Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 2
16 marca 2020

Zadanie 1. Dron porusza się horyzontalnie na wysokości H ze stałą prędkością $\vec{v}_0$. W momencie, gdy znajduje się dokładnie nad naziemną wyrzutnią rakietową startuje z niej samonaprowadzająca się rakieta. Prędkość $\vec{v}$ rakiety jest skierowana przez cały czas lotu w stronę dronu, a wartość tej prędkości jest stała i równa $2|\vec{v}_0|$. Znaleźć ruch rakiety. Wyznaczyć czas, jaki upływa od wystrzelenia rakiety do uderzenia rakiety w dron.

Rozwiązanie. **Równania ruchu** Zagadnienie jest dwuwymiarowe — ruch dronu i rakiety ma miejsce w płaszczyźnie wyznaczonej przez prostą, po której porusza się dron, i wyrzutnię rakiet. Wprowadźmy układ współrzędnych (x, z) w ten sposób, że oś OZ jest pionowa i skierowana ku górze, $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ i $v_0 > 0$, a współrzędne wyrzutni to $(0, 0)$. Przyjmijmy, że ruch dronu dany jest funkcjami

$$x_d(t) = v_0 t, \qquad\qquad z_d(t) = H, \tag{1.1}$$

a ruch rakiety (nieznanymi) funkcjami $\big(x(t), z(t)\big)$. Wektor o składowych

$$\big(v_0 t - x(t), H - z(t)\big)$$

wskazuje chwilowy kierunek od rakiety ku dronowi. Unormowanie tego wektora i przemnożenie przez stałą $2v_0$ daje wektor chwilowej prędkości rakiety:

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}, \dot{z}) = \frac{2v_0}{\sqrt{(v_0 t - x(t))^2 + (H - z(t))^2}}\big(v_0 t - x(t), H - z(t)\big).$$

Mamy stąd układ równań różniczkowych na funkcje $\big(x(t), z(t)\big)$ opisujące ruch rakiety:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2v_0 \frac{v_0 t - x}{\sqrt{(v_0 t - x)^2 + (H - z)^2}}, \\ \dot{z} &= 2v_0 \frac{H - z}{\sqrt{(v_0 t - x)^2 + (H - z)^2}}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

które należy rozwiązać z warunkiem początkowym

$$x(t = 0) = 0, \qquad\qquad z(t = 0) = 0 \tag{1.3}$$

jako, że rakieta w chwili $t = 0$ znajduje się w punkcie $(0, 0)$.

Uproszczenie równań ruchu Układ równań (1.2) jest skomplikowanym układem nieliniowych równań różniczkowych. W celu uproszczenia jego postaci wprowadźmy nowe zmienne

$$\bar{x} := v_0 t - x, \qquad\qquad \bar{z} := H - z. \tag{1.4}$$

Różniczkując po czasie powyższe równania otrzymujemy

$$\dot{\bar{x}} = v_0 - \dot{x}, \qquad\qquad \dot{\bar{z}} = -\dot{z}.$$

Powyższe cztery równania pozwalają nam zapisać układ równań (1.2) w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v_0 - 2v_0 \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}}, \\ \dot{\bar{z}} &= -2v_0 \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

Korzystając z (1.4) możemy wyrazić warunki początkowe (1.3) w nowych zmiennych:

$$\bar{x}(t=0) = 0, \qquad \bar{z}(t=0) = H. \tag{1.6}$$

Układ równań (1.5) ma prostszą postać niż (1.2), jednakże konieczne jest jego dalsze uproszczenie. W tym celu wprowadzimy współrzędne biegunowe (ρ, φ):

$$\bar{x} = \rho \cos\varphi, \qquad \bar{z} = \rho \sin\varphi. \tag{1.7}$$

Mamy stąd natychmiast

$$\rho = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}}. \tag{1.8}$$

Różniczkując po czasie równania (1.7) dostajemy

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{\bar{z}} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

— te wzory oraz (1.8) podstawiamy do (1.5), co daje

$$\begin{aligned} \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi &= v_0 - 2v_0\cos\varphi, \\ \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi &= -2v_0\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Z powyższych wzorów wyliczymy teraz $\dot{\rho}$ i $\rho\dot{\varphi}$. W tym celu pomnożymy stronami pierwsze z równań (1.9) przez $\cos\varphi$, drugie z tych równań przez $\sin\varphi$ i dodamy stronami. Następnie pomnożymy stronami pierwsze z równań (1.9) przez $-\sin\varphi$, drugie z tych równań przez $\cos\varphi$ i znów dodamy stronami. W rezultacie otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v_0\cos\varphi - 2v_0, \\ \rho\dot{\varphi} &= -v_0\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Korzystając z (1.8) przepisujemy warunki początkowe (1.6) w zmiennych biegunowych

$$\rho(t=0) = H, \qquad \varphi(t=0) = \frac{\pi}{2}. \tag{1.11}$$

Zależność $\rho(\varphi)$ Teraz na podstawie równań (1.10) znajdziemy zależność współrzędnej ρ rakiety od jej współrzędnej φ. Z drugiego z równań (1.10) odczytujemy wartość pochodnej współrzędnej φ po czasie t:

$$\dot{\varphi} = \frac{-v_0\sin\varphi}{\rho}. \tag{1.12}$$

Z (1.11) wynika, że pochodna ta jest ujemna w chwili $t = 0$, funkcja $\varphi(t)$ jest więc malejąca w otoczeniu $t = 0$. Co więcej, pochodna $\dot{\varphi}$ jest ujemna tak długo, jak $\varphi \in]0, \pi/2]$ i $\rho \neq 0$. W konsekwencji, istnieje $t_0 > 0$ takie, że funkcja

$$[0, t_0[\ni t \mapsto \varphi(t)$$

jest odwracalna. Funkcję odwrotną do powyższej oznaczymy symbolem $t(\varphi)$. Składając funkcję $\varphi \mapsto t(\varphi)$ z funkcją $t \mapsto \rho(t)$ otrzymujemy zależność $\rho(\varphi)$, której jawną postać zamierzamy znaleźć:

$$\rho(\varphi) = \rho(t(\varphi)).$$

Mamy stąd

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d\rho}{dt}(t(\varphi))\frac{dt}{d\varphi} = \frac{d\rho}{dt}(t(\varphi))\Big(\frac{d\varphi}{dt}(t(\varphi))\Big)^{-1} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\varphi}},$$

gdzie w pierwszym kroku użyliśmy wzoru na pochodną funkcji złożonej, a drugim kroku zastosowaliśmy wzór na pochodną funkcji odwrotnej. Podstawiając do powyższego równania pochodne $\dot{\rho}$ i $\dot{\varphi}$ (pierwsze równanie (1.10) i równanie (1.12)) otrzymujemy

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{2}{\sin\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi.$$

Równanie to można rozwiązać całkując po φ obie jego strony:

$$\int \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}\,d\varphi = 2\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \int \operatorname{ctg}\varphi\,d\varphi. \tag{1.13}$$

W całce po lewej stronie powyższego równania dokonujemy zamiany zmiennych $\rho = \rho(\varphi)$ i otrzymujemy

$$\int \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}\,d\varphi = \int \frac{d\rho}{\rho} = \ln(\rho(\varphi)) + \ln c = \ln(c\rho(\varphi)), \tag{1.14}$$

gdzie dowolna stała całkowania została zapisana w postaci $\ln c$, $c > 0$. Pierwszą całkę po prawej stronie równania (1.13) można policzyć przez podstawienie "tangensa połówkowego", a drugą całkę tamże przez podstawienie $w = \sin\varphi$, co daje

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \ln|\operatorname{tg}(\varphi/2)|, \qquad \int \operatorname{ctg}\varphi\,d\varphi = \ln|\sin\varphi|$$

(stałe całkowania pomijamy, gdyż uwzględniliśmy już taką stałą w całce (1.14)). Podstawiając otrzymane całki do (1.13) i wykorzystując własności logarytmu otrzymujemy

$$c\rho = \Big|\frac{\operatorname{tg}^2(\varphi/2)}{\sin\varphi}\Big| = \Big|\frac{\sin(\varphi/2)}{2\cos^3(\varphi/2)}\Big|.$$

Z warunków początkowych (1.11) wynika, że dla $\varphi = \pi/2$ współrzędna $\rho = H$. Wstawiając te wartości do powyższego równania uzyskujemy

$$c = \frac{1}{H},$$

zatem

$$\rho(\varphi) = H\Big|\frac{\operatorname{tg}^2(\varphi/2)}{\sin\varphi}\Big| = H\Big|\frac{\sin(\varphi/2)}{2\cos^3(\varphi/2)}\Big|. \tag{1.15}$$

Przypomnijmy sobie teraz, że funkcja $\varphi(t)$ spełnia $\varphi(0) = \pi/2$ i jest malejąca tak długo, jak $\varphi \in]0, \pi/2]$ i $\rho \neq 0$. Z (1.15) wynika, że dla $\varphi \in]0, \pi/2]$ zachodzi $\rho \neq 0$ oraz

$$\rho(\varphi = 0) = 0. \tag{1.16}$$

Z drugiej strony $\rho = 0$ implikuje, że $\bar{x} = 0 = \bar{z}$ (patrz (1.7)), to zaś na mocy (1.4) oznacza, że współrzędne (x, z) rakiety są równe współrzędnym dronu (patrz (1.1)). Zatem $\rho = 0$ odpowiada chwili uderzenia rakiety w dron.

Z powyższych rozważań płynie wniosek, że podczas całego ruchu rakiety (tzn. od jej wystrzelenia do uderzenia w dron) jej współrzędna φ maleje od wartości $\pi/2$ do niższych, nie dochodząc jednak do wartości ujemnych. Dla tego zakresu współrzędnej φ wartość obu wyrażeń pod modułami w (1.15) jest nieujemna, co pozwala nam te moduły opuścić. Zatem podczas ruchu rakiety

$$\rho(\varphi) = H \frac{\mathrm{tg}^2(\varphi/2)}{\sin\varphi} = \frac{H}{2} \frac{\sin(\varphi/2)}{\cos^3(\varphi/2)}. \tag{1.17}$$

Zależność $\varphi(t)$ Podstawiając (1.17) do (1.12) otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{\cos^4(\varphi/2)} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{4v_0}{H}.$$

Odcałkowanie jego obydwu stron po czasie t daje

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^4(\varphi/2)} = -\frac{4v_0}{H} t + \frac{2C}{3}, \tag{1.18}$$

gdzie $2C/3$ jest stałą całkowania. W celu policzenia całki po φ podstawiamy[1]

$$u = \mathrm{tg}(\varphi/2) \tag{1.19}$$

uzyskując w rezultacie

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^4(\varphi/2)} = 2 \int (1 + u^2)\, du = 2(u + \frac{1}{3} u^3).$$

Podstawiając powyższy wynik do (1.18) otrzymujemy

$$u^3 + 3u = -\frac{6v_0}{H} t + C.$$

Warunek początkowy na φ (patrz (1.11)) i definicja (1.19) zmiennej u dają warunek $u(t = 0) = 1$. Wstawiając go do powyższego równania wyliczamy stałą całkowania:

$$4 = C,$$

zatem

$$u^3 + 3u + \frac{6v_0}{H} t - 4 = 0. \tag{1.20}$$

Aby uzyskać zależność $u(t)$ należy rozwiązać względem u powyższe równanie, będące równaniem 3-go rzędu. Wiadomo, że jeśli równanie 3-go rzędu ma postać

$$u^3 + 3pu + 2q = 0$$

gdzie

$$p^3 + q^2 > 0, \tag{1.21}$$

[1] To nie jest podstawienie "tangens połówkowy", ponieważ w całce mamy $\cos(\varphi/2)$, a nie $\cos\varphi$.

to równanie to ma dokładnie jedno (rzeczywiste) rozwiązanie dane wzorem

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{p^3 + q^2}}.$$

W przypadku równania (1.20)

$$p = 1, \qquad\qquad q = \frac{3v_0}{H}t - 2$$

i w konsekwencji warunek (1.21) jest spełniony. Rozwiązaniem równania (1.20) jest zatem

$$u(t) = \sqrt[3]{2 - 3v_0t/H + \sqrt{1 + (2 - 3v_0t/H)^2}} + \sqrt[3]{2 - 3v_0t/H - \sqrt{1 + (2 - 3v_0t/H)^2}}. \tag{1.22}$$

Korzystając z powyższego i z (1.19) można bez trudu wyznaczyć zależność $\varphi(t)$ w postaci jawnej, jednakże nie będzie nam ona potrzebna.

Ruch rakiety w wyjściowych współrzędnych (x, z) Korzystając z zależności funkcji $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ od $\mathrm{tg}(\varphi/2)$ znanej chociażby z podstawienia "tangens połówkowy" możemy wyrazić te dwie pierwsze funkcje za pomocą zmiennej u (patrz (1.19)):

$$\sin\varphi = \frac{2u}{1 + u^2}, \qquad\qquad \cos\varphi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Z drugiej strony, korzystając z (1.17), pierwszego z powyższych wzorów oraz z (1.19) dostajemy

$$\rho(\varphi) = \frac{H}{2}u(1 + u^2).$$

Powyższe wzory oraz definicje (1.7) i (1.4) pozwalają opisać ruchu rakiety w wyjściowych współrzędnych (x, z):

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0t - \frac{H}{2}u(t)\big(1 - u^2(t)\big), \\ z(t) &= H\big(1 - u^2(t)\big), \end{aligned}$$

gdzie zależność $u(t)$ dana jest wzorem (1.22).

Czas ruchu rakiety Wiemy już, że moment uderzenia rakiety w dron opisany jest warunkiem $\rho = 0$. Współrzędna ρ rakiety zeruje się wtedy, gdy zeruje się jej współrzędna φ — patrz (1.16). Z drugiej strony na mocy (1.19) zmienna u zeruje się dla $\varphi = 0$. Podstawiając $u = 0$ do (1.20) otrzymujemy chwilę t, w której rakieta uderza w dron:

$$t = \frac{2H}{3v_0}.$$

Ponieważ rakieta rozpoczyna ruch w $t = 0$, więc powyższa wartość jest jednocześnie szukanym czasem upływającym od wystrzelenia rakiety do uderzenia rakiety w dron.

Dygresja Jak już wiemy, wartość zmiennej u w chwili $t = 0$ wynosi 1. Podstawiając te wartości do (1.22) otrzymujemy

$$1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}.$$

Nie jest to może zbyt praktyczny sposób przedstawienia liczby 1, ale można go sobie zapamiętać jako ciekawostkę zawodową 😊.

$\square$

Andrzej Okołów