

**Zadania domowe z Mechaniki i STW**  
**seria 5 termin 23.05.2019**

1. W wierzchołkach kwadratu o współrzędnych  $(a, a, 0), (-a, a, 0), (-a, -a, 0), (a, -a, 0)$  umieszczono naprzemiennie masy punktowe  $M$  oraz  $m$  ( $m < M$ ).  
Wyznaczyć składowe tensora bezwładności:
  - a) względem osi  $x, y, z$
  - b) względem osi  $x', y'$  i  $z'$  o wersorach równych odpowiednio  $\vec{e}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \vec{e}_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \vec{e}_{z'} = (0, 0, 1)$ .
2. Jednorodny walec o masie  $M$ , promieniu  $R$  i wysokości  $H$  obraca się za stałą prędkością  $\omega$  wokół osi stycznej do obwodu podstawy walca. Znaleźć moment pędu i energię kinetyczną walca.
3. Korzystając z równań Lagrange'a znaleźć częstość drgań jednorodnego pręta o długości  $2l$  i masie  $M$  mogącego poruszać się w taki sposób, że jego końce ślizgają się bez tarcia po wewnętrznej powierzchni nieruchomej pustej powłoki walcowej o promieniu  $R > l$ . Pręt pozostaje stale prostopadły do osi walca, która z kolei jest prostopadła do pola siły ciężenia  $\vec{g}$ .
4. Lagranżjan układu mechanicznego wyrażony przez współrzędne sferyczne  $r, \phi, \Theta$  jest równy

$$L = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \Theta] - a\sqrt{1 + \sin^2 \Theta}\dot{\phi}.$$

Podać związek między pędami kanonicznymi  $p_r, p_\phi, p_\Theta$  i odpowiednimi prędkościami  $\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\Theta}$ . Wypisać kanoniczne równania ruchu. znaleźć całki pierwsze.