MiSTW 2019 – kolokwium II
27.05.2019

Informacje:

- zadania prosimy rozwiązywać na osobnych kartkach,
- każda podpisana imieniem i nazwiskiem oraz numerem grupy (lub nazwiskiem prowadzącego ćwiczenia)

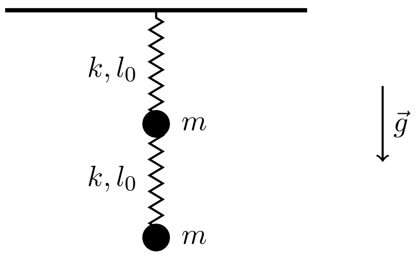
Zad. 1
Punkt materialny o masie m jest zawieszony na sprężynie o współczynniku sprężystości k i długości swobodnej $l_0 = \text{const}$. Do punktu tego podwieszony jest – na takiej samej sprężynie – drugi punkt materialny o masie m. Punkty mogą poruszać się jedynie w pionie, a cały układ znajduje się w stałym i jednorodnym polu grawitacyjnym $\vec{g}$.

i) Znaleźć i wyrazić energię potencjalną i kinetyczną układu w funkcji współrzędnych uogólnionych oraz wypisać lagranżjan układu.

ii) Wypisać równania ruchu.

iii) Znaleźć punkty położenia równowagi trwałej.

iv) Wyznaczyć częstości własne i odpowiadające im rozwiązania (mody własne).



Zad. 2
Płaski krążek o masie m i promieniu R leży w płaszczyźnie xy tak, iż jego środek ciężkości znajduje się w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.

i) Wyznacz momenty bezwładności tego krążka względem osi x, y i z.

ii) Podaj energię kinetyczną tego krążka w przypadku gdy obraca się on wokół osi z ze stałą prędkością kątową ω.

Zad. 3
Cylinder o masie m i promieniu R stacza się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie przywierzchołkowym α. Znaleźć lagranżjan i rozwiązać równania ruchu.

Znaleźć relację pomiędzy czasem stoczenia się go z wysokości h i czasem, który byłby potrzebny do ześlignięcia się tego cylindra przy braku tarcia i obrotu. Założyć zerową prędkość początkową.

Zadanie 1 - rozwiązanie

Wybierzmy jako zmienne dynamiczne x_1 i x_2 zdefiniowane następująco: x_1 jest odległością górnej masy od punktu mocowania górnej sprężyny pomniejszoną o l (długość swobodną sprężyny), x_2 zaś jest pomniejszoną o L odległością masy dolnej od masy górnej. Lagrangian w takicj zmiennych ma postać

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2\right) - \frac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + mg\left(x_1 + (x_1 + x_2)\right),$$

a równania ruchu mają postać ($\omega_0^2 \equiv k/m$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(2x_1 + x_2) + \omega_0^2 x_1 &= 2g\,, \\ \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \omega_0^2 x_2 &= g\,. \end{aligned}$$

Odejmując od pierwszego drugie oraz od dwa razy drugiego pierwsze sprowadzamy je do postaci

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne postaci $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ wyznacza dwie częstości drgań:

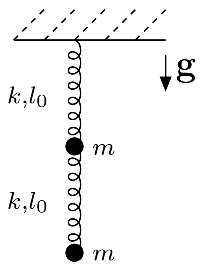
$$\omega_1^2 = \omega_0^2\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,, \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,$$

którym odpowiadają wektory własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

Co fizycznie oczywiste, wyższej częstości odpowiada wektor, którego dwie składowe mają znaki przeciwne - w tym modzie masy mają przeciwne fazy. Nietrudno też znaleźć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego i pełne rozwiązanie ma postać:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{mg}{k}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}(A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t) \\ &+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}(A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t)\,. \end{aligned}$$



Rysunek 24: Dwie masy połączone sprężynkami wiszące w polu siły ciężkości.

Zauważmy, że jeśi za zmienne dynemiczne przyjąć $y_1 = x_1$ oraz y_2 równe pomniejszonej o $2l$ odległości dolnej masy od punktu zamocowania sprężynek do sufitu, tak iż $y_1 = x_1 + x_2$, to lagrangian przyjmie postać

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 \right) - \frac{k}{2} \left(y_1^2 + (x_2 - y_1)^2 \right) + mg \left(y_1 + y_2 \right),$$

a równania ruchu

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne da oczaywiście te same częstości ω_1^2 i ω_2^2, którym teraz będą odpowiadać wektory

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix},$$

a rozwiązaniem szczególnym równanie niejednorodnego będzie

$$\frac{mg}{k} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2 - rozwiązanie

Płaski krążek o masie m i promieniu R leży w płaszczyźnie xy tak, iż jego środek ciężkości znajduje się w początku kartezjańskiego układu współrzędnych.

- Wyznacz momenty bezwładności tego krążka względem osi x, y i z.
- Podaj energię kinetyczną tego krążka w przypadku gdy obraca się on wokół osi z ze stałą prędkością kątową ω.

Schemat rozwiązania
Wzory do wykorzystania:

$$I'_{ik} = \int \rho(\bar{r}') \left(\bar{r}' \delta_{ik} - x'_i x'_k \right) dV',$$
$$T = \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \omega^i I'_{ik} \omega^k,$$

przy czym wzór na energię kinetyczną w powyższej formie jest poprawny jeśli oś obrotu przechodzi przez środek masy bryły sztywnej.

$$I_{zz} = \int \rho(x^2 + y^2 + z^2 - z^2) dV = \int r^2 \rho r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \pi R^2 \rho \frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2},$$

gdzie $r^2 = x^2 + z^2$.

Ze względu na symetrię $I_{xx} = I_{yy}$, tak więc

$$I_{xx} + I_{yy} = \int \rho(y^2 + z^2 + y^2 + z^2)_{|z=0} dV = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2} \Rightarrow I_{xx} = \frac{mR^2}{4} = I_{yy}.$$

Ponieważ $\omega^i = (0, 0, \omega^z = \omega)$ oraz $\dot{\bar{R}} = 0$ zachodzi:

$$T = \frac{1}{2} \omega^z I_{zz} \omega^z = \frac{1}{4} m \omega^2 R^2.$$

Zadanie 3 - rozwiązanie

Cylinder o masie m i promieniu R stacza się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie przywierzchołkowym α. Znaleźć lagranżjan i rozwiązać równania ruchu.

Znaleźć relację pomiędzy czasem stoczenia się go z wysokości h i czasem, który byłby potrzebny do ześlignięcia się tego cylindra przy braku tarcia i obrotu. Założyć zerową prędkość początkową.

Rozwiązanie. Niech oś x przechodzi przez środek masy cylindra równolegle do powierzchni równi i będzie skierowana zgodnie z ruchem cylindra. Przesunięciu środka masy o $\triangle x$ towarzyszy obrót cylindra o $\triangle x/R$. Stąd prędkość kątowa obrotu wynosi $\dot{x}/R$. Ponieważ moment bezwładności jest mR^2 to całkowita energia kinetyczna wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I(\frac{\dot{x}}{R})^2 = m\dot{x}^2 \ .$$

Energia potencjalna względem początku osi x wynosi $mgh = -mgx\cos\alpha$, więc lagranżjan jest

$$L = m\dot{x}^2 + mgx\cos\alpha \ .$$

Z równania ruchu

$$2m\ddot{x} = mg\cos\alpha$$

wynika, że jest to ruch ze stałym przyspieszeniem, a rowiązania mają postać

$$x = \frac{1}{4}g(\cos\alpha)t^2 + v_0 t + x_0 \ .$$

Przy staczaniu się z zerową prędkością początkową mamy $v_0 = 0$ i możemy przyjąć $x_0 = 0$ (początek osi x w punkcie startu). Obniżenie się o h oznacza przebycie dystansu $x = h/\cos\alpha$ przez środek masy. Stąd

$$h = \frac{1}{4}g(\cos^2\alpha)T^2$$

i czas potrzebny do stoczenia się wynosi

$$T = \sqrt{\frac{4h}{g}}\frac{1}{\cos\alpha} \ .$$

Przy braku obrotu nie ma energii związanej z obrotem, przyśpieszenie jest 2 razy większe, więc czas zsuwania się jest mniejszy o czynnik $\sqrt{2}$.