oraz $\rho\dot{\phi} = v\sin\alpha$.

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho\dot{\phi}} = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

Eliminujemy czas:

$$\frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} = \frac{d\rho}{dt}\frac{dt}{d\phi} = \frac{d\rho}{d\phi}$$

Czyli:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\phi} = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

Ustalamy warunki początkowe: $\rho(t=0) = \rho_0$, $\phi(t=0) = 0$

a) Przypadek $\alpha = \alpha_0$ **oraz** $v(\rho) = v_0(\rho/\rho_0)^n$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho'}d\rho' = -\frac{1}{\tan\alpha_0}\int_0^{\phi} d\phi'$$

Równanie toru: $\ln(\rho/\rho_0) = -\phi/\tan\alpha_0$. Lub:

$$\rho(\phi) = \rho_0\exp(-\phi/\tan\alpha_0)$$

Torem jest *spirala logarytmiczna*.

Równanie ruchu:

$$\frac{d\rho}{dt} = -v\cos\alpha_0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{v(\rho')} = -\cos\alpha_0 \int_0^t dt' = -t\cos\alpha_0$$

Po wstawieniu $v(\rho)$ otrzymujemy:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^n} = -v_0 t \cos\alpha_0/\rho_0^n$$

Rozważając oddzielnie przypadki $n = 1$ oraz $n \neq 1$, dostajemy:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 \exp(-v_0 t \cos\alpha_0/\rho_0) \qquad \text{dla } n = 1 \\ \rho(t) &= \rho_0[1 + (n-1)v_0 t \cos\alpha_0/\rho_0]^{1/(1-n)} \qquad \text{dla } n \neq 1 \end{aligned}$$

Zależność kąta ϕ od czasu otrzymujemy po wstawieniu wyniku dla $\rho(t)$ do równania toru

$$\phi(t) = -\tan\alpha_0 \ln(\rho(t)/\rho_0)$$

Czas ruchu jest skończony, jeśli dla skończonego t_k spełniona jest równość $\rho(t_k) = 0$. Od razu widać, że ruch trwa nieskończenie długo w przypadku $n = 1$. Jeśli $n > 1$, to również czas ruchu jest nieskończony. Jedynie dla $n < 1$ ćma w skończonym czasie doleci do źródła światła.

Przy założeniu stałej szybkości, $v \equiv |\vec{v}| = v_0 = \text{const}$ (czyli $n = 0$), czas ruchu od $\rho = \rho_0$ do $\rho = 0$ wynosi $t_k = \rho_0/|v_\rho| = \rho_0/(v_0\cos\alpha_0)$.

A więc długość toru wynosi:

$$S = v_0 t_k = \rho_0/\cos\alpha_0$$

Wynik ten jest słuszny dla dowolnego n. Dla $n \geq 1$ zakładamy, że lot ćmy może trwać nieskończenie długo.

b) Przypadek $\alpha(\rho) = \arctan(a\rho^m)$ **oraz** $v = v_0$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \tan\alpha(\rho')\frac{1}{\rho'}d\rho' = -\int_0^{\phi} d\phi'$$

Po wstawieniu zależności $\alpha(\rho)$:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \rho'^{m-1} d\rho' = -\phi/a$$

Rozważając oddzielnie przypadki $m = 0$ oraz $m \neq 0$, dostajemy:

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= \rho_0 \exp(-\phi/a) \qquad \text{dla } m = 0 \\ \rho(\phi) &= \rho_0[1 - m\phi/(a\rho_0^m)]^{1/m} \qquad \text{dla } m \neq 0 \end{aligned}$$

Tor w przypadku $m = 0$ jest *spiralą logarytmiczną*. Przypadek ruchu przy $m = 0$ jest równoważny przypadkowi rozpatrzonemu w podpunkcie a) tego zadania dla $n = 0$, jeśli przyjąć, że $a = \tan\alpha_0$.

Jeśli podstawimy $a = \tan\alpha_0/\rho_0^m$, to otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= \rho_0 \exp(-\phi/\tan\alpha_0) \qquad \text{dla } m = 0 \\ \rho(\phi) &= \rho_0[1 - m\phi/\tan\alpha_0]^{1/m} \qquad \text{dla } m \neq 0 \end{aligned}$$

2 O obrotach

2.1 Spacer biedronki po płycie

Płyta gramofonowa o promieniu R kręci się z prędkością kątową ω względem układu inercjalnego. Ze środka płyty wyrusza biedronka o masie m. Ile powinien wynosić współczynnik tarcia między biedronką a płytą, aby owad mógł osiągnąć krawędź płyty, poruszając się cały czas ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością v' względem płyty? Rozwiązać korzystając z wzorów na siły pozorne. Porównać odpowiedź z wynikami Zadania .... Czy zwiększenie masy biedronki pozwoliłoby jej na taki sam spacer po szybciej wirującej płycie? Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni płyty.

Rozwiązanie.
W układzie związanym z płytą: $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_{z'}$, $\vec{v}' = v'\hat{e}_{x'}$, $\vec{r}' = v't\hat{e}_{x'}$.
Siły pozorne: $\vec{F}_{poz} = -m2\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -m2\omega v'\hat{e}_{y'} + m\omega^2 v't\hat{e}_{x'}$
Warunek spaceru ruchem jednostajnym prostoliniowym: siły tarcia statycznego (biedronka musi iść, nie może się ślizgać) powinny równoważyć siły pozorne:
$|\vec{F}_{poz}| = |\vec{F}_T|$
Największa siła pozorna: $\max(|\vec{F}_{poz}|) = \max(m\omega v'\sqrt{4 + (\omega t)^2}) = m\omega v'\sqrt{4 + (\omega R/v')^2}$.
Największa możliwa siła tarcia statycznego: $\max|\vec{F}_T| = \mu mg$ (największa siła pozioma, jaką podłoże może działać na biedronkę; można wspomnieć III zasadę dynamiki).
Ponieważ chodzi o współczynnik tarcia, to zamieniamy równość $|\vec{F}_{poz}| = |\vec{F}_T|$ (zgodną z III zasadą dynamiki) na nierówność $\max|\vec{F}_{poz}| \leq \max|\vec{F}_T|$. Odpowiedź:
$\mu \geq \frac{\omega v'}{g}\sqrt{4 + (\omega R/v')^2}$
W Zadaniu 7. z Serii II otrzymaliśmy przyśpieszenie biedronki w układzie inercjalnym $\vec{a} = -\vec{F}_{poz}/m$. Zauważyć, że następuje relacja między wersorami inercjalnego i obracającego się układu: $\hat{e}_\rho = \hat{e}_{x'}$ oraz $\hat{e}_\phi = \hat{e}_{y'}$.
Zwiększenie masy nie pozwoli biedronce spacerować po szybciej wirujących płytach.

2.2 Koralik na pręcie

Koralik o masie m porusza się bez tarcia wzdłuż wirującego pręta. Pręt jest nachylony do poziomu pod kątem α, a obraca się z prędkością kątową $\omega(t) = ...$ dookoła pionowej osi. Pręt nie porusza się w pionie, układ znajduje się w jednorodnym, stałym polu grawitacyjnym. Znaleźć prędkość i położenie koralika względem pręta, zakładając, że w chwili początkowej koralik spoczywał w odległości D od osi obrotu.

Rozwiązanie (stała ω).
Wybieram układ współrzędnych związanych z prętem, taki że pręt leży wzdłuż osi X', zwrot osi jest od osi obrotu pręta i spełniony jest warunek $x'(t = 0) = D/\cos\alpha$. Zakładam taką orientację pręta i położenia koralika, że w przypadku $\omega = 0$ koralik zacznie przybliżać się do nominalnej osi obrotu pręta. Jedyne siły działające na koralik, które nie są w ogólności całkowicie równoważone przez siłe reakcji pręta to siła odśrodkowa i siła grawitacyjna:
$F_{od,\,x'} = \omega^2 x' \cos^2\alpha$
$F_{g,\,x'} = -mg\sin\alpha$
Równanie ruchu: $m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \cos^2\alpha - mg\sin\alpha$.
Wprowadzając oznaczenia $\lambda \equiv \omega\cos\alpha$ i $\kappa \equiv g\sin\alpha/\lambda^2$ oraz zmienną $u \equiv x' - \kappa$ uzyskujemy równanie:
$\ddot{u} = \lambda^2 u$,
którego rozwiązaniem jest $u = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$. Wracamy do zmiennej x' i otrzymujemy następujące równania z warunków początkowych:
$x'(t = 0) = A + B + \kappa = D/\cos\alpha$
$\dot{x}'(t = 0) = \lambda(A - B) = 0.$

Odpowiedź:
$x' = (D/\cos\alpha - \kappa)(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})/2 + \kappa$
$\dot{x}' = (D/\cos\alpha - \kappa)\lambda(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})/2$
Można wyróżnić następujące przypadki:
1) Koralik spoczywa, jeśli $D/\cos\alpha - \kappa = 0$, czyli $\omega^2 = \omega_0^2$, gdzie $\omega_0 \equiv \sqrt{g\tan\alpha/D}$.
2) Koralik oddala się od osi obrotu, jesli $\omega^2 > \omega_0^2$.
3) Koralik przybliża się od osi obrotu (a następnie ją przekracza), jesli $\omega^2 < \omega_0^2$.
4) Jeśli $\omega = 0$, to $m\ddot{x}' = -mg\sin\alpha$ i otrzymujemy: $\dot{x}' = -g\sin\alpha t$ oraz $x' = -g\sin\alpha t^2/2 + D/\cos\alpha$

3 Tarcie

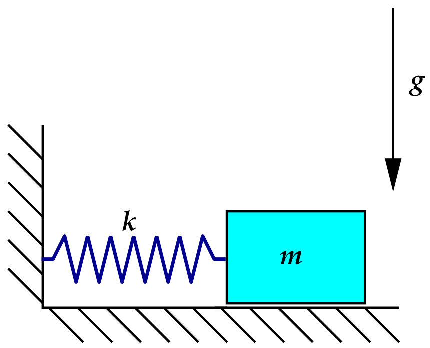
3.1 Lądowanie na desce

Na przesuwaną po stole deskę kładziona jest w chwili $t_0 = 0$ cegła, która początkowo spoczywa w inercjalnym układzie związanym ze stołem. Współczynnik tarcia między deską a cegłą wynosi μ. W układzie związanym z deską oraz w układzie związanym ze stołem podać równania ruchu cegły oraz naszkicować zależność jej prędkości od czasu. Rozpatrzyć następujące przypadki:
a) deska porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością v_D,
b) deska porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym prostoliniowym: $v_D = at$,
c) deska porusza się ruchem przyśpieszonym prostoliniowym: $v_D = bt^2$,
gdzie a i b są pewnymi stałymi. Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni deski.
Rozwiązanie.
Oznaczenia: C - cegła, D - deska; $\eta \equiv \mu g$; x jest współrzędną w układzie związanym ze stołem, a x' w układzie związanym z deską. Druga zasada dynamiki prowadzi nas do równania w układzie związanym ze stołem: $ma_C = -\mu mg v'_C/|v'_C|$, gdzie czynnik $v'_C/|v'_C|$ jest związany z ruchem w (czasami) nieinercjalnym układzie związanym z deską. Warunki początkowe: $x_C = v_C = x'_C = 0$. Obowiązują transformacje:
$a_C = a_D + a'_C$ (a więc $ma'_C = -\mu mg v'_C/|v'_C| - ma_D$)
$v_C = v_D + v'_C$
$x_C = x_D + x'_C$
Wybieram układ, w którym zawsze $v_D \geq 0$.
Z braku dodatkowych informacji zakładam, że $\mu = \mu_k = \mu_s$.
a)
W układzie związanym z deską.
Początkowo $v'_C = -v_D$, a więc:
$a'_C = \eta$, $v'_C = \eta t - v_D$ oraz $x'_C = \eta t^2/2 - v_D t$
dopóki $v'_C \neq 0$, czyli do czasu $t_1 = v_D/\eta$.
Dla $t > t_1$mamy:
$a'_C = 0$, $v'_C = 0$ oraz $x'_C = -v_D^2/(2\eta)$.
W układzie związanym ze stołem.
Dla $t \leq t_1$:
$a_C = \eta$, $v_C = \eta t$ oraz $x_C = \eta t^2/2$
Dla $t > t_1$:
$a_C = 0$, $v_C = v_D$ oraz $x_C = v_D t - v_D^2/(2\eta)$
b)
W układzie związanym z deską.
Rozważam 'naiwny' wynik:
$a'_C = \eta - a_D = \eta - a$,
gdzie $a_D = a$ jest przyśpieszeniem deski względem stołu. Występują dwa przypadki:
1. Gdy $\eta \geq a_D$, cegła przyczepia się do deski i pozostaje względem niej w spoczynku: $a'_C = v'_C = x'_C = 0$.

2. Gdy $\eta < a_D$, otrzymujemy: $a'_C = \eta - a_D$, $v'_C = (\eta - a_D)t$ oraz $x'_C = (\eta - a_D)t^2/2$. Zawsze $v'_C < 0$.
W układzie związanym ze stołem.
Występują dwa przypadki:
1. Gdy $\eta \geq a_D$, cegła przyczepia się do deski i pozostaje względem niej w spoczynku: $a_C = a_D$, $v_C = a_D t$ oraz $x_C = a_D t^2/2$.
2. Gdy $\eta < a_D$, otrzymujemy: $a_C = \eta$, $v_C = \eta t$ oraz $x_C = \eta t^2/2$. Zawsze $v_C > 0$.
c)
W układzie związanym z deską.
Rozważam 'naiwny' wynik:
$a'_C = \eta - a_D = \eta - 2bt$,
gdzie $a_D = 2bt$ jest przyśpieszeniem deski względem stołu.
Początkowo cegła przyczepia się do deski i do chwili $t_1 = \eta/(2b)$ cegła spoczywa na desce: $a'_C = v'_C = x'_C = 0$.
Dla $t > t_1$ cegła porusza się ruchem przyśpieszonym: $a'_C = \eta - 2bt$, $v'_C = \eta(t - t_1) - b(t^2 - t_1^2)$ oraz $x'_C = \eta(t - t_1)^2/2 - b[(t^3 - t_1^3)/3 - t_1^2(t - t_1)]$.
W układzie związanym ze stołem.
Do chwili $t_1 = \eta/(2b)$ cegła spoczywa na desce: $a_C = a_D = 2bt$, $v_C = v_D = bt^2$ oraz $x_C = bt^3/3$.
Dla $t > t_1$: $a_C = \eta$, $v_C = \eta(t - t_1) + bt_1^2$ oraz $x_C = \eta(t - t_1)^2/2 + bt_1^2(t - t_1) + bt_1^3/3$.
A więc po czasie t_1 cegła porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

3.2 Oscylator ze stałą siłą tłumiącą

Ciężarek o masie m jest przyczepiony do poziomej, przytwierdzonej do ściany sprężyny o współczynniku sprężystości k (schemat na rysunku). Współczynnik tarcia między ciężarkiem a podłożem wynosi μ. Podać równanie ruchu ciężarka, jeśli początkowo spoczywał, a długość sprężyny była o $L = \frac{5}{2}\mu mg/k$ większa od jej długości swobodnej. Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do podłoża.
Wskazówka: Otrzymane równanie różniczkowe można sprowadzić do równania oscylatora harmonicznego za pomocą podstawienia $u = x - \mu mg/k$.



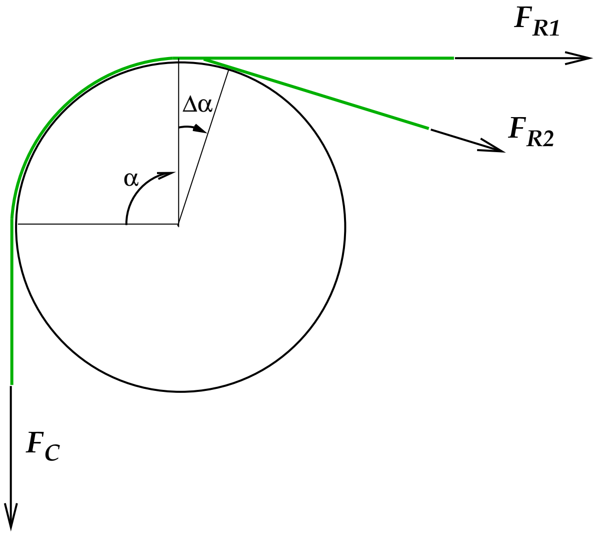
Rysunek do Zadania 3.2

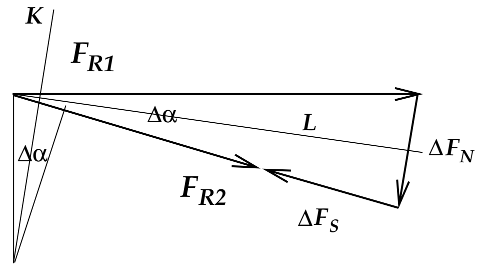
Rozwiązanie.
Wybór układu: położenie ciężarka: x; przyjmuję $x = 0$ dla długości swobodnej sprężyny; wychylenie o L niech będzie od ściany, zgodnie ze zwrotem osi X.
Równanie wynikające z drugiej zasady dynamiki: $m\ddot{x} = -kx - F_T\dot{x}/|\dot{x}|$,
gdzie $F_T = \mu mg$. Czy ciężarek ruszy? Siła sprężystości, $kL = \frac{5}{2}\mu mg$, jest większa od maksymalnej siły tarcia, F_T, więc ciężarek ruszy. Do chwili zatrzymania się mamy równanie:
$m\ddot{x} = -kx + F_T$.
Zapisujemy je w postaci: $\ddot{x} = -(k/m)\,(x - F_T/k)$. Wprowadzamy zmienną $u = x - F_T/k$ i, korzystając z równości $\ddot{u} = \ddot{x}$, otrzymujemy znane równanie:
$\ddot{u} = -\omega^2 u$,
gdzie $\omega^2 = k/m$. Rozwiązania szukamy w postaci $u = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, czyli w zmiennej x:

$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + F_T/k$.
Z warunków początkowych, $x(t = 0) = L$ oraz $\dot{x}(t = 0) = 0$, otrzymujemy: $A = L - F_T/k$ oraz $B = 0$.
A więc do chwili zatrzymania się ciężarek porusza się zgodnie z równaniem:
$x(t) = (L - F_T/k)\cos(\omega t) + F_T/k$
aż do chwili $t_1 = \pi/\omega$, gdy się zatrzyma. Wtedy ciężarek będzie w położeniu:
$x(t_1) = -(L - F_T/k) + F_T/k = -L + 2F_T/k = -\frac{1}{2}\mu mg/k$.
Ponieważ $k|x(t_1)| < F_T$ ciężarek pozostanie w spoczynku. Podsumowując:
$x(t < t_1) = (L - F_T/k)\cos(\omega t) + F_T/k$,
$x(t \geq t_1) = -\frac{1}{2}F_T/k$.

3.3 Liny przyleganie

Linę, na której wisi odważnik o ciężarze F_C, przerzucono przez nieruchomy, poziomy walec. Lina dotyka walca na łuku o mierze kątowej α. Z jaką najmniejszą siłą F_R należy trzymać wolny koniec liny, aby odważnik nie opadł? Współczynnik tarcia między liną a walcem wynosi μ.
Wskazówka: Ułożyć równanie różniczkowe rozpatrując zmiany siły F_R przy małych zmianach kąta α; przyczynek do siły nacisku liny na walec można uzyskać z bilansu sił.
Rozwiązanie.
Siła, z jaką należy trzymać koniec liny, musi być równoległa do liny w punkcie zaczepienia. Po zwiększeniu kąta α o $\Delta\alpha$ rozważyć należy bilans sił:





Gdyby nie występowało tarcie, to $|\vec{F}_{R1}| = |\vec{F}_{R2}|$. Tarcie między walcem a liną pozwala na zmniejszenie siły F_R o na razie nieznaną wartość ΔF_S. Sieczne K i L kąta $\Delta\alpha$ są do siebie prostopadłe. A więc siła $\Delta\vec{F}_N$ (równoległa do odcinka środek_walca-środek_łuku) jest przyczynkiem do siły nacisku liny na walec.
Związek między wartościami przyczynków:
$\Delta F_S = \mu \Delta F_N$
Z dobrym przybliżeniem, dla małych wartości $\Delta\alpha$ zachodzi:
$\Delta F_N = F_{R1}\Delta\alpha$
Długość wektora $\vec{F}_{R1}$ zmiejsza się o ΔF_S:
$\Delta F_{R1} = -\Delta F_S$
Otrzymujemy równanie:
$\Delta F_{R1} = -\mu F_{R1}\Delta\alpha$,
które zapisujemy jako równanie różniczkowe:
$dF_R/d\alpha = -\mu F_R$
Rozwiązaniem, uwzględniającym warunek początkowy $F_R(\alpha = 0) = F_C$, jest:
$F_R(\alpha) = F_C \exp(-\mu\alpha)$.
Wniosek: Owijanie bardzo się opłaca.

4 Równia pochyła

4.1 Przemytnik na równi

Osie dwóch walców połączono sztywną, nieważką listwą. Walce mają symetrię osiową, momenty bezwładności I_A oraz I_B. Każdy walec ma masę M i promień R. Pojazd zjeżdża bez poślizgu pod wpływem grawitacji z nieruchomej równi o kącie nachylenia α. Z jakim przyśpieszeniem porusza się ten pojazd, jakie siły działają na listwę?

Rozwiązanie.
Rozpatruję tylko składowe przyśpieszeń i sił równoległe do powierzchni równi.

Równania ruchu walców:

$Ma_A = mg \sin\alpha - F_{TA} + F_{RA}$

$Ma_B = mg \sin\alpha - F_{TB} + F_{RB}$

$I_A \varepsilon_A = F_{TA} R$

$I_B \varepsilon_B = F_{TB} R$

Równanie ruchu nieważkiej listwy:

$0 = -F_{RA} - F_{RB}$

Więzy (ruch bez poślizgu, sztywna listwa):

$\varepsilon_A R = a_A$

$\varepsilon_B R = a_B$

$a_A = a_B$

Mamy 8 równań na 8 niewiadomych. Odpowiedź:

1) Pojazd porusza się z przyśpieszeniem

$a_A = a_B = 2Mg \sin\alpha / [2M + (I_A + I_B)/R^2]$.

2) Listwa działa na walec A siłą

$F_{RA} = Mg \sin\alpha (I_A - I_B)/R^2 / [2M + (I_A + I_B)/R^2]$.

Walec A działa na listwę siłą $-F_{RA}$, a walec B siłą $-F_{RB} = F_{RA}$.

4.2 Zjazd po ruchomej równi

Równia pochyła o kącie nachylenia α oraz o masie M może bez tarcia przesuwać się po stole. Na równię położono ciężarek o masie m. Obliczyć przyśpieszenie równi oraz przyśpieszenie ciężarka w inercjalnym układzie związanym ze stołem, a także przyśpieszenie ciężarka w układzie związanym z równią. Rozpatrzyć dwa przypadki:
a) ciężarek zsuwa się po równi bez tarcia,
b) ciężarek zsuwa się po równi z tarciem, a współczynnik tarcia wynosi μ.
Czy ciężarek może oderwać się od powierzchni równi? Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni stołu.

Rozwiązanie.
Wybór układów: nieprimowane - związane ze stołem; primowane związane z równią; osie X i X' równoległe względem siebie, powierzchni stołu oraz podstawy równi; osie Y i Y' prostopadłe względem stołu. Siła normalna do powierzchni równi z jaką równia działa na ciężarek: $\vec{F}_N$. Związek między przyśpieszeniami: $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$, gdzie $\vec{a}$ - przyśpieszenie ciężarka, a $\vec{A}$ - przyśpieszenie równi. Orientacja równi: wysokość ciała na równi zmniejsza się przy zwiększaniu wartości x' (lub x): $y' = -\tan\alpha\, x' + \text{const}$.
a) Równania ruchu:
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N$
$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F}_N - m\vec{A}$

$M\vec{A} = M\vec{g} - \vec{F}_N + \vec{F}_{RP}$,
gdzie $\vec{F}_{RP}$ jest siłą, z jaką podłoże działa na równię (Reakcja Podłoża). Siły $M\vec{g}$ oraz $\vec{F}_{RP}$ są prostopadłe do podłoża (równoległe do osi Y).
Więzy:
równia porusza się tylko poziomo, zachodzi więc: $M\vec{g} - F_{Ny}\hat{e}_y + \vec{F}_{RP} = 0$;
siła reakcji ciało-równia jest prostopadła do równi: $F_{Nx}/F_{Ny} = \tan\alpha$;
przyśpieszenie ciała w układzie związanym z równią jest równoległe do powierzchni równi:$-a'_y/a'_x = \tan\alpha$ (ciężarek bedzie zjeżdżał, więc $a'_y \leq 0$).
Stąd równania ruchu rozpisane na współrzędne:
$MA_x = -F_{Nx}$; $MA_y = 0$
$ma'_x = F_{Nx} - mA_x$; $ma'_y = -mg + F_{Ny} - mA_y$
Czyli otrzymujemy z drugiej pary równań:
$ma'_x = F_{Nx}(1 + m/M)$; $-ma'_x \tan\alpha = -mg + F_{Nx}\cot\alpha$
Eliminując F_{Nx} otrzymujemy [przydatna równość: $\sin\alpha\cos\alpha(\cot\alpha + \tan\alpha) = 1$]:
$a'_x = \cos\alpha\, g \sin\alpha(M + m)/(M + m\sin^2\alpha)$
z równania więzów:
$a'_y = -\sin\alpha\, g \sin\alpha(M + m)/(M + m\sin^2\alpha)$
Przyśpieszenie równi względem stołu:
$A_x = -a'_x m/(M + m) = -\cos\alpha\, g \sin\alpha\, m/(M + m\sin^2\alpha)$
$A_y = 0$
Przyśpieszenie ciężarka względem stołu:
$a_x = A_x + a'_x = \cos\alpha\, g \sin\alpha M/(M + m\sin^2\alpha)$
$a_y = A_y + a'_y = -\sin\alpha\, g \sin\alpha(M + m)/(M + m\sin^2\alpha)$.
W rzeczywistości gdyby ciężarek oderwał się od równi, to równia rozpoczęłaby ruch ze stałą prędkością, gdyż nie działałaby na nią żadna wypadkowa siła. Byłoby to sprzeczne z wynikiem $A_x = \text{const}$. Ponieważ w rozwiązaniu używamy równości $-a'_y/a'_x = \tan\alpha$ (wiąz dwustronny), więc odrywaniu się ciężarka odpowiadałoby zniknięcie siły nacisku w pewnej chwili (później siła $\vec{F}_N$ zmieniłaby zwrot; ciężarek hamowałby równię). Zgodnie z równaniem $MA_x = -F_{Nx}$ przyśpieszenie równi osiągnęłoby wtedy wartość 0. Ponieważ otrzymaliśmy stałe przyśpieszenie $|A_x| > 0$, więc przy $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ciężarek nie oderwie się od równi podczas zsuwania.

b) Równania ruchu:
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_T$
$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_T - m\vec{A}$
$M\vec{A} = M\vec{g} - \vec{F}_N - \vec{F}_T$.
Więzy:
Jak w punkcie **a)**
oraz siła tarcia $\vec{F}_T$ jest równoległa do powierzchni równi.
Długość wektora siły tarcia: $F_T = \mu F_N$
Rozkłady na współrzędne:
$F_{Nx} = F_N \sin\alpha$, $F_{Ny} = F_N \cos\alpha$
$F_{Tx} = -F_T \cos\alpha$, $F_{Ty} = F_T \sin\alpha$
Stąd równania ruchu rozpisane na współrzędne:
$MA_x = -F_{Nx} - F_{Tx} = F_N(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$; $MA_y = 0$
$ma'_x = F_{Nx} + F_{Tx} - mA_x = F_N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(1 + m/M)$;
$ma'_y = -mg + F_{Ny} + F_{Ty} - mA_y = -mg + F_N(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$
Eliminując F_N oraz a'_yotrzymujemy:
$a'_x = \cos\alpha\, g \cos\alpha(\tan\alpha - \mu)(M + m)/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$
A więc dla $\tan\alpha > \mu$ ciężarek będzie się zsuwać. Z więzów:
$a'_y = -a'_x \tan\alpha$
Przyśpieszenie równi:
$A_x = -a'_x m/(M + m) = -\cos\alpha\, g \cos\alpha(\tan\alpha - \mu)m/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$

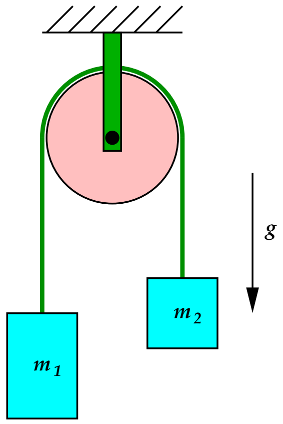
Przyśpieszenie ciężarka względem stołu:
$a_x = A_x + a'_x = \cos\alpha\, g \cos\alpha(\tan\alpha - \mu)M/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$
$a_y = a'_y$
Uwaga: Inne podejście do problemu można znaleźć w artykule
`http://xxx.lanl.gov/abs/physics/9808049`.

5 Bloczki, liny i ciężarki

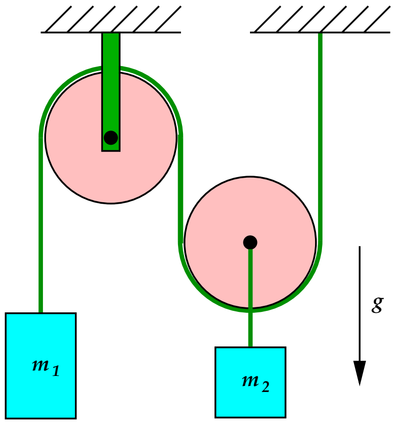
5.1 Bloczek w dwóch odsłonach

Dwa odważniki o masach m_1 oraz m_2 połączono nieważką, nierozciągliwą liną i przewieszono przez bloczek o promieniu R, który przymocowano do sufitu (układ przedstawiono na rysunku). Z jakim przyśpieszeniem będzie poruszać się odważnik o masie m_1, jeśli:
a) bloczek jest nieważki,
b) moment bezwładności bloczka względem jego osi obrotu wynosi I.
Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie.
Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $a_1 m_1 = m_1 g - T_1$ oraz $a_2 m_2 = m_2 g - T_2$.
a) W przypadku nieważkich liny i bloczka (zakładamy, że lina nie ślizga się po bloczku) można pokazać rowność $T_1 = T_2$ przynajmniej na dwa sposoby:
1) Z równania na ruch liny: $M_{L+B\ eff} a_L = T_1 - T_2$.
2) Z równania na ruch bloczka: $I_{L+B\ eff}\varepsilon_B = R(T_1 - T_2)$, gdzie R jest promieniem bloczka.
Ponieważ lina i bloczek są nieważkie, więc $M_{L+B\ eff} = 0$ oraz $I_{L+B\ eff} = 0$, co prowadzi do wniosku $T_1 = T_2 = T$.
Wiąz na długość liny: $x_1 + \pi R + x_2 = L$ =const. A więc: $a_1 = -a_2$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$.
b) Z równania dla bloczka $I\vec{\varepsilon} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$ mamy: $I\varepsilon = R(T_1 - T_2)$. Położenie ciężarka 1 możemy powiązać z kątem obrotu bloczka: $x_1 = R\alpha$. Prowadzi to do: $a_1 = R\varepsilon$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + I/R^2)$.



Rysunek do Zadania 5.1



Rysunek do Zadania 5.2

5.2 O tym, jak jeden może wciągnąć dwóch

Odważnik o masie m_1 przymocowano do nieważkiej, nierozciągliwej liny, którą przewieszono przez bloczek przyczepiony do sufitu. Na linę nawleczono następnie drugi bloczek z uwiązanym do jego osi odważnikiem o masie m_2. Koniec liny zaczepiono pod sufitem (układ przedstawiono na rysunku). Z jakim przyśpieszeniem będzie poruszać się odważnik o masie m_1, jeśli bloczki są nieważkie? Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie.
Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $a_1 m_1 = m_1 g - T$ oraz $a_2 m_2 = m_2 g - 2T$.
Wiąz na długość liny: $x_1 + \pi R + x_2 + \pi R + x_2 = L$ =const. A więc: $a_1 = -2a_2$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2/2)/(m_1 + m_2/4)$.

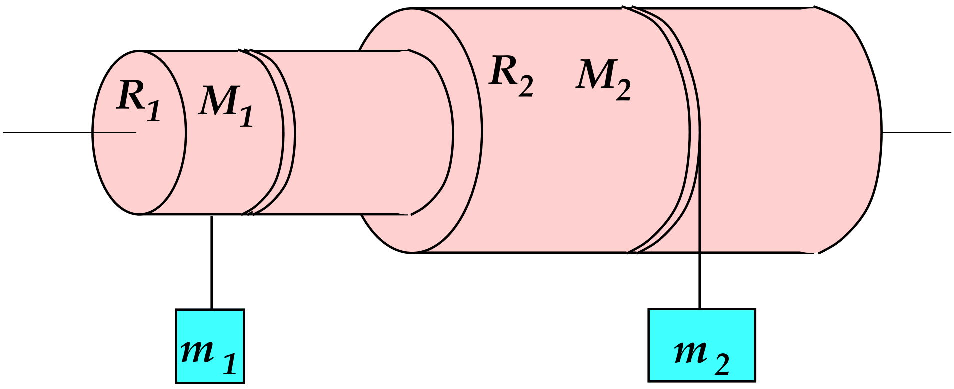
5.3 Małpa

Odważnik o masie M przymocowano do nieważkiej, nierozciągliwej liny, którą przewieszono przez bloczek przyczepiony do sufitu. Za swobodny koniec liny chwyciła małpa o masie m i wspina się. Jakim ruchem względem liny przemieszcza się małpa, skoro jej odległość od sufitu się nie zmienia? Obliczyć parametry tego ruchu. Bloczek jest nieważki, a układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie.
Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $AM = Mg - T$ oraz $am = mg - T$.
Wiąz na długość liny: $X + \pi R + x = L$, gdzie L jest długością liny miedzy odważnikiem a małpą. A więc przyśpieszenie małpy względem liny $a' \equiv \ddot{L} = A + a$.
Warunek zadania: $a = 0$, co oznacza, że: $a' \equiv \ddot{L} = A$
Odpowiedź: Ruch jednostajnie przyśpieszony z $a' = g(1 - m/M)$. Jeśli $m > M$, to rzeczywiście małpa się wspina.

5.4 Bloczek-dźwignia

Bloczek składający się z dwóch sztywno połączonych jednorodnych walców może obracać się dookoła własnej osi symetrii. Na walec o promieniu R_1 i masie M_1 nawinięto nierozciągliwy sznurek, do którego przymocowano ciężarek o masie m_1. W przeciwnym kierunku nawinięto na walec o promieniu R_2 i masie M_2 nierozciągliwy sznurek, do którego przymocowano ciężarek o masie m_2. Układ znajduje się w stałym jednorodnym polu grawitacyjnym. Obliczyć przyśpieszenie cieżarka o masie m_1.



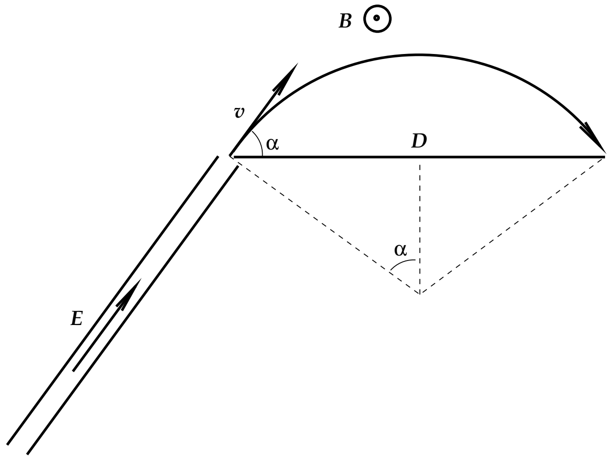
Rozwiązanie
Równania dla ciężarków:
$m_1 a_1 = m_1 g - T_1$
$m_2 a_2 = m_2 g - T_2$
Równanie dla układu walców:
$I\varepsilon = T_1 R_1 - T_2 R_2$,
gdzie $I = M_1 R_1^2/2 + M_2 R_2^2/2$
Równania więzów:
$a_1 = R_1 \varepsilon$
$a_2 = -R_2 \varepsilon$
Odpowiedź:
$a_1 = gR_1(m_1 R_1 - m_2 R_2)/(I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$

6 Ruch cząstki w polu elektrycznym i magnetycznym

6.1 Akcelerator, magnes i ekran

Początkowo spoczywającą cząstkę o dodatnim ładunku Q i masie m przyśpieszono za pomocą akceleratora o długości L. W akceleratorze wytwarzane jest jednorodne pole elektryczne E. Tuż za akceleratorem cząstka wleciała w obszar jednorodnego pola magnetycznego B. W jakiej odległości D od końca akceleratora cząstka uderzy w ekran? Kąt między osią akceleratora a płaszczyzną ekranu wynosi α. W wybranym układzie współrzędnych wektory pól są wyrażone następująco: $\vec{E} = E(\cos\alpha\hat{e}_x + \sin\alpha\hat{e}_y)$ i $\vec{B} = B\hat{e}_z$, równanie ekranu ma postać $y = 0$, a cząstka opuszczając akcelerator przelatuje przez początek układu współrzędnych.

Rozwiązanie.
Układ eksperymentalny:



W akceleratorze cząstka porusza się z przyśpieszeniem: $a = QE/m$. Na długości L uzyska prędkość $v = \sqrt{2QEL/m}$. W polu B będzie poruszać się po łuku o promieniu R wynikającym z równości: siła Lorenza = siła dośrodkowa, $mv^2/R = QvB$. A więc $R = mv/(QB)$.
Cząstka od wylotu z akceleratora do uderzenia w ekran będzie się poruszać po łuku o mierze kątowej 2α. Stąd $D = 2R\sin\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{2ELm/Q}/B$

6.2 Pola równoległe

Cząstka o ładunku Q i masie m, mając początkową prędkość $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$, wlatuje w obszar równoległych, jednorodnych pól: elektrycznego $\vec{E} = E\hat{e}_y$ i magnetycznego $\vec{B} = B\hat{e}_y$. Wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona równania na współrzędne położenia cząstki x i z rozwiązać po sprowadzeniu do jednego równania na zmienną zespoloną $f = \dot{x} + i\dot{z}$. Podać równanie ruchu cząstki zakładając, że w chwili początkowej przelatywała przez początek układu współrzędnych. Jaki warunek musi być spełniony, aby cząstka dotarła do ekranu, którego równanie ma postać $x = L$? Jaki obraz utworzą na ekranie cząstki o różnych wartościach v_{0x}, jeśli założyć, że odległość L jest mała w porównaniu z promieniem toru w płaszczyźnie XZ, tzn. $L \ll |v_{0x}m/(QB)|$?
Wskazówka: Obraz można znaleźć jako zależność $y(z)$ po zastosowaniu następujących przybliżeń dla $x(t)$ i $z(t)$: jeśli $\sin\alpha \ll 1$, to $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$.

Rozwiązanie.
Równanie ruchu, $m\ddot{\vec{r}} = Q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$, rozpisane na współrzędne:
$\ddot{x} = -\lambda\dot{z}$
$\ddot{y} = \kappa$
$\ddot{z} = \lambda\dot{x}$,

gdzie $\lambda = QB/m$ oraz $\kappa = QE/m$. Zakładam, że $t_0 = 0$. Rozwiązanie drugiego równania:
$y(t) = \kappa t^2/2 + v_{0y}t$.
Pierwsze i trzecie równanie sprowadza się do:
$\dot{f} = i\lambda f$,
którego rozwiązaniem uwzględniającym warunki początkowe jest:
$f = v_{0x}\exp(i\lambda t)$,
co odpowiada: $\dot{x} = v_{0x}\cos(\lambda t)$ oraz $\dot{z} = v_{0x}\sin(\lambda t)$. Całkując otrzymujemy:
$x(t) = (v_{0x}/\lambda)\sin(\lambda t)$
$z(t) = (v_{0x}/\lambda)(1 - \cos(\lambda t))$.
Warunek dotarcia do ekranu: $x(t) \geq L$, czyli $v_{0x}/\lambda \geq L$.
Cząstka dotrze do ekranu po czasie t_1: $L\lambda/v_{0x} = \sin(\lambda t_1) \approx \lambda t_1$ (zgodnie z warunkiem $L \ll |v_{0x}m/(QB)|$).
$t_1 = L/v_{0x}$
$z(t_1) \approx v_{0x}\lambda t_1^2/2 = \lambda L^2/(2v_{0x})$
$y(t_1) = \kappa t_1^2/2 + v_{0y}t_1 = \kappa L^2/(2v_{0x}^2) + v_{0y}L/v_{0x}$.
Eliminując v_{0x} otrzymujemy:
$y(z) = 2z[z\kappa/(\lambda L) + v_{0y}]/(\lambda L)$,
czyli równanie paraboli. Położenie jej ekstremum jest zależne od v_{0y}.

6.3 Pola prostopadłe

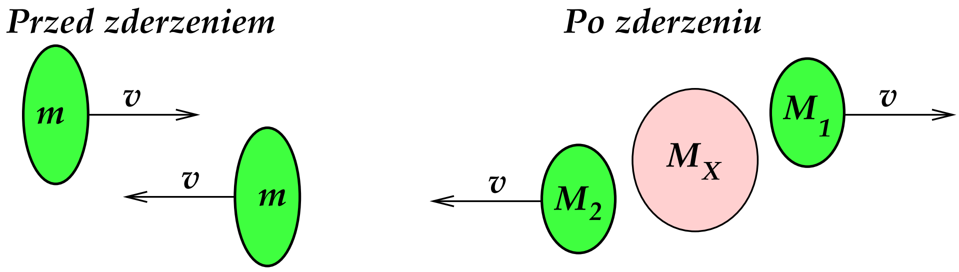
Cząstka o ładunku Q i masie m znajduje się w obszarze prostopadłych, jednorodnych pól: elektrycznego $\vec{E} = E\hat{e}_z$ i magnetycznego $\vec{B} = B\hat{e}_y$. Wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona równania na współrzędne położenia cząstki x i z rozwiązać po sprowadzeniu do jednego równania na zmienną zespoloną $f = \dot{x} + i\dot{z}$. Podać równanie ruchu cząstki zakładając, że w chwili początkowej wyruszała ona z początku układu współrzędnych z prędkością początkową $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$. Jakie warunki muszą być spełnione, aby torem cząstki była zwykła cykloida? Jakie warunki muszą być spełnione, aby cząstka poruszała się ruchem jednostajnym prostoliniowym? Jaka będzie wtedy jej prędkość?

Rozwiązanie.
Równanie ruchu, $m\ddot{\vec{r}} = Q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$, rozpisane na współrzędne:
$\ddot{x} = -\lambda\dot{z}$
$\ddot{y} = 0$
$\ddot{z} = \lambda\dot{x} + \kappa$,
gdzie $\lambda = QB/m$ oraz $\kappa = QE/m$. Zakładam, że $t_0 = 0$. Rozwiązanie drugiego równania:
$y(t) = v_{0y}t$.
Pierwsze i trzecie równanie sprowadza się do:
$\dot{f} = i\lambda f + i\kappa$,
którego rozwiązaniem uwzględniającym warunki początkowe jest:
$f = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\exp(i\lambda t) - \kappa/\lambda$,
co odpowiada: $\dot{x} = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\cos(\lambda t) - \kappa/\lambda$ oraz $\dot{z} = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\sin(\lambda t)$. Całkując otrzymujemy:
$x(t) = [(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda]\sin(\lambda t) - \kappa/\lambda t$,
$z(t) = [(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda](1 - \cos(\lambda t))$.
Przykład zwykłej cykloidy: $x = R[\sin(\omega t) - \omega t]$, $z = R[1 - \cos(\omega t)]$. A więc żądamy:
$\kappa/\lambda/[(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda] = \lambda$, po uproszczeniu: $v_{0x} = 0$.
Tor jest zwykłą cykloidą, gdy $v_{0x} = 0$ oraz $v_{0y} = 0$.
Cząstka będzie poruszała się ruchem jednostajnym prostoliniowym, gdy $v_{0x} = -\kappa/\lambda$ (pomijam przypadki zerowych pól, ładunku itp.). Jej prędkość w takim wypadku to $\vec{v} = -(\kappa/\lambda)\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$.

7 Szczególna teoria względności. Dynamika

7.1 Zderzenie dwóch jąder

Dwa jądra atomowe zbliżają się do siebie. Każde ma masę m i porusza się z prędkością v (kierunki prędkości są równoległe). Po zderzeniu obserwujemy dwa jądra o masach $M_1 = \frac{3}{4}m$ i $M_2 = \frac{1}{4}m$, które kontynuują ruch pierwotnych jąder (tzn. mają tę samą prędkość i kierunek co pierwotne jądra), oraz układ cząstek powstałych w zderzeniu, X. Obliczyć masę niezmienniczą układu X, M_X. Podać również wyrażenie na M_X w szczególnych przypadkach: a) $M_1 = M_2$ oraz b) $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}m$.
Uwaga: Zastanowić się, jaki jest kierunek wektora pędu układu X. Pominąć efekty związane z budową jądra.



Rozwiązanie.
Ze względu na zasadę zachowania pędu pęd układu X jest równoległy do wektora prędkości $\vec{v}$ – jest to problem jednowymiarowy. Jednostki: $c = 1$. Oznaczenia: $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$.
Sposób I „bezpośredni": Dodaję energie i pędy zderzających się fragmentów jąder
Energia: $E_X = \gamma(m - M_1) + \gamma(m - M_2)$.
Pęd: $P_X = v\gamma(m - M_1) - v\gamma(m - M_2)$.
Sposób II „pośredni": Odejmuję energie i pędy pozostałych fragmentów jąder od całkowitej energii i pędu
Energia przed zderzeniem: $E_{przed} = e + e$, gdzie $e = \gamma m$.
Energia po zderzeniu: $E_{po} = E_1 + E_2 + E_X$, gdzie $E_1 = \gamma M_1$ oraz $E_2 = \gamma M_2$.
Pęd przed zderzeniem: $p_{przed} = p_1 + p_2$, gdzie $p_1 = v\gamma m$ oraz $p_2 = -v\gamma m$.
Pęd po zderzeniu: $p_{po} = P_1 + P_2 + P_X$, gdzie $P_1 = v\gamma M_1$ oraz $P_2 = -v\gamma M_2$.
Z zasady zachowania energii, $E_{przed} = E_{po}$, otrzymuję $E_X = 2e - E_1 - E_2 = \gamma(2m - M_1 - M_2)$.
Z zasady zachowania pędu, $p_{przed} = p_{po}$, otrzymuję $P_X = p_1 + p_2 - P_1 - P_2 = v\gamma(-M_1 + M_2)$.
Odpowiedź
Masa niezmiennicza układu X wynosi

$$M_X = (E_X^2 - P_X^2)^{1/2} = \gamma[(2m - M_1 - M_2)^2 - v^2(M_1 - M_2)^2]^{1/2}.$$

Jeśli $M_1 = \frac{3}{4}m$ i $M_2 = \frac{1}{4}m$, to otrzymuję $M_X = \gamma[1 - v^2/4]^{1/2}$.
a) Dla $M_1 = M_2$ otrzymuję $M_X = \gamma 2(m - M_1)$.
b) Dla $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}m$ otrzymuję $M_X = \gamma m$.

7.2 Wiązki takich samych cząstek o różnych energiach

Jedna wiązka składa się w cząstek o masie m i energii E_1. Drugą wiązkę, zawierającą cząstki o masie m i energii E_2 można ustawiać pod dowolnym kątem względem pierwszej wiązki. W zderzeniach cząstek chcemy produkować rezonanse o masach większych od M. Podaj ograniczenia na względny kąt wiązek.

7.3 Wiązki różnych cząstek o takich samych energiach

Jedna wiązka składa się w cząstek o masie m_1 i energii E. Drugą wiązkę, zawierającą cząstki o masie m_2 i energii E można ustawiać pod dowolnym kątem względem pierwszej wiązki. W zderzeniach cząstek chcemy produkować rezonanse o masach większych od M. Podaj ograniczenia na względny kąt wiązek.

8 Szczególna teoria względności. Kinematyka

8.1 Pomiar długości rakiety

Dwie rakiety A i B poruszają się w tym samym kierunku z prędkościami v_A i v_B w układzie związanym z nieruchomą gwiazdą. Długość rakiety A w jej układzie spoczynkowym wynosi L. Ile wynosi długość rakiety A w układzie związanym z rakietą B? Otrzymany wzór sprawdzić w szczególnych przypadkach: a) $v_B = 0$, b) $v_B = v_A$.

Rozwiązanie.

Konwencja: *Wielkość*$_{\textit{Obiekt}}$ w *Układ*

G - nieruchoma gwiazda

Sposób I.

$L = \Delta x_{AwA} = \gamma_{AwG}(\Delta x_{AwG} - v_{AwG}\Delta t_{AwG})$

Chcemy $\Delta t_{AwB} = 0$, więc $\Delta x_{AwG} = \gamma_{BwG}\Delta x_{AwB}$ oraz $\Delta t_{AwG} = \gamma_{BwG}(v_{BwG}/c^2)\Delta x_{AwB}$.

$L = \Delta x_{AwA} = \gamma_{AwG}\gamma_{BwG}(1 - v_{AwG}v_{BwG}/c^2)\Delta x_{AwB}$, ale $\Delta x_{AwB} = L_{AwB}$ jest szukaną długością.

Długość rakiety A mierzona w układzie rakiety B wynosi ($v_{AwG} = v_A$, $v_{BwG} = v_B$, $\beta_X = v_X/c$):

$$L_{AwB} = L\sqrt{1-\beta_A^2}\sqrt{1-\beta_B^2}/(1-\beta_A\beta_B).$$

a) Jeśli $v_B = 0$, to $L_{AwB} = L\sqrt{1-\beta_A^2}$

b) Jeśli $v_B = v_A$, to $L_{AwB} = L$

Sposób II.

$v_{AwB} = (v_{AwG} - v_{BwG})/(1 - v_{AwG}v_{BwG}/c^2)$

$$L_{AwB} = L\sqrt{1-\beta_{AwB}^2} = L\sqrt{1-\beta_A^2}\sqrt{1-\beta_B^2}/(1-\beta_A\beta_B)$$

8.2 Rakieta i pocisk lub kapsuła

Wersja militarna:

Samolot leci z prędkością v_S. W odległości L od celu wystrzeliwuje pocisk, którego prędkość względem samolotu wynosi v'_P. Jaki interwał czasu T' należy ustawić na zapalniku czasowym umieszczonym w pocisku, aby eksplozja jego ładunku nastąpiła w chwili osiągnięcia celu? Wielkości L i v_S są mierzone względem nieruchomego układu związanego z celem ataku. Otrzymany wzór sprawdzić w szczególnym przypadku $v'_P = 0$.

Wersja cywilna:

Rakieta leci z prędkością v_S. W odległości L od moskiego brzegu, oddziela się od rakiety kapsuła, której prędkość względem rakiety wynosi v'_P. Kapsuła porusza się w tym samym kierunku co rakieta. Jaki interwał czasu T' należy ustawić automatycznemu pilotowi kapsuły, aby procedurę lądowania zainicjował już nad morzem? Wielkości L i v_S są mierzone względem nieruchomego układu związanego z brzegiem morza. Otrzymany wzór sprawdzić w szczególnym przypadku $v'_P = 0$.

Rozwiązanie.

Sposób I.

Konwencja: *Wielkość*$_{Obiekt}$ w *Układ*

S - samolot lub rakieta

P - pocisk lub kapsuła

Z - nieruchomy układ związany z brzegiem morza (np. Ziemia)

$L = \Delta x_{PwZ} = \gamma_{SwZ}(\Delta x_{PwS} + v_{SwZ}\Delta t_{PwS})$

Mamy $\Delta x_{PwP} = 0$, więc $\Delta x_{PwS} = \gamma_{PwS} v_{PwS}\Delta t_{PwP}$ oraz $\Delta t_{PwS} = \gamma_{PwS}\Delta t_{PwP}$.

$L = \Delta x_{PwZ} = \gamma_{SwZ}\gamma_{PwS}(v_{PwS} + v_{SwZ})\Delta t_{PwP}$, ale $\Delta t_{PwP} = T'$ jest szukanym interwałem czasu.

Automatycznemu pilotowi kapsuły należy ustawić interwał czasu ($v_{SwZ} = v_S$, $v_{PwS} = v'_P$, $\beta_S = v_S/c$, $\beta'_P = v'_P/c$):

$$T' = \Delta t_{PwP} = L\sqrt{1-\beta_S^2}\sqrt{1-\beta_P'^2}/(v_S + v'_P).$$

Jeśli $v'_P = 0$, to $T' = \Delta t_{PwP} = L\sqrt{1-\beta_S^2}/v_S$.

Sposób II.

$v_{PwZ} = (v_{SwZ} + v_{PwS})/(1 + v_{SwZ}v_{PwS}/c^2)$

$T' = \Delta t_{PwP} = \Delta t_{PwZ}\sqrt{1-\beta_{PwZ}^2}$

Czas przelotu pocisku w układzie Z: $\Delta t_{PwZ} = L/v_{PwZ}$.

$\sqrt{1-\beta_{PwZ}^2} = \sqrt{1-\beta_{SwZ}^2}\sqrt{1-\beta_{PwS}^2}/(1 + \beta_{SwZ}\beta_{PwS})$

$$T' = \Delta t_{PwP} = L\sqrt{1-\beta_S^2}\sqrt{1-\beta_P'^2}/(v_S + v'_P).$$

8.3 Pościg za rakietą

Z kosmodromu startuje rakieta A z prędkością v_A. Po czasie T rakieta B wysyła sygnał świetlny i wyrusza z kosmodromu z prędkościa v_B w tym samym kierunku, co pierwsza rakieta. Jaki interwał czasu zmierzą astronauci w rakiecie B od własnego startu do odebrania odbitego od rakiety A sygnału świetlnego? Podaj wynik również dla szczególnych przypadków: a) $v_A = v_B$ oraz b) $v_A = v_B = c/3$. Wielkości v_A, v_B oraz T są mierzone w układzie związanym z kosmodromem.

8.4 Awaria rakiety i wyprawa ratunkowa

Z Ziemi wyrusza rakieta lecąca z prędkością $c/2$. Po 10 dniach rakieta ulega awarii. Załoga wysyła sygnał świetlny z prośbą o pomoc. Po otrzymaniu wiadomości centrum lotów na Ziemi natychmiast wysyła rakietę ratunkową. Z jaką szybkością v powinna się ona poruszać, aby uratować załogę pierwszej z rakiet, w której astronauci mogą utrzymać się przy życiu przez 30 dni od awarii?

Rozwiązanie

Konwencja: *Wielkość*$_{Obiekt/Wydarzenie}$ w *Układ*

Z - Ziemia

R - pierwsza rakieta

A - awaria R

I - dotarcie informacji

C - czekanie na pomoc

P - druga rakieta („Pomoc”)

S - spotkanie R i P
Dane: $v_{RwZ} = c/2$; $t_{AwR} = 10$ dni; $\Delta t_{CwR} = 30$ dni
Szukamy v_{PwZ}.

$$v_{PwZ} = \frac{x_{SwZ}}{\Delta t_{PwZ}}$$

Przejście z układu *R* do *Z*: $x_{SwZ} = \gamma_{RwZ}(x_{SwR} + v_{RwZ}t_{SwR})$. Ale $x_{SwR} = x_{RwR} = 0$, więc: $x_{SwZ} = \gamma_{RwZ}v_{RwZ}t_{SwR}$.
Wiemy, że $t_{SwR} = t_{AwR} + \Delta t_{CwR}$. Obliczyliśmy więc x_{SwZ}.
Obliczmy Δt_{PwZ}, czyli czas lotu *P*.
$x_{AwZ} = \gamma_{RwZ}(x_{AwR} + v_{RwZ}t_{AwR})$
Ale $x_{AwR} = x_{RwR} = 0$. Tak więc $x_{AwZ} = \gamma_{RwZ}v_{RwZ}t_{AwR}$.
Można już obliczyć czas Δt_{IwZ} potrzebny na dotarcie wezwania z miejsca *A* do *Z* w układzie *Z*: $\Delta t_{IwZ} = x_{AwZ}/c$.
Okres oczekiwania w układzie Z: $\Delta t_{CwZ} = \gamma_{RwZ}(\Delta t_{CwR} + v_{RwZ}\Delta x_{CwR}/c^2)$. Ale $\Delta x_{CwR} = \Delta x_{RwR} = 0$.
Ostatecznie:

$$\Delta t_{PwZ} = \Delta t_{CwZ} - \Delta t_{IwZ} = \gamma_{RwZ}(\Delta t_{CwR} - v_{RwZ}t_{AwR}/c)$$

$$v_{PwZ} = \frac{x_{SwZ}}{\Delta t_{PwZ}} = \frac{v_{RwZ}(t_{AwR} + \Delta t_{CwR})}{\Delta t_{CwR} - v_{RwZ}t_{AwR}/c}$$

Podstawiając wartości otrzymujemy odpowiedź:

$$v_{PwZ} = c/2\frac{10+30}{30-10/2} = \frac{4}{5}c$$

8.5 Fotografia pręta

Równoległy do osi Y pręt porusza się wzdłuż osi X z prędkością v. Fotografujemy pręt aparatem znajdującym się w punkcie $x = y = 0$, $z = a$. Na zdjęciu środek pręta znajduje się w początku układu współrzędnych. Jaki jest kształt pręta na fotografii?

Rozwiązanie

Zakładamy, że na zdjęciu widzimy obraz utworzony przez promienie świetlne, które dotarły do kliszy w chwili t_K.
Dla każdego punktu pręta $\vec{r}_P(t)$, który w chwili t wysłał promień światła musi być spełniony warunek:

$$t_K = |\vec{r}_P(t) - \vec{r}_K|/c + t,$$

gdzie $\vec{r}_K = [0, 0, a]$ jest wektorem położenia kliszy (zaniedbujemy jej rozmiary).
Opis pręta: $\vec{r}_P(t) = [vt, y, 0]$ z warunkiem $y \in [-D, D]$ dla skończonego pręta o długości $2D$.
Na zdjęciu środek pręta przekracza punkt $x = 0$, $y = 0$. Zakładamy, że promień świetlny ze środka pręta był wysłany w chwili $t = 0$. Z tego wyznaczamy t_K: $t_K = a/c$
Równanie przybiera postać:

$$a - ct = \sqrt{(vt)^2 + y^2 + a^2}$$

Ponieważ interesuje nas tylko obraz, eliminujemy czas wykorzystując równanie ruchu pręta: $t = x/v$.

$$a - x/\beta = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$$

gdzie $\beta = v/c$. Jest to już równanie opisujące obraz uzyskany na kliszy. Staramy się je uprościć i sprawdzić, czy nie jest to jakaś znana nam krzywa. Podnosimy do kwadratu i mnożymy przez β^2:

$$x^2 - 2ax\beta = \beta^2(x^2 + y^2)$$

$$x^2 - 2xa\beta\gamma^2 - (\beta\gamma y)^2 = 0,$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Zbieramy wyrazy z x w kwadrat i dzielimy przez $(a\beta\gamma^2)^2$:

$$\frac{(x - a\beta\gamma^2)^2}{(a\beta\gamma^2)^2} - \frac{y^2}{(a\gamma)^2} = 1.$$

Jest to równanie hiperboli o asymptotach: $y = \pm(x/\beta\gamma - a\gamma)$.