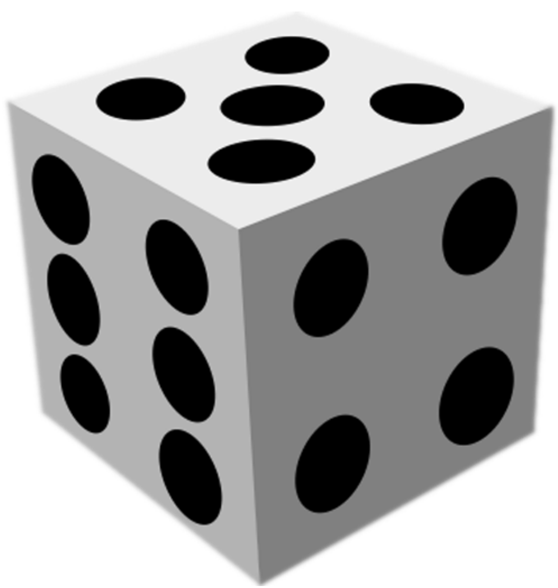
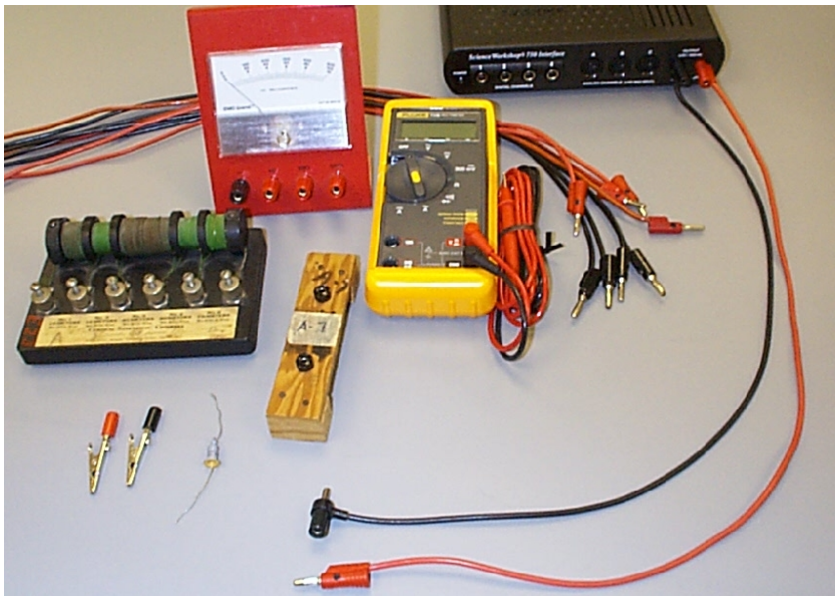
Zmienna losowa

- <u>Intuicyjnie</u>: zmienna, która konkretną wartość przyjmuje dopiero w chwili wykonania pomiaru lub eksperymentu





Zmienna losowa

- Bardziej formalnie: funkcja, która **zdarzeniom elementarnym** przyporządkowuje wyniki pomiaru lub eksperymentu

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- Ω to zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli wszystkich możliwych przebiegów eksperymentu —

  każde $\omega \in \Omega$ jest tak samo „prawdopodobne”

Zmienna losowa dyskretna

- Zmienną losową nazywamy dyskretną, jeśli da się ją opisać przez funkcję (masy) prawdopodobieństwa, np.

wartość	prawdopodobieństwo (pmf)
0	0.2
1	0.3
2	0.3
3	0.2

- Na podstawie p.m.f. możemy zdefiniować rozkład prawdopodobieństwa

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} pmf(x)$$

Zmienna losowa dyskretna

- Zmienną losową nazywamy dyskretną, jeśli da się ją opisać przez funkcję (masy) prawdopodobieństwa, np.

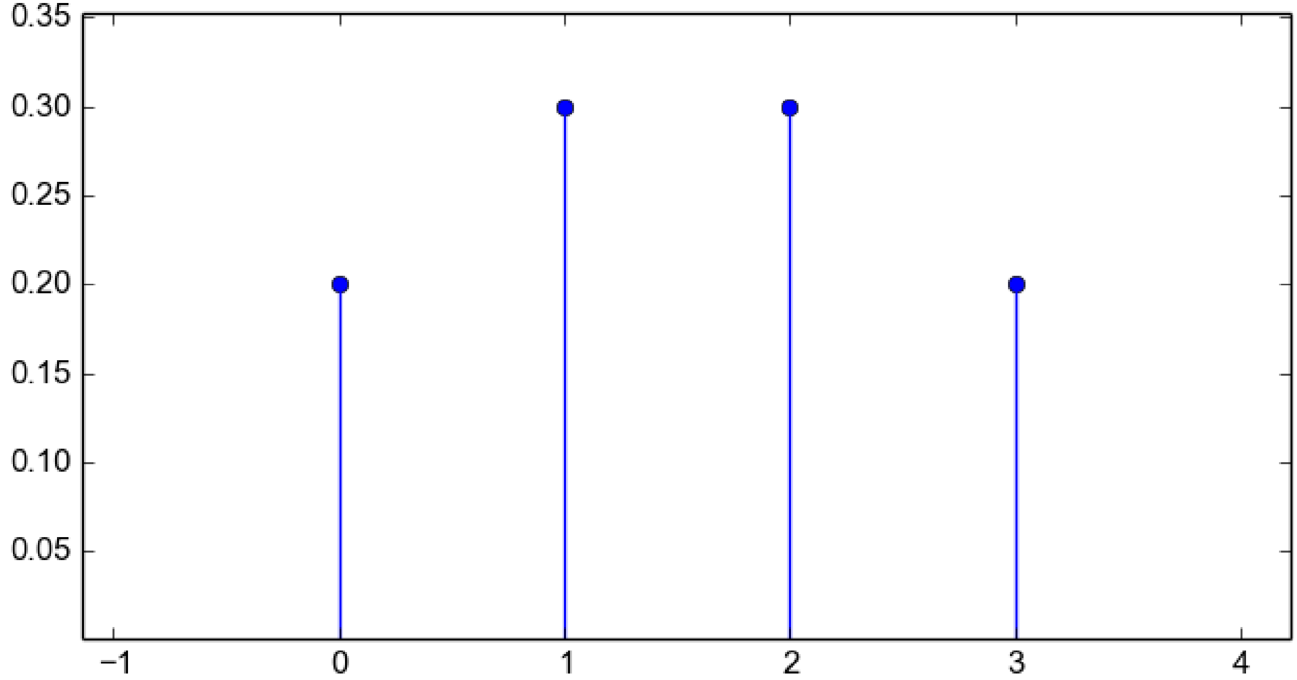
wartość	prawdopodobieństwo (pmf)
0	0.2
1	0.3
2	0.3
3	0.2

- Funkcja masy prawdopodobieństwa jest <u>zawsze</u> znormalizowana, czyli

$$P_X(\mathbb{R}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} pmf(x) = 1$$

Zmienna losowa dyskretna

- Funkcję (masy) prawdopodobieństwa możemy też narysować:



$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} pmf(x)$$

Zmienna losowa ciągła

- Zmienną losową nazywamy ciągłą, jeśli da się ona opisać przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$, taką, że
$$P_X(A) = \int_{x \in A} f_X(x)\, dx$$

Uwaga: dla zbiorów A miary 0 (np. skończonych) i zmiennych ciągłych $P_X(A) = 0$

- Funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest zawsze znormalizowana, czyli
$$P_X(\mathbb{R}) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

Zmienna losowa ciągła

- Przykład: losujemy liczbę rzeczywistą z zakresu od 0 do 2

Zmienna losowa ciągła

- Przykład: losujemy liczbę rzeczywistą z zakresu od 0 do 2, wtedy
  - $f(x) = c$ na przedziale $[0;2]$
  - $f(x) = 0$ poza tym przedziałem

Zmienna losowa ciągła

- Przykład: losujemy liczbę rzeczywistą z zakresu od 0 do 2, wtedy
  - $f(x) = ½$ na przedziale [0;2]
  - $f(x) = 0$ poza tym przedziałem
- Jest to tzw. rozkład jednostajny ciągły (ang. *uniform distribution*) na przedziale [0;2]
- <u>Nośnikiem</u> tego rozkładu jest zbiór [0;2]

Zmienna losowa ciągła

- Przykład: losujemy liczbę rzeczywistą z zakresu od *a* do *b*, wtedy
  - f(x) = 1/(*b*−*a*) na przedziale [*a*;*b*]
  - f(x) = 0 poza tym przedziałem

- Jest to tzw. rozkład jednostajny ciągły (ang. *uniform distribution*) na przedziale [*a*;*b*]

- <u>Nośnikiem</u> tego rozkładu jest przedział [*a*;*b*]

Dystrybuanta

- Zarówno dla zmiennej losowej ciągłej, jak i dyskretnej, możemy zdefiniować dystrybuantę

$$F_X(x_0) = P_X((-\infty, x_0]) = P(X \le x_0)$$

- Dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$F_X(x_0) = \sum_{x \le x_0} pmf_X(x)$$

- Dla zmiennej losowej ciągłej:

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\, dx$$

Dystrybuanta c.d.

- Cechy dystrybuanty:
  - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
  - $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  - <u>prawo</u>stronna ciągłość: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$
  - monotoniczność (jest niemalejąca)

Dystrybuanta c.d.

- Na podstawie dystrybuanty możemy obliczyć:
  - Dla zmiennej losowej dyskretnej, funkcję (masy) prawdopodobieństwa:

$$pmf_X(x_0) = P(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F_X(x)$$

  - Dla zmiennej losowej ciągłej, funkcję gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x_0) = \frac{dF_X}{dx}(x_0)$$

Przykład

- Dyskretna zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję (masy) prawdopodobieństwa

wartość	prawdopodobieństwo (pmf)
0	0.2
1	0.3
2	0.3
3	0.2

- Ile wynosi dystrybuanta tego rozkładu prawdopodobieństwa?

Przykład

- Dyskretna zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję (masy) prawdopodobieństwa

wartość	prawdopodobieństwo (pmf)
0	0.2
1	0.3
2	0.3
3	0.2

- Ile wynosi dystrybuanta tego rozkładu prawdopodobieństwa?

$$F_X(x_0) = \sum_{x \le x_0} pmf_X(x)$$

Przykład – rozkład jednostajny

- Ciągła zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

  oraz 0 poza przedziałem [a; b]

- Ile wynosi dystrybuanta tego rozkładu prawdopodobieństwa?

Przykład – rozkład jednostajny

- Ciągła zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

  $$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

  oraz 0 poza przedziałem [a; b]

- Ile wynosi dystrybuanta tego rozkładu prawdopodobieństwa?

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx$$

Przykład – rozkład wykładniczy

- Ciągła zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- Ile wynosi dystrybuanta tego rozkładu prawdopodobieństwa?

Przykład – rozkład wykładniczy

- Ciągła zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$

- Ile wynosi dystrybuanta tego rozkładu prawdopodobieństwa?

$$F_X(x_0)=\int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx$$

Wartość oczekiwana

- Wartością oczekiwaną zmiennej losowej nazywamy
  - Dla zmiennej losowej dyskretnej

$$E[X]=\sum_{x\in\mathbb{R}} x\, pmf_X(x)=\sum_i x_i p_i$$

  - Dla zmiennej losowej ciągłej

$$E[X]=\int_{x\in\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$$

Momenty

- *k*-ty moment zwykły $m_k = E[X^k]$
  - dla k = 1 wartość oczekiwana

$$m_k = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^k \, pmf_X(x) = \sum_i x_i^k \, p_i$$
$$m_k = \int_{x \in \mathbb{R}} x^k f_X(x) \, dx$$

- *k*-ty moment centralny $\mu_k = E[(X - E[X])^k]$
  - dla k = 1 zawsze równy 0
  - dla k = 2 wariancja

$$\mu_k = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - E[X])^k \, pmf_X(x) = \sum_i (x_i - E[X])^k \, p_i$$
$$\mu_k = \int_{x \in \mathbb{R}} (x - E[X])^k f_X(x) \, dx$$

Przykład

- Dyskretna zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję (masy) prawdopodobieństwa

wartość	prawdopodobieństwo (pmf)
0	0.2
1	0.3
2	0.3
3	0.2

- Ile wynosi wartość oczekiwana i wariancja tego rozkładu prawdopodobieństwa?

Przykład – rozkład jednostajny

- Ciągła zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

  $$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

  oraz 0 poza przedziałem [a; b]

- Ile wynosi wartość oczekiwana i wariancja tego rozkładu prawdopodobieństwa?

Przykład – rozkład wykładniczy

- Ciągła zmienna losowa określona jest przez następującą funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- Ile wynosi wartość oczekiwana i wariancja tego rozkładu prawdopodobieństwa?