

Origin of the W, Z masses and of $\rho_0 = 1$

1. We need additional interactions, with some global symmetry, which is spontaneously broken; we get then Goldstone bosons
2. Higgs mechanism
 - a) with a scalar
 - b) without a scalar

Prototype : scalar field theory
with $U(1)$ symmetry

$\phi(x)$ - complex scalar field

$\phi'(x) = e^{-iq\Theta} \phi(x)$ is
a symmetry transformation

The charge q is a constant
of motion

We can define a basis of real fields

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi(x) + \phi^*(x)) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \phi$$

$$\chi(x) = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\phi(x) - \phi^*(x)) = \sqrt{2} \operatorname{Im} \phi$$

Gęstość lagrangianu, która spełnia
 równanie Lorentzowskiej niezmienniczości
 i niezmienniczości wpr. transformacji
 $U(1)$ ma postać (przy $\hbar = c = 1$)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{2} \lambda (\phi \phi^*)^2 - \frac{1}{3 m_1^2} (\phi \phi^*)^3 + \dots = T - V$$

Pamiętamy, że $[\mathcal{L}] = [E]^4$. Stąd
 wynika (~~z wymiarowości~~) $[\phi] = [E]$

i widacie współczynniki m^2 , m_1^2
muszą mieć wymiar $[E]^2$ a

λ jest bezwymiarową stałą. Uwaga:

w kwantowej teorii pola jest
zasadnicza różnica między człościami
w których stałe o wymiarze energii
pojawiają się w mianowniku a
w liczniku człościami

Wprowadzamy $\sim$ - mchu (wartość)
 ϕ i ϕ^* są nieskalare bo mamy
 dwa stopnie swobody - $\text{Re } \phi$, $\text{Im } \phi$

$$(\square + m^2) \phi = -\lambda \phi \phi^* \phi - \frac{1}{m_i^2} (\phi \phi^*)^2 \phi$$

+ - .

~~Wprowadzamy dodatkowy term i otrzymujemy równanie~~
~~wektora bo nie zachowamy przed~~
 $U(1)$:

$$j_\mu(x) = i q (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*)$$

Spontaneous ^rbreaking symmetry $U(1)$
w teorii skalarniej: szukamy
minimum potencjału

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0$$

$$V = m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{2} \lambda (\phi \phi^*)^2 + \dots$$

Dla $m^2 > 0$ minimum istnieje dla
 $\phi = \phi^* = 0$ i m^2 ma interpretację
masy cząstek (np. patrzeć na r.k-l i
 $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$)

Zakładamy jednak, że $m^2 < 0$!

(ograniczymy się tylko do członów z m^2 i λ)

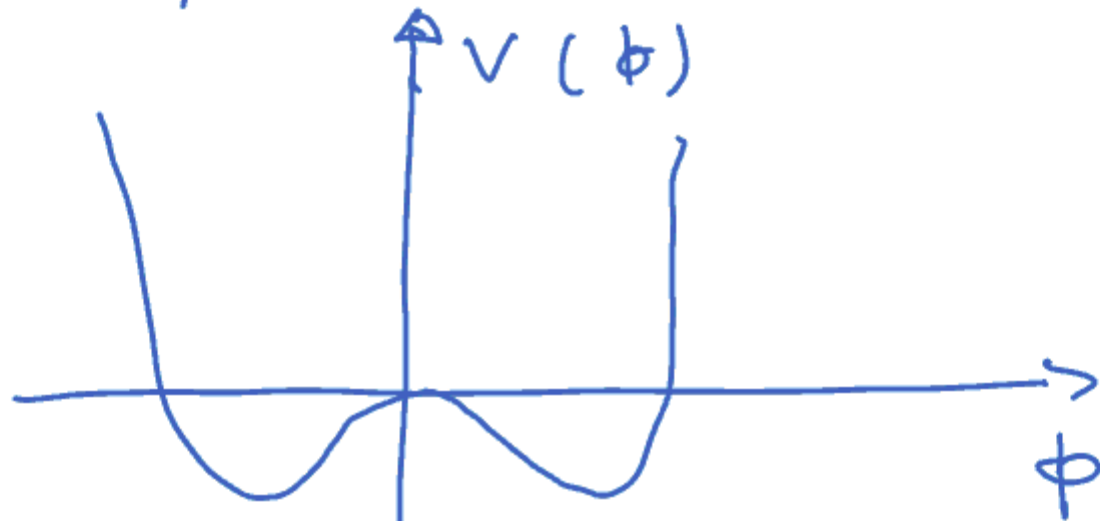
0 try mający minimum dla

$$\phi_0(\theta) = e^{i\theta} \left(\frac{-m^2}{\lambda} \right)^{1/2}$$

[λ musi być dodatnie bo w przeciwnym razie energia potencjału nie jest ograniczona od dołu]

Mamy także $V(\phi_0) = - \frac{m^4}{2\lambda}$!

Zależności potencjału od wartości ϕ jest więc taka:



Widzi więc, że stan podstawowy nie ma symetrii $U(1)$. Rzeczywiście, potencjał ma minimum dla nieskończonego zbioru zdegenerowanych stanów powię-
zonych

ze sobą transformujemy $U(1)$

~~Próbujemy przekształcić~~

Żeby zdefiniować teorię, musimy jakoś
przebrać wybór jednego z tych
"przebiegów" i symetria $U(1)$ jest
naruszona przez ten wybór.

Jaka jest fizyczna interpretacja
takiej teorii i parametr $m^2 < 0$?

Wybieramy przebieg np. z $\theta = 0$ i
rozwinąć lagrangian wokół tej przebiegu

to znaczy przepisujemy go w funkcji
pól $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \phi_0$

Wygadnij to zrobić konstantę z
pól rzeczywistych ϕ, χ . Poza tym,
konstantę z tego, że energia potencjału
jest zdefiniowana z dokładnością do stałej,
zaczniemy od lagrangianu

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \lambda (\phi^* \phi + m^2/2\lambda)^2$$

z którego od razu widać, gdzie jest minimum.

Many more (say $\theta = 0$)

$$\varphi_0 \equiv v = \left(-\frac{m^2}{\lambda} \right)^{1/2} \quad \chi_0 = 0$$

i pole fjerne to

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0, \quad \tilde{\chi} = \chi$$

Dla pol fazy jest symetryczny

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) - v^2 \lambda \varphi^2 \\ - \frac{1}{4} \lambda (\varphi^2 + \chi^2)^2 - \lambda \varphi v (\varphi^2 + \chi^2)$$

(opisujemy "tilds")

Interesujące wnioski: dla pól
feynman, zdefiniowany jako rozmiarek
world "próby", otrzymujemy teorię
dla dwóch pól, z których jedno jest
bezmasowe (X)! Jest to tzw.
boson Goldstone'a

Drugie pole jest polem z masą, także
że $[mass]^2 > 0$ oczywiście. Mamy

$$m_\varphi^2 = \lambda v^2 = -m^2$$

χ - Goldstone boson

Interesting property (in quantum field theory) of the matrix element

$$\langle 0 | j_\mu(x) | \chi \rangle$$

$j_\mu(x)$ is in this case the current of the broken symmetry. Indeed,

One can calculate: $j_\mu(x) = i v \partial_\mu \chi + \dots$

Thus $\langle 0 | j_\mu(x) | \chi \rangle =$

$$\approx \langle 0 | v \partial_\mu \chi | \chi \rangle \sim v k_\mu e^{-ikx}$$

Physical interpretation: a Goldstone boson can annihilate into the vacuum because the vacuum is a reservoir of quantum charges carried by the Goldstone boson

Another parametrisation of the complex field (Kibble) :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{\eta(x)}{v}} (v + \rho(x))$$

In terms of η, ρ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} \partial_\mu \zeta \partial^\mu \zeta \left(1 + \frac{\rho}{v}\right)^2 \\ & - \frac{1}{2} m^2 \rho^2 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 - v \lambda \rho^3 \end{aligned}$$

Important : in this parametrisation
we see the so-called shift
symmetry of the Lagrangian

$$\eta(x) \rightarrow \eta(x) + \Theta,$$

which is in one-to-one correspondence
with the original $U(1)$ phase symmetry;

Its linear realisation on ϕ is
replaced by a shift on the massless
 η field

Another important property:
 η has no potential and its
interactions can be written as

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = - \frac{1}{v} \eta(x) \partial_\mu j^\mu(x) \quad (*)$$

where

$$j^\mu = -v \left(1 + \frac{S(x)}{v} \right)^2 \partial^\mu \xi$$

(*) is obtained after integration by
parts

Higgs mechanism

Suppose I have a theory of fermions with local $U(1)$ symmetry.

It implies the existence of a gauge field $A_\mu(x)$ and, suppose, I would like to make it massive but preserving the gauge invariance of the Lagrangian

Add then a scalar sector with a spontaneously broken global $U(1)$ and couple it to the gauge field in a gauge invariant way

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{\eta(x)}{v}} (v + \rho(x))$$

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig A_\mu \phi$$

Gauge invariant lagrangian
reads

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi + \frac{m^2}{2\lambda} \right)^2$$

We perform gauge transformation

$$\Phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\eta(x)}{v}} (v + \rho(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \rho(x))$$

and $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g v} \partial_\mu \eta(x)$; $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ is gauge invariant

~~Wprowadzamy transformację przesłania~~

~~$\phi(x) \rightarrow A_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \chi(x)$~~

otrymujemy

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi +$$

$$+ \frac{1}{2} g^2 (\varphi + v)^2 \underline{A_\mu^\alpha A^{\alpha\mu}} - \frac{1}{4} \lambda^2 (\varphi^2 + 2\varphi v)^2$$

gdzie

~~$\varphi = \varphi(x)$~~

Po ustaleniu cechowania (unitarnego) dostaliśmy
żądany wynik :

1) Bózon A_μ ("foton") dostaje
masę $\frac{1}{2} g^2 v^2$

2) pozostające zostało pole η !

3) pole ρ ma $(\text{masa})^2 = (2\lambda v^2)$

Stopień swobody η zostaje "związany"
na pojawienie się trzeciej fizycznej
składowej polaryzacyjnej pola A_μ (wektorowe
cząstka z masą)

Another view at the Higgs mechanism

Our model :

$$\mathcal{L} \sim -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}\cancel{D}_{\mu}\Psi + \text{scalar sector}$$

gauge invariant fermion theory

$$\bar{\Psi}\cancel{D}_{\mu}\Psi \rightarrow ig_4 A_{\mu}j^{\mu}$$

$$\begin{aligned} &(\cancel{D}_{\mu}\phi)^{\dagger}(\cancel{D}_{\mu}\phi) \rightarrow \\ &\rightarrow ig A_{\mu}j^{\mu}_{\phi} + \text{--- required by gauge invariance} \end{aligned}$$

We remember that the scalar $U(1)$ current is (we do not need kibble parenth)

$$\begin{aligned} j_\mu^\sim &\sim \phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^\dagger = \\ &= v \partial_\mu \chi + \dots \\ &\quad \rightarrow \text{Goldstone boson} \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_\mu^\sim | \chi \rangle &= \langle 0 | v \partial_\mu \chi | \chi \rangle = \\ &= v k_\mu e^{-ikx} \end{aligned}$$

Take now the relevant part
of the Fourier transform of the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu k^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) A_\nu + i g f_{\mu\nu} A^\mu - i g f_{\mu\nu}^\dagger A^\mu + \dots$$

(All objects are Fourier transforms;
the Lagrangian is written in the

Lorentz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$)

$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ is the projection
operator on the
transverse space.

$$P_{\mu\rho} P_{\rho\nu} = P_{\mu\nu}$$

Free gauge field propagator is the inverse of the quadratic action

$$k^2 P_{\mu\nu} D^{\nu\lambda} = P_{\mu\lambda}$$

$$D^{\nu\lambda} = \frac{1}{k^2} P^{\nu\lambda}$$

~~~~~  $\langle 0 | A_{\mu}^{(0)} A_{\nu}^{(0)} | 0 \rangle = D_{\mu\nu}$

With interactions, the classical equation of motion for  $A_\mu$  is

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = k^2 P_{\mu\nu} A^\nu - g j^\mu_\Phi + \dots = 0$$

(This is the first order approximation in quantum field theory)

Hence  $A_\mu = A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)}$  where

$$A_\mu^{(1)} = \frac{g}{k^2} P_{\mu\nu} j^\nu_\Phi + \dots$$

The gauge field propagator then reads:

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | (A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)}) (A_\nu^{(0)} + A_\nu^{(1)}) | 0 \rangle = \\
 & = \langle 0 | A_\mu^{(0)} A_\nu^{(0)} | 0 \rangle + \langle 0 | A_\mu^{(1)} A_\nu^{(1)} | 0 \rangle = \\
 & = D_{\mu\nu} + \frac{P_{\mu\sigma}}{k^2} g^2 \underbrace{\langle 0 | j^\sigma j^\nu | 0 \rangle}_{\text{this is called a vacuum polarization tensor}} \frac{P_{\nu\lambda}}{k^2}
 \end{aligned}$$

this is called a vacuum polarization tensor

$$\Pi^{\sigma\nu}(k)$$

$$\Pi^{\rho\sigma}(k) = (g^{\rho\sigma} k^2 - k^\rho k^\sigma) \Pi(k^2)$$

This structure is fixed by Lorentz covariance and gauge invariance

We remember that the Goldstone boson contributes

$$g^2 < 0 | j_\Phi^\rho | \chi \rangle \langle \chi | j_\Phi^\sigma | 0 \rangle = k^\rho k^\sigma g^2 v^2 / k^2$$

$$\text{Hence } \Pi(k^2) = \frac{g^2 v^2}{k^2}$$

comes from the propagator of  $\chi$

Diagrammatically

$$\text{---} + \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---}$$

$i \Pi^{\mu\nu}(k)$

+ (in higher orders)

$$\text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} \textcircled{\text{---}} \textcircled{\text{---}} \text{---}$$

The full gauge boson propagator is

$$G_{\mu\nu} = \frac{-iP_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{(-iP_{\mu\rho})}{k^2} i\Pi^{\rho\sigma}(k) \frac{(-iP_{\sigma\nu})}{k^2} =$$

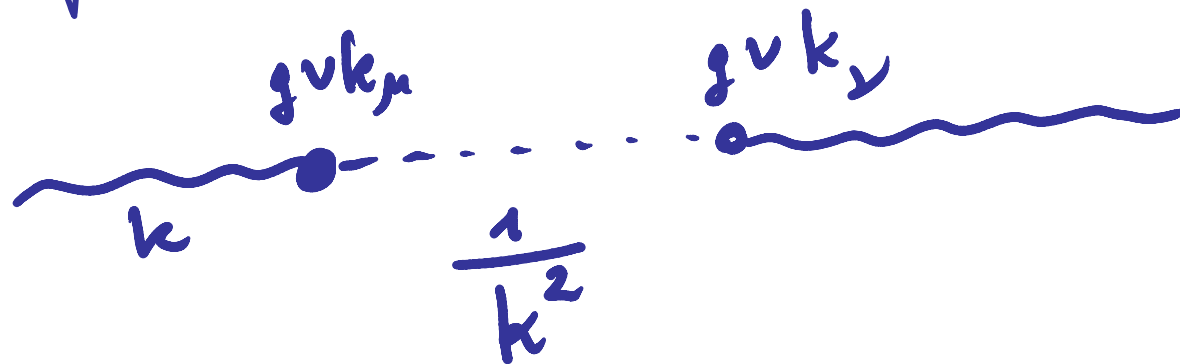
$$= \frac{-iP_{\mu\nu}}{k^2} (1 + \Pi(k^2)) \text{ (in one loop)}$$

Summing up the whole series we get

$$G_{\mu\nu} = \frac{-iP_{\mu\nu}}{k^2(1 - \Pi(k^2))} = \frac{-iP_{\mu\nu}}{k^2 - g^2 v^2}$$

We get the following result :

if the gauge bosons couple to the Noether currents of a spontaneously broken global symmetry, then the exchange of Goldstone bosons gives them a mass



This formulation is much more general than the one based on a scalar sector. It admits more general theories as an origin of the Goldstone bosons (e.g. technicolour like theories)