Mechanika i STW
Ćwiczenia nr 2
ze szkicami rozwiązań zadań do samodzielnego rozwiązania
23 marca 2020

Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 1. Koralik porusza się po drucianym okręgu O o promieniu R umieszczonym w płaszczyźnie horyzontalnej. Współczynnik tarcia kinetycznego jest równy f. Jaką prędkość początkową v_0 trzeba nadać koralikowi, aby po jednym okrążeniu zatrzymał się w punkcie wyjścia?

Rozwiązanie. Załóżmy, że okrąg O, po którym porusza się koralik, opisany jest warunkami

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad\qquad z = 0$$

nałożonymi na współrzędne kartezjańskie (x, y, z) — patrz rysunek 1. Ruch koralika wygodnie będzie opisać we współrzędnych walcowych (ρ, φ, z), gdzie standardowo

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad\qquad y = \rho \sin \varphi,$$

zaś współrzędna z układu walcowego jest tożsama ze współrzędną kartezjańską z. Przyjmijmy dodatkowo, że oś OZ jest skierowana ku górze. Równania okręgu O we współrzędnych walcowych przedstawiają się następująco:

$$\rho = R, \qquad\qquad z = 0. \tag{1.1}$$

Widzimy stąd, że współrzędna φ jest zmienną parametryzującą punkty leżące na okręgu O i wobec tego wersor $\vec{e}_\varphi$ jest styczny do okręgu, zaś wersory $\vec{e}_\rho$ oraz $\vec{e}_z$ są doń ortogonalne (wynika to z ortgonalności walcowego układu współrzędnych).

Prędkość punktu materialnego w układzie walcowym ma postać

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z.$$

Skoro podczas ruchu koralika jego współrzędne muszą spełniać warunki (1.1), to prędkość koralika przedstawia się następująco:

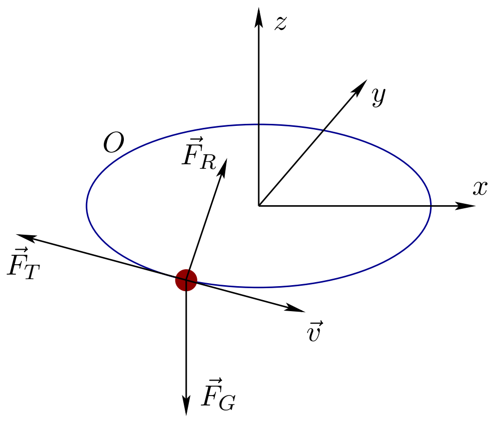
$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{1.2}$$

Niech m będzie masą koralika. Na koralik działają trzy siły: (i) siła grawitacji

$$\vec{F}_G = -mg\vec{e}_z, \quad g > 0, \tag{1.3}$$

(ii) siła reakcji $\vec{F}_R$ wymuszająca na koraliku pozostawanie na okręgu O podczas ruchu; siła ta jest prostopadła do okręgu i w związku z tym jest kombinacją liniową wersorów $\vec{e}_\rho$ oraz $\vec{e}_z$:

$$\vec{F}_R = F_{R\rho}\,\vec{e}_\rho + F_{Rz}\,\vec{e}_z, \tag{1.4}$$



Rysunek 1: Koralik na okręgu O

(iii) siła tarcia kinetycznego $\vec{F}_T$, która jest przeciwnie skierowana do prędkości $\vec{v}$ koralika i proporcjonalna do wartości siły reakcji:

$$\vec{F}_T = -f|\vec{F}_R|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -f|\vec{F}_R|\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}\vec{e}_\varphi \tag{1.5}$$

— druga równość zachodzi na mocy równania (1.2).

Przyspieszenie punktu materialnego w układzie walcowym dane jest wzorem

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Na mocy (1.1) przyspieszenie koralika

$$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{1.6}$$

Równania ruchu koralika,

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_R + \vec{F}_T,$$

możemy przy użyciu równań (1.3), (1.4), (1.5) i (1.6) rozpisać w następujący sposób:

$$-mR\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + mR\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -mg\vec{e}_z + F_{R\rho}\,\vec{e}_\rho + F_{Rz}\,\vec{e}_z - f|\vec{F}_R|\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}\vec{e}_\varphi.$$

Liniowa niezależność wersorów $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ i $\vec{e}_z$ pozwala nam wyrazić powyższe równanie wektorowe w postaci układu trzech równań liczbowych:

$$\begin{aligned} -mR\dot{\varphi}^2 &= F_{R\rho}, \\ mR\ddot{\varphi} &= -f|\vec{F}_R|\frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}, \\ 0 &= -mg + F_{Rz}. \end{aligned}$$

Przy użyciu pierwszego i trzeciego z tych równań obliczamy

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{F_{R\rho}^2 + F_{Rz}^2} = m\sqrt{R^2\dot{\varphi}^4 + g^2}$$

i otrzymany wynik wstawiamy do drugiego równania, co po skróceniu przez m i przy dodatkowym (nieograniczającym ogólności) założeniu $\dot{\varphi} > 0$ daje następujące równanie różniczkowe

$$R\ddot{\varphi} = -f\sqrt{R^2\dot{\varphi}^4 + g^2}.$$

Wprowadzając oznaczenie $\omega \equiv \dot{\varphi}$ na prędkość kątowa koralika możemy przestawić powyższe równanie jako równanie 1-go rzędu na funkcję $t \mapsto \omega(t)$:

$$R\dot{\omega} = -f\sqrt{R^2\omega^4 + g^2}. \tag{1.7}$$

Jednakże znajomość samej tylko zależności $\omega(t)$ nie da nam odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu — to pytanie dotyczy prędkości początkowej, jaką należy nadać koralikowi, aby zatrzymał się po pełnym okrążeniu okręgu O, czyli w momencie, gdy kąt φ opisujący położenie koralika na okręgu zwiększy się o 2π w stosunku do wartości tego kąta na początku ruchu. Widać stąd, że do rozwiązania zadania potrzebna nam jest znajomość zależności prędkości kątowej ω od kąta φ, czyli znajomość funkcji $\varphi \mapsto \omega(\varphi)$.

Powyżej założyliśmy, że $\omega \equiv \dot{\varphi} > 0$. Tak długo jak ten warunek jest spełniony zależność $\varphi(t)$ może być odwrócona do zależności $t(\varphi)$. Składając tą ostatnią zależność z zależnością $\omega(t)$ otrzymujemy zależność $\omega(\varphi)$:

$$\omega(\varphi) = \omega(t(\varphi)).$$

Mamy stąd

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt}(t(\varphi))\frac{dt}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt}(t(\varphi))\Big(\frac{d\varphi}{dt}(t(\varphi))\Big)^{-1} = \frac{\dot{\omega}}{\dot{\varphi}} = \frac{\dot{\omega}}{\omega}$$

(w drugim kroku zastosowaliśmy wzór na pochodną funkcji odwrotnej). Podstawiając do powyższego równania pochodną $\dot{\omega}$ daną równaniem (1.7) otrzymujemy

$$\frac{\omega}{\sqrt{R^2\omega^4 + g^2}}\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{f}{R}.$$

Scałkujmy teraz obie strony powyższego równania po φ

$$\int \frac{\omega}{\sqrt{R^2\omega^4 + g^2}}\frac{d\omega}{d\varphi}\, d\varphi = -\int \frac{f}{R}\, d\varphi = -\frac{f}{R}\varphi + \frac{C}{2R}, \tag{1.8}$$

gdzie $C/2R$ jest stałą całkowania. W pierwszej całce dokonujemy najpierw zamiany zmiennych $\omega = \omega(\varphi)$, a następnie zamiany $u = R\omega^2/g$, co daje

$$\int \frac{\omega}{\sqrt{R^2\omega^4 + g^2}}\frac{d\omega}{d\varphi}\, d\varphi = \int \frac{\omega}{\sqrt{R^2\omega^4 + g^2}}\, d\omega = \frac{1}{2R}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2R}\operatorname{ar\,sinh} u = \\ = \frac{1}{2R}\operatorname{ar\,sinh}(R\omega^2/g).$$

Podstawiając otrzymany wynik do (1.8) dostajemy

$$\operatorname{ar\,sinh}(R\omega^2/g) = -2f\varphi + C.$$

Jeśli w chwili początkowej współrzędna φ koralika miała wartość φ_0, a jego prędkość kątowa wynosiła ω_0 to

$$\operatorname{ar\,sinh}(R\omega_0^2/g) = -2f\varphi_0 + C.$$

Odejmując stronami dwa ostatnie równania otrzymujemy ostatecznie formułą opisującą zależność prędkości kątowej ω koralika od jego współrzędnej φ:

$$\operatorname{ar\,sinh}(R\omega^2/g) - \operatorname{ar\,sinh}(R\omega_0^2/g) = -2f(\varphi - \varphi_0).$$

Jeśli po obiegnięciu całego okręgu, czyli po wzroście wartości kąta φ o 2π (od wartości początkowej φ_0) prędkość ω ma zmaleć do zera to na mocy powyższego równania

$$\operatorname{ar\,sinh}(R\omega_0^2/g) = 4f\pi,$$

czyli

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}\sinh(4f\pi)}.$$

Wnioskujemy stąd, że szukana wartość prędkości początkowej wynosi

$$v_0 = R\omega_0 = \sqrt{Rg\sinh(4f\pi)}.$$

$\square$

Zadanie 2. Ramka prostokątna o bokach o długości a i b, obraca się ze stałą częstotliwością ω wokół jednego z boków o długości b. Po równoległym boku porusza się koralik ruchem harmonicznym o amplitudzie $b/2$ z częstotliwością Ω. Znaleźć prędkość i przyspieszenie w układzie spoczynkowym ramki i w laboratorium oraz sprawdzić, czy w przypadku koralika spełniony jest wzór

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{2.1}$$

gdzie $d\vec{r}/dt$ jest prędkością koralika w układzie laboratorium, a $d'\vec{r}/dt$ prędkością w układzie ramki.

Rozwiązanie. W układzie spoczynkowym ramki wprowadźmy układ współrzędnych kartezjańskich (x', y', z') tak, że wierzchołki $A_\pm, B_\pm$ ramki mają w tym układzie następujące współrzędne:

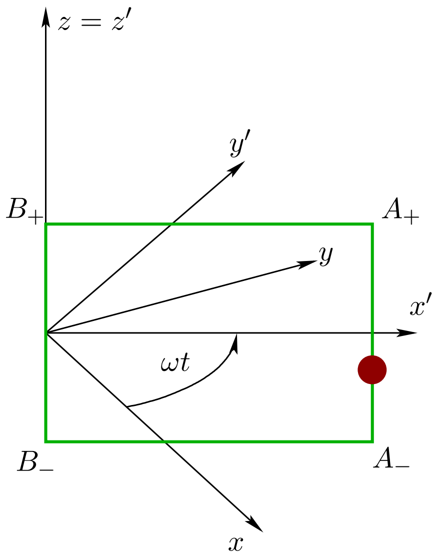
$$A_\pm = (a, 0, \pm b/2), \qquad B_\pm = (0, 0, \pm b/2)$$

(bok B_+B_- ramki jest odcinkiem osi OZ', a boki doń prostopadłe są równolegle do osi OX') — patrz rysunek 2. Przyjmijmy ponadto, że oś obrotu ramki wyznaczona jest przez bok B_+B_-, a koralik porusza się wzdłuż boku A_+A_-. Wobec tego ruch koralika w układzie (x', y', z') może być opisany następująco:

$$x'(t) = a, \qquad y'(t) = 0, \qquad z'(t) = \frac{b}{2}\sin(\Omega t). \tag{2.2}$$

Mamy stąd wyrażenia na składowe prędkości i przyspieszenia koralika w układzie ramki:

$$\dot{x}' = 0, \qquad \dot{y}' = 0, \qquad \dot{z}' = \frac{b\Omega}{2}\cos(\Omega t), \tag{2.3}$$
$$\ddot{x}' = 0, \qquad \ddot{y}' = 0, \qquad \ddot{z}' = -\frac{b\Omega^2}{2}\sin(\Omega t).$$



Rysunek 2: Koralik na ramce

Aby opisać ruch obrotowy układu spoczynkowego ramki względem układu laboratorium wystarczy założyć, że układ kartezjański (x, y, z) związany z laboratorium został wybrany tak, że (i) oś OZ pokrywa się z osią OZ' i (ii) płaszczyzna OXY pokrywa się z płaszczyzną $OX'Y'$. Teraz wystarczy przyjąć, że współrzędne (x, y, z) powiązane są ze współrzędnymi (x', y', z') za pomocą macierzy obrotu o kąt ωt względem osi $OZ = OZ'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Podstawiając do powyższego równania funkcje (2.2) opisujące ruch koralika w układzie ramki otrzymujemy funkcje opisujące ruch koralika w układzie laboratorium:

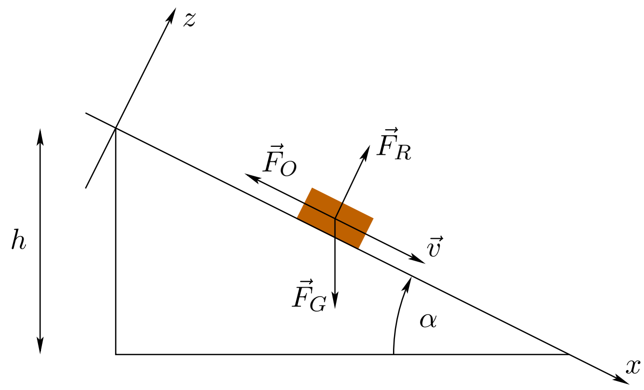
$$x(t) = a\cos(\omega t), \qquad y(t) = a\sin(\omega t), \qquad z(t) = \frac{b}{2}\sin(\Omega t). \tag{2.5}$$

Mamy stąd wyrażenia na składowe prędkości i przyspieszenia koralika w układzie laboratorium:

$$\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t), \qquad \dot{y} = a\omega\cos(\omega t), \qquad \dot{z} = \frac{b\Omega}{2}\cos(\Omega t),$$
$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos(\omega t), \qquad \ddot{y} = -a\omega^2\sin(\omega t), \qquad \ddot{z} = -\frac{b\Omega^2}{2}\sin(\Omega t).$$

Prędkość koralika w układzie laboratorium możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{b\Omega}{2}\cos(\Omega t)\vec{e}_z - a\omega\sin(\omega t)\vec{e}_x + a\omega\cos(\omega t)\vec{e}_y = \\ \frac{b\Omega}{2}\cos(\Omega t)\vec{e}_{z'} + a\omega\sin(\omega t)\vec{e}_z \times \vec{e}_y + a\omega\cos(\omega t)\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \\ = \frac{b\Omega}{2}\cos(\Omega t)\vec{e}_{z'} + \omega\vec{e}_z \times \left(a\cos(\omega t)\vec{e}_x + a\sin(\omega t)\vec{e}_y + \frac{b\Omega}{2}\sin(\Omega t)\vec{e}_z\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$



Rysunek 3: Klocek na równi

— w powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy następujące równości:

$$\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}, \qquad \vec{e}_x = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y, \qquad \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_x, \qquad 0 = \vec{e}_z \times \vec{e}_z.$$

Łatwo teraz zauważyć, że pierwszy składnik w ostatniej linii wyrażenia (2.6) to prędkość $d'\vec{r}/dt$ koralika w układzie ramki (patrz (2.3)), $\omega\vec{e}_z$ w tejże linii to wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$, a czynnik w dużym nawiasie mnożący wektorową tą prędkość to wektor wodzący koralika w układzie laboratorium (patrz (2.5)). Zatem ogólny wzór (2.1) jest spełniony w rozpatrywanym tu przypadku. □

Zadanie 3. Po równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu równym α zsuwa się w kierunku największego spadku klocek o masie m, na który działa siła oporu $\vec{F}_O = -m\kappa\vec{v}$, gdzie $\kappa > 0$ jest stałą, a $\vec{v}$ prędkością klocka. Znaleźć położenie klocka w funkcji czasu wiedząc, że w chwili $t = 0$ znajdował się on na wysokości h. Sprawdzić, że w granicy $\kappa \to 0^+$ dostaje się znane rozwiązanie. Znaleźć pracę wykonaną nad klockiem przez siłę oporu w funkcji czasu.

Rozwiązanie. Zagadnienie jest dwuwymiarowe — ruch zachodzi w płaszczyźnie wyznaczonej przez kierunek największego spadku równi i kierunek pionu. Wprowadźmy w tej płaszczyźnie kartezjański układ współrzędnych (x, z) w taki sposób, że (i) oś OX biegnie po powierzchni równi w kierunku największego spadku i jest zwrócona ku dołowi, (ii) oś OZ jest zwrócona ku górze, a (iii) początek układu znajduje się na równi na wysokości h licząc od jej podstawy — patrz rysunek 3.

Na klocek działają trzy siły: (i) siła grawitacji

$$\vec{F}_G = mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - mg\cos\alpha\,\vec{e}_z,$$

(ii) siła reakcji $\vec{F}_G$ równi, która równoważy składową siły grawitacji prostopadłą do powierzchni równi, stąd $\vec{F}_G = mg\cos\alpha\vec{e}_z$, (iii) siła oporu

$$\vec{F}_O = -m\kappa\vec{v} = -m\kappa v\,\vec{e}_x,$$

gdzie $v = \dot{x} > 0$, ponieważ klocek zsuwa się z równi wzdłuż osi OX. Równanie ruchu klocka przyjmie zatem następującą postać:

$$m\vec{a} = m\dot{v}\,\vec{e}_x = \vec{F}_G + \vec{F}_R + \vec{F}_O = -m\kappa v\,\vec{e}_x + mg\sin\alpha\,\vec{e}_x.$$

Wynika stąd równanie różniczkowe postaci

$$\dot{v} + \kappa v = g\sin\alpha. \tag{3.1}$$

Po lewej stronie równania (3.1) mamy kombinację liniową pochodnej $\dot{v}$ prędkości i prędkości v, a po prawej stronie wyrażenie niezależne od $\dot{v}$, v jak również od położenia klocka. Tego typu równanie nazywa się *równaniem liniowym niejednorodnym.* W celu rozwiązania tego równania znajdziemy najpierw rozwiązanie ogólne $v(t)$ następującego *równania liniowego jednorodnego*:

$$\dot{v} + \kappa v = 0. \tag{3.2}$$

Rozwiązania tego równania szukamy w postaci $v(t) = A\exp(\beta t)$, gdzie A i β są stałymi. Podstawiwszy tak zapostulowaną funkcję v i jej pochodną

$$\dot{v} = \beta A\exp(\beta t)$$

do (3.2) otrzymujemy warunek

$$A\beta\exp(\beta t) + \kappa A\exp(\beta t) = 0.$$

Mam stąd $\beta = -\kappa$, i dlatego

$$v(t) = A\exp(-\kappa t) \tag{3.3}$$

— funkcja ta z dowolną stałą A jest ogólnym rozwiązaniem równania (3.2).

Znajdziemy teraz rozwiązanie równania (3.1) metodą uzmiennienia stałej w rozwiązaniu (3.3) tzn. postulujemy, że rozwiązanie równania (3.1) jest postaci $v(t) = A(t)\exp(-\kappa t)$. Podstawiając tą funkcję i jej pochodną

$$\dot{v} = \dot{A}\exp(-\kappa t) - \kappa A\exp(-\kappa t)$$

do (3.1) dostajemy równanie na $A(t)$ postaci

$$\frac{dA}{dt} = g\sin\alpha\exp(\kappa t).$$

Całkując po czasie obie strony tego równania dostajemy

$$A(t) = \frac{g\sin\alpha}{\kappa}\exp(\kappa t) + C,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Wobec tego ogólne rozwiązanie równania (3.1) przedstawia się następująco:

$$v(t) = \frac{g\sin\alpha}{\kappa} + C\exp(-\kappa t).$$

Zakładając, że w chwili początkowej $t = 0$ prędkość klocka wynosiła $v_0 > 0$ otrzymujemy z powyższego równania warunek na stałą C:

$$v_0 = \frac{g\sin\alpha}{\kappa} + C.$$

Zatem prędkość klocka

$$v(t) = \frac{g \sin\alpha}{\kappa} + (v_0 - \frac{g\sin\alpha}{\kappa}) \exp(-\kappa t). \tag{3.4}$$

Całkując po czasie funkcję $v(t)$ otrzymujemy zależność $x(t)$ położenia od czasu:

$$\begin{aligned} x(t) = \int v(t)\, dt = \int \Big(\frac{g\sin\alpha}{\kappa} + (v_0 - \frac{g\sin\alpha}{\kappa})\exp(-\kappa t)\Big)\, dt = \\ = \frac{g\sin\alpha}{\kappa} t + \frac{g\sin\alpha - \kappa v_0}{\kappa^2}\exp(-\kappa t) + C'. \end{aligned}$$

Stałą całkowania C' znajdujemy z warunku początkowego: w chwili $t = 0$ klocek znajdował się na wysokości h czyli w punkcie $x = 0$. W konsekwencji

$$0 = \frac{g\sin\alpha - \kappa v_0}{\kappa^2} + C'$$

i ruch klocka opisany jest funkcją

$$x(t) = \frac{g\sin\alpha}{\kappa} t + \frac{g\sin\alpha - \kappa v_0}{\kappa^2}(\exp(-\kappa t) - 1). \tag{3.5}$$

Znajdziemy teraz granicę rozwiązania (3.5) przy współczynniku κ zbiegającym do zera — dokonując odpowiedniego przeszeregowania wyrazów w tym rozwiązaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa\to 0^+} x(t) = \lim_{\kappa\to 0^+} \Big(v_0 \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} + g\sin\alpha\, \frac{t\kappa + e^{-\kappa t} - 1}{\kappa^2}\Big) = \\ = v_0 \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} + g\sin\alpha \lim_{\kappa\to 0^+} \frac{t\kappa + e^{-\kappa t} - 1}{\kappa^2} \end{aligned}$$

— obydwie granice w ostatniej linii łatwo jest policzyć wykorzystując regułę de l'Hospitala. W rezultacie dostajemy

$$\lim_{\kappa\to 0^+} x(t) = v_0 t + g\sin\alpha \frac{t^2}{2},$$

czyli funkcję opisującą ruch klocka pod działaniem składowej siły grawitacji stycznej do powierzchni równi.

Aby obliczyć zależność pracy W wykonanej przez siłę oporu $\vec{F}_O$ od czasu wykorzystamy wzór na moc tej siły:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}_O \circ \vec{v} = -m\kappa v^2.$$

Zatem praca $W(t')$ wykonana od chwili $t = 0$ do chwili $t' > 0$ równa jest

$$W(t') = \int_0^{t'} \frac{dW}{dt}\, dt = -m\kappa \int_0^{t'} v^2\, dt.$$

Podstawiając do powyższej całki zależność $v(t)$ daną wzorem (3.4) otrzymujemy po nietrudnych obliczeniach

$$W(t') = -m\Big(\frac{g^2\sin^2\alpha}{\kappa} t' + \frac{2g\sin\alpha(v_0\kappa - g\sin\alpha)}{\kappa^2}(1 - e^{-\kappa t'}) + \frac{(v_0\kappa - g\sin\alpha)^2}{2\kappa^2}(1 - e^{-2\kappa t'})\Big).$$

$\square$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Drut w kształcie odcinka prostej ustawiono pod kątem $0 < \alpha < \pi/2$ do pionu. Na drut nawleczono koralik i nadano mu skierowaną ku dołowi prędkość o wartości v_0. Jaka musi być wartość współczynnika f tarcia kinetycznego pomiędzy drutem a koralikiem, aby koralik zatrzymał się po przebyciu drogi l?

Szkic rozwiązania. Wybierzmy współrzędną x wzdłuż drutu w ten sposób, że jej wartość wzrasta ku dołowi. Równanie ruchu koralika przyjmuje postać

$$ma = mg\cos\alpha - fmg\sin\alpha$$

— $mg\sin\alpha$ jest wartością siły reakcji drutu, która to siła neutralizuje prostopadłą do drutu składową siły ciężkości działającej na koralik. Mamy tu więc do czynienia z ruchem pod wpływem siły o stałej wartości, i w konsekwencji ze stałym przyspieszeniem

$$a = g(\cos\alpha - f\sin\alpha).$$

Zatem zależności prędkości i położenia od czasu są następujące:

$$v(t) = at + v_0, \qquad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0,$$

gdzie v_0 i x_0 są wartościami prędkości i położenia w chwili początkowej $t = 0$. Wynika stąd, że koralik zatrzyma się w chwili $t = -v_0/a$ w położeniu $x(-v_0/a)$ po przebyciu drogi

$$x(-v_0/a) - x_0 = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}.$$

Droga ta ma być równa l, skąd mamy

$$f = \frac{1}{\sin\alpha}\Big(\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{gl}\Big).$$

□

Zadanie 2. Po obręczy w kształcie okręgu porusza się koralik z prędkością o stałej wartości v_0, mierzoną w układzie spoczynkowym obręczy. Obręcz wiruje względem laboratorium ze stałą prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez jedną ze średnic obręczy. Znaleźć ruch, prędkość i przyspieszenie koralika w układzie laboratorium.

Szkic rozwiązania. W układzie spoczynkowym obręczy wprowadźmy układ współrzędnych kartezjańskich (x', y', z') w ten sposób, że obręcz jest opisana równaniami

$$x'^2 + z'^2 = R^2, \qquad y' = 0,$$

a ruch koralika równaniami

$$x'(t) = R\cos(v_0t/R), \qquad y'(t) = 0, \qquad z'(t) = R\sin(v_0t/R).$$

Przyjmijmy, że obręcz obraca się wokół osi OZ'. Korzystając z transformacji (2.4) możemy teraz wyrazić ruch koralika we współrzędnych kartezjańskich (x, y, z) w układzie laboratorium:

$$x(t) = R\cos(\omega t)\cos(v_0 t/R), \qquad y(t) = R\sin(\omega t)\cos(v_0 t/R), \qquad z(t) = R\sin(v_0 t/R).$$

Prędkość i przyspieszenie koralika względem laboratorium obliczamy różniczkując po czasie powyższe funkcje. □

Zadanie 3. Na poruszające się ciało o masie m działa siła oporu postaci

$$\vec{F}_O = -m\chi|\vec{v}|\vec{v},$$

gdzie $\chi > 0$ jest stałą, a $\vec{v}$ prędkością ciała. Znaleźć ruch ciała i zależność pracy wykonanej przez siłę oporu od czasu wiedząc, że w chwili $t = 0$ prędkość ciała była równa $\vec{v}_0 \neq 0$.

Wskazówka: Ciało będzie poruszać się po linii prostej.

Szkic rozwiązania. Niech x będzie współrzędną wzdłuż prostej, po której porusza się ciało, rosnącą w kierunku ruchu ciała. Równanie ruchu ma postać

$$m\dot{v} = -m\chi v^2,$$

gdzie v jest prędkością ciała. Mamy stąd

$$\frac{1}{v^2}\dot{v} = -\chi.$$

Odcałkowanie obu stron tego równania po czasie daje

$$\dot{x}(t) = v(t) = \frac{v_0}{1 + \chi v_0 t} > 0.$$

Ponownie całkując po czasie otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{\chi}\ln(1 + \chi v_0 t) + x_0.$$

Moc siły $\vec{F}_O$ wynosi

$$\dot{W} = \vec{F}_O \circ \vec{v} = -m\chi v^3 = -m\chi\Big(\frac{v_0}{1 + \chi v_0 t}\Big)^3.$$

Licząc całkę po czasie z obu stron powyższego równania od chwili początkowej $t = 0$ do chwili $t = t'$ otrzymujemy szukaną pracę

$$W(t') = \int_0^{t'} -m\chi\Big(\frac{v_0}{1 + \chi v_0 t}\Big)^3 dt = \frac{mv_0^2}{2}\Big(\frac{1}{(1 + \chi v_0 t')^2} - 1\Big).$$

□

Andrzej Okołów