MiSTW 2019 – kolokwium I

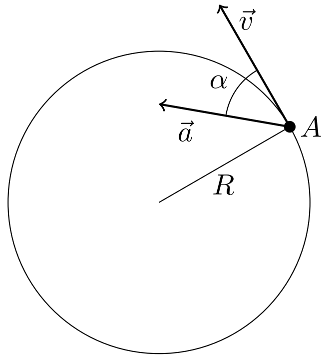
8.04.2019

Informacje:

- zadania prosimy rozwiązywać na osobnych kartkach,
- każda podpisana imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy (lub nazwiskiem prowadzącego ćwiczenia)

Zad. 1

Punkt A porusza się po okręgu o promieniu R. Wyznaczyć zależność prędkości tego punktu od czasu wiedząc, że wektor prędkości $\vec{v}(t)$ tworzy z wektorem przyspieszenia $\vec{a}(t)$ stały kąt α ($0 < \alpha \leqslant \pi/2$, patrz rysunek). Prędkość początkowa punktu wynosi $\vec{v}_0$. Przeanalizować i przedyskutować wynik.



Zad. 2

Cząstka o masie m porusza się w polu potencjału $U = kr^2$, gdzie $r^2 = \rho^2 + z^2$ oraz (ρ, ϕ, z) są współrzędnymi w cylindrycznym układzie współrzędnych.

- Wykaż, że siła związana z potencjałem U jest centralna.
- Korzystając z zasad zachowania pokaż, że z-towa składowa momentu pędu we współrzędnych cylindrycznych jest stała i dana wzorem $L_z = m\rho^2\dot{\phi}$.
- Napisz wzór na energię całkowitą dla omawianej cząstki.
- Znajdź promień orbity kołowej leżącej w płaszczyźnie $z = 0$ (należy założyć, że L_z jest wielkością znaną). Jaka jest wartość energii całkowitej dla cząstki poruszającej się po tej orbicie? Czy istnieją orbity kołowe w przypadku gdy $L_z = 0$?

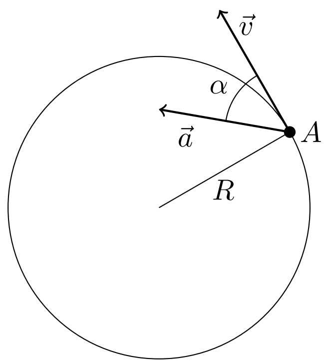
Zad. 3

Równia pochyła o masie M i kącie przywierzchołkowym α moze sie ślizgać bez tarcia wzdłuż prostej horyzontalnej, prostopadłej do przyśpieszenia grawitacyjnego $\vec{g}$. Po równi zsuwa się klocek o masie m w obecności tarcia ze współczynnikiem $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. Znaleźć przyśpieszenia równi i klocka. Określić kierunki ruchu, jeśli w chwili początkowej układ spoczywał.

Wsk.: Opisać ruch klocka w układzie równi.

MiSTW 2019 – kolokwium I

Zad. 1
Punkt A porusza się po okręgu o promieniu R. Wyznaczyć zależność prędkości tego punktu od czasu wiedząc, że wektor prędkości $\vec{v}(t)$ tworzy z wektorem przyspieszenia $\vec{a}(t)$ stały kąt α ($0 < \alpha \leqslant \pi/2$, patrz rysunek). Prędkość początkowa punktu wynosi $\vec{v}_0$. Przeanalizować i przedyskutować wynik.



Rozw. (szkic)

Układ inercjalny związany z okręgiem, współrzędne biegunowe.

Punkt porusza się po okręgu $\Rightarrow a_\rho(t) = \frac{v(t)^2}{R}$

Stały kąt pomiędzy prędkością a przyspieszeniem oznacza, stały kąt pomiędzy przyspieszeniem a wersorem stycznym (gyż prędkość jest zawsze styczna do okręgu). Wniosek stąd, że $\frac{a_\rho}{a_\phi} = \text{const} = \text{tg}\alpha$. Powyższe dwie obserwacje dają razem

$$\frac{v^2}{R\text{tg}\alpha} = a_\phi = \dot{v}$$

Powyższe równanie ruchu należy odcałkować (korzystając z $v(t=0) = v_0$):

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\text{ctg}\alpha}{R}dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{v_0}{1 - \left(\frac{v_0}{R}\text{ctg}\alpha\right) t}$$

Dyskusja wyniku:

- dla $0 < \alpha < \pi/2$ oznacza, że $\text{ctg}\alpha > 0$, czyli prędkość rośnie, co pociąga za sobą wzrost przyspieszenia dośrodkowego, co znowu oznacza wzrost przyspieszenia stycznego (skoro kąt jest stały), czyli punkt przyspiesza coraz bardziej. W momencie czasu $t = \frac{R}{V_0}\text{tg}\alpha$ prędkość urośnie do ∞
- dla przypadku szczególnego $\alpha = \pi/2$ mamy $v(t) = v_0$ i ruch jest jednostajny po okręgu (jak należało się spodziewać, skoro przyspieszenie jest skierowane do środka wzdłuż promienia)
- im mniejszy kąt α tym punkt szybciej rozpędzi się do nieskończoności (też zgodne z intuicją)

MiSTW 2019 – kolokwium 1 zadanie 2

1. Cząstka o masie m porusza się w polu potencjału $U = kr^2$, gdzie $r^2 = \rho^2 + z^2$ a (ρ, ϕ, z) są współrzędnymi w cylindrycznym układzie współrzędnych.
   - Wykaż, że siła związana z potencjałem U jest centralna.
   - Korzystając z zasad zachowania pokaż, że z-towa składowa momentu pędu we współrzędnych cylindrycznych jest stała i dana wzorem $L_z = m\rho^2\dot{\phi}$.
   - Napisz wzór na energię całkowitą dla omawianej cząstki.
   - Znajdź promień orbity kołowej leżącej w płaszczyźnie $z = 0$ (należy założyć, że L_z jest wielkością znaną). Jaka jest wartość energii całkowitej dla cząstki poruszającej się po tej orbicie? Czy istnieją orbity kołowe w przypadku gdy $L_z = 0$?

Szkic rozwiązania.

- Wzory na promień wodzący i prędkość we współrzędnych cylindrycznych: $\bar{r} = \rho\bar{e}_\rho + z\bar{e}_z$, $\bar{v} = \dot{\rho}\bar{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\bar{e}_\phi + \dot{z}\bar{e}_Z$
- Punkt pierwszy: $\bar{F} = -\bar{\nabla}U = -\frac{dU}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial\rho}\bar{e}_\rho + \frac{\partial r}{\partial z}\bar{e}_z\right) = -\frac{dU}{dr}\frac{\bar{r}}{r}$
- Punkt drugi: $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} = -\frac{dU}{dr}\frac{\bar{r}}{r} \times \bar{r} = 0$, to implikuje $\frac{d}{dt}\bar{L} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = 0$, co da $L_z = m\rho^2\dot{\phi}$
- Punkt trzeci: $E_c = \frac{m(\dot{\rho}^2+\dot{z}^2)}{2} + \frac{m\rho^2\dot{\phi}^2}{2} + k\rho^2 = \frac{m(\dot{\rho}^2+\dot{z}^2)}{2} + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} + k\rho^2$, stąd $V_{eff} = \frac{L_z^2}{2m\rho^2} + k\rho^2$
- Punkt czwarty: dla orbity kołowej leżącej w płaszczyźnie $z = 0$ mamy $\dot{\rho} = 0$ stąd promień orbity kołowa będzie ekstremum potencjału efektywnego $\frac{d}{d\rho}V_{eff} = 0 \Rightarrow \rho_o^2 = (\frac{L_z^2}{2km})^{1/2}$, gdzie ρ_o jest promieniem orbity kołowej. (Drugi równoważny sposób to zauważenie, że dla orbity kołowej również $\ddot{\rho} = 0$ a więc z równań Newtona wynika, że siła powiązana z potencjałem efektywnym musi znikać $\bar{F}_{eff} = -\bar{\nabla}V_{eff} = 0$. Z warunku tego można wyznaczyć ρ_o.) $E_c(\rho_o, z = 0) = L_z\sqrt{\frac{2k}{m}}$ Dla $L_z = 0$ $\frac{d}{d\rho}V_{eff} > 0$ dla wszystkich ρ poza $\rho = 0$ tak więc w tym przypadku nie ma orbity kołowej.

Równia pochyła o masie M i kącie przywierzchołkowym α moze sie ślizgać bez tarcia wzdłuż prostej horyzontalnej, prostopadłej do przyśpieszenia grawitacyjnego $\bar{g}$. Po równi zsuwa się klocek o masie m w obecności tarcia ze współczynnikiem $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. Znaleźć przyśpieszenia równi i klocka. Określić kierunki ruchu, jeśli w chwili początkowej układ spoczywał.
Wsk.: Opisać ruch klocka w układzie równi.

Rozwiązanie.
Załóżmy, że układ spoczywał i w pewnej chwili klocek zaczął się zsuwać. Wybierzmy osie układu inercjalnego (laboratorium) tak, że równia sunie po osi x w kierunku malejących wartości, a współrzędna x klocka powiększa się (tak musi być ze względu na brak zewnętrznych sił działających na układ równia-klocek wzdłuż osi x).

Do opisu położenia klocka wprowadźmy nieinercjalny układ współrzędnych x', y' taki, że klocek porusza się zgodnie z osią x', a oś y' jest prostopadła do równi. W tym układzie na klocek działają następujące siły:

1. siła bezwładności $\vec{F}_B = -m\vec{a}_M$, gdzie $\vec{a}_M$ jest przyspieszeniem równi względem laboratorium (siła ta jest skierowana zgodnie z osią x ponieważ $a_M < 0$).
2. siła grawitacji $m\vec{g}$
3. siła reakcji równi $\vec{F}_R = F_R\vec{e}_{y'}$
4. siła tarcia $\vec{F}_T = -\mu F_R\vec{e}_{x'}$

Ponieważ nie ma ruchu klocka wzdłuż osi y' składowe sił wzdłuż tej osi muszą się znosić, a stąd

$$F_R = mg\sin\alpha + ma_M\cos\alpha$$

(zauważ, że siła bezwładności powoduje zmniejszenie oddziaływania pomiędzy m i M). Ruch wzdłuż równi jest opisany równaniem

$$ma'_m = mg\cos\alpha - ma_M\sin\alpha - \mu F_R \ ,$$

z ktorego wynika

$$a'_m = g(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - a_M(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \ .$$

Teraz możemy rozważyć siły działające na M w układzie laboratorium, ale łatwiej jest skorzystać z braku zewnętrznej siły horyzontalnej działającej na układ równia-klocek (inaczej: z prawa zachowania składowej x pędu układu)

$$Ma_m + m(a_M + a'_m\sin\alpha) = 0 \ .$$

Ostatnie dwa równania można łatwo rozwiązać dostając

$$a'_m = g\frac{(M+m)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{M + m\cos\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}$$

$$a_M = -g\frac{m\sin\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{M + m\cos\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} \ .$$

Żeby znaki były takie jak założyliśmy to powinno być $\mu < \operatorname{ctg}\alpha$ (błąd w treści zadania).