

Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

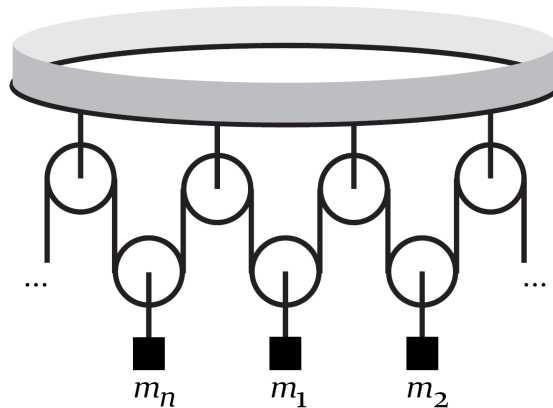
Zadania na ćwiczenia – seria 3 (z rozwiązaniami).

23 marca 2020 r.

Zadania przykładowe

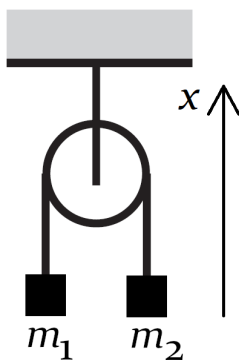
Przykład 1.

Rozważmy układ $2n$ bloczków i n ciężarków przedstawiony na rys. 1. Bloczki rozmieszczone są równomiernie na okręgu. Te z nich, które przymocowane są do sufitu, nie wykonują ruchu postępowego, mogą jednak obracać się wokół własnej osi; te zaś, które zawieszono są na nici, mogą dodatkowo poruszać się w kierunku pionowym. Nicię przerzuconą przez bloczki tworzy pętlę – jej końce są trwale połączone. Ciężarki mają masy m_1, m_2, \dots, m_n i zawieszono są na niciach, których drugie końce przymocowane są do osi bloczków. Wszystkie bloczki są identyczne, nieważkie i obracają się wokół własnej osi bez tarcia, a osie ich obrotów usytuowane są poziomo; wszystkie nici są nierozciągliwe i nieważkie. Znaleźć przyspieszenie każdego z ciężarków.



Rys. 1. Układ mechaniczny z przykładu 1.

Rozwiązanie.



Rys. 2. Najprostsza maszyna Atwooda.

Układy mechaniczne takie, jak ten z treści zadania, złożone z połączonych niemi bloczków i ciężarków, zwykle się nazywało *maszynami Atwooda* lub *spadkownicami Atwooda* na cześć George'a Atwooda (1745 – 1807), angielskiego matematyka, który w 1784 roku skonstruował pierwsze tego typu urządzenie, złożone z jednego bloczka i dwóch ciężarków, i za jego pomocą badał podstawowe prawa rządzące ruchem. Zanim przeanalizujemy układ z treści zadania, przyjrzymy się najpierw prostszym maszynom Atwooda, by nabrać pewnego wyczucia.

Zauważmy na samym początku, że dzięki zakładanej przez nas nieważkości bloczków i nici – oznaczającej, że elementy te mają masy zaniedbywalnie małe w porównaniu z masami ciężarków – nie musimy pisać równań opisujących ruch tych elementów, możemy skupić się wyłącznie na ruchu ciężarków.

Prosta maszyna Atwooda. Najprostsza maszyna Atwooda zbudowana jest z dwóch ciężarków (oznacmy ich masy przez m_1 i m_2) połączonych nicią przerzuconą przez bloczek (rys. 2.). Załóżmy, że oba ciężarki poruszają się wyłącznie w kierunku pionowym, zagadnienie staje się wówczas jednowymiarowe. Przyjmijmy jako dodatni zwrot „do góry”, tak, jak zaznaczono na rysunku. Z nierozciągliwości nici (oznaczającej po prostu, że długość nici nie ulega zmianie)

wynika, że drogi przebyte przez każdy z ciężarków w ustalonym przedziale czasu muszą być takie same – jeśli jeden z ciężarków przemieści się np. o 3 cm w dół, drugi musi w tym samym czasie przemieścić się o 3 cm do góry. Identyczne muszą być zatem także wartości prędkości i przyspieszeń ciężarków, ich zwroty są natomiast przeciwne (gdy jeden z ciężarków porusza się do góry, drugi porusza się w dół). Tak więc, jeśli oznaczymy przez a_1 przyspieszenie ciężarka o masie m_1 , zaś przez a_2 – przyspieszenie ciężarka o masie m_2 , możemy napisać

$$a_1 = -a_2. \quad (\text{P1.1})$$

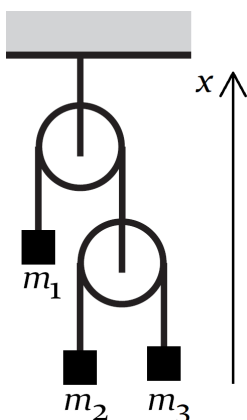
Na każdy z ciężarków działają dwie siły: skierowany w dół ciężar, równy $Q_1 = m_1g$ dla pierwszego ciężarka i $Q_2 = m_2g$ dla drugiego, oraz skierowany do góry naciąg nici łączącej ciężarki, N , którego wartości nie znamy. Wynikające z II zasady dynamiki równania ruchu $F = ma$ przyjmują zatem postać:

$$\begin{aligned} \text{dla pierwszego ciężarka:} \quad & N - m_1g = m_1a_1, \\ \text{dla drugiego ciężarka:} \quad & N - m_2g = m_2a_2. \end{aligned} \quad (\text{P1.2})$$

Równania te wraz z (P1.1) tworzą układ trzech równań na trzy niewiadome: a_1 , a_2 i N . Pozostaje nam zatem rozwiązać ten układ. Proste przekształcenia algebraiczne prowadzą do ostatecznego wyniku:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g, \\ a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g, \\ N = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g. \end{cases} \quad (\text{P1.3})$$

Warto jeszcze na koniec zastanowić się, czy otrzymane wyniki są zgodne z intuicją. Gdy $m_1 = m_2$, na mocy (P1.3) maszyna pozostaje w spoczynku: $a_1 = a_2 = 0$. W sytuacji, gdy $m_1 > m_2$, otrzymujemy $a_1 < 0$ i $a_2 > 0$, ciężarek pierwszy porusza się więc w dół (jego przyspieszenie jest skierowane przeciwie niż oś pionowa, dla której wybraliśmy zwrot „do góry”), drugi zaś – do góry. Jeśli $m_1 \gg m_2$ (czyli masa ciężarka drugiego jest zanedbywalnie mała w porównaniu z masą ciężarka pierwszego), dostajemy $a_1 \approx -g$, ciężarek pierwszy w przybliżeniu spada więc swobodnie. Tego właśnie należało się spodziewać.



Rys. 3. Podwójna maszyna Atwooda.

Podwójna maszyna Atwooda. Po dokładnym przeanalizowaniu najprostszej maszyny Atwooda skomplikujemy teraz nieco sytuację i zastąpimy jeden z ciężarków drugim bloczkiem z zawieszonymi na nim ciężarkami (rys. 3.). Oznaczmy przyspieszenie ciężarka o masie m_i , gdzie $i = 1, 2, 3$ jest numerem ciężarka, przez a_i . Niech (nieznany nam jeszcze) naciąg nici przerzuconej przez dolny bloczek będzie równy N , wówczas naciąg nici przerzuconej przez górny bloczek wynosi $2N$ – wynika to z konieczności równoważenia się sił działających na dolny bloczek. Równania Newtona przybierają więc postać:

$$\begin{aligned} \text{dla pierwszego ciężarka:} \quad & 2N - m_1g = m_1a_1, \\ \text{dla drugiego ciężarka:} \quad & N - m_2g = m_2a_2, \\ \text{dla trzeciego ciężarka:} \quad & N - m_3g = m_3a_3. \end{aligned} \quad (\text{P1.4})$$

Korzystając z nierozciągliwości nici możemy jeszcze zapisać równanie wiążące ze sobą przyspieszenia ciężarków, będące odpowiednikiem równania (P1.1). Ma ono postać

$$a_1 = -\frac{a_2 + a_3}{2}. \quad (\text{P1.5})$$

Wzór ten wynika z faktu, że w ustalonym przedziale czasu „uśrednione położenie” ciężarków drugiego i trzeciego (czyli średnia arytmetyczna ich położenia)

zmienia się o tyle, co położenie dolnego bloczka; dolny bloczek z kolei pokonuje drogę taką samą, jak pierwszy ciężarek. Otrzymujemy zatem ostatecznie układ czterech równań, złożony z trzech równań ruchu (P1.4) i równania (P1.5), na cztery niewiadome: a_1 , a_2 , a_3 i N . Rozwiązanie tego układu to

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g, \\ a_2 = -\frac{4m_2m_3 + m_1(m_2 - 3m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g, \\ a_3 = -\frac{4m_2m_3 + m_1(m_3 - 3m_2)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}g. \end{cases} \quad (\text{P1.6})$$

(pominęliśmy tu wzór na N , ponieważ nie interesują nas naciągi nici). Zwróćmy uwagę, że gdy $m_2 = m_3 = \frac{1}{2}m_1$, wszystkie przyspieszenia znikają i maszyna pozostaje w spoczynku, jak należało oczekiwać.

Maszyna Atwooda na okręgu. Jesteśmy już gotowi, by zmierzyć się z maszyną Atwooda z treści zadania. Niech indeks $i = 1, 2, \dots, n$ numeruje ciężarki. Oznaczmy przez a_i przyspieszenie ciężarka o masie m_i . Niech naciąg nici przerzuconej przez bloczki będzie równy N ; naciągi nici, na których zawieszono są ciężarki, wynoszą wówczas $2N$ – wynika to z równoważenia się sił działających na bloczki, do których przymocowane są ciężarki. Na każdy z ciężarków działają zatem dwie siły: ciężar $Q_i = m_i g$, skierowany do dołu, oraz siła naciągu nici, równa $2N$ i skierowana do góry. Równanie Newtona dla i -tego ciężarka ma zatem postać

$$2N - m_i g = m_i a_i \quad (\text{P1.7})$$

(przyjęliśmy tu, jak zwykle, zwrot „do góry” jako dodatni). Nierozciągliwość nici pozwala, jak zawsze, powiązać ze sobą przyspieszenia ciężarków: skoro długość nici przerzuconej przez bloczki nie ulega zmianie, suma przemieszczeń (wziętych z odpowiednim znakiem) wszystkich ciężarków musi się równać zeru; zeru musi się zatem także równać suma ich przyspieszeń:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0. \quad (\text{P1.8})$$

n równań Newtona (P1.7) i związek (P1.8) tworzą układ $n + 1$ równań na $n + 1$ niewiadomych a_1, a_2, \dots, a_n i N . Jedyne, co pozostało nam do zrobienia, to znalezienie rozwiązania tego układu.

Cel ten najprościej jest osiągnąć w następujący sposób. Najpierw podzielmy obie strony każdego z równań (P1.7) przez m_i , a następnie dodajmy do siebie wszystkie te równania stronami. Wykorzystując zależność (P1.8) do uproszczenia prawej strony otrzymanego w ten sposób równania, możemy przedstawić je w postaci

$$2N \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} \right) - ng = 0. \quad (\text{P1.9})$$

Wprowadźmy teraz pomocniczą wielkość M , nazywaną *masą zredukowaną układu mas* m_1, m_2, \dots, m_n i zdefiniowaną wzorem

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}. \quad (\text{P1.10})$$

Równanie (P1.9) przyjmuje dzięki temu postać

$$\frac{2N}{M} - ng = 0, \quad \text{skąd} \quad N = \frac{nMg}{2}. \quad (\text{P1.11})$$

Wstawiając tę wartość N do (P1.7), otrzymujemy ostatecznie szukany wzór na przyspieszenie i -tego ciężarka:

$$a_i = g \left(\frac{Mn}{m_i} - 1 \right). \quad (\text{P1.12})$$

Warto zauważyć, że gdy $m_1 = m_2 = \dots = m_n$, wszystkie przyspieszenia znikają i maszyna pozostaje w spoczynku.

Przykład 2.

Na cząstkę o ładunku q poruszającą się z prędkością \mathbf{v} w polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} działa siła

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Rozważmy cząstkę o masie m i ładunku q poruszającą się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z, B = \text{const}$. Położenie początkowe cząstki jest równe \mathbf{r}_0 , zaś jej prędkość początkowa to \mathbf{v}_0 . Znaleźć ruch cząstki.

Rozwiązanie.

W celu wyznaczenia ruchu cząstki zapiszemy i rozwiążemy opisujące jej dynamikę równanie Newtona. Zgodnie z treścią zadania, całkowita siła działająca na cząstkę to $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, równanie Newtona $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ przyjmując zatem postać

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (\text{P2.1})$$

Pojawiające się po lewej stronie tego równania przyspieszenie cząstki \mathbf{a} możemy teraz, na mocy jego definicji, zapisać jako pochodną czasową prędkości cząstki \mathbf{v} lub drugą pochodną czasową wektora wodzącego cząstki \mathbf{r} . Prawa strona równania (P2.1) zależy wyłącznie od prędkości cząstki (a nie zależy od jej położenia), zdecydowanie lepiej jest więc wybrać tę pierwszą możliwość: podstawiając $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, sprowadzimy (P2.1) do wektorowego równania różniczkowego pierwszego rzędu na \mathbf{v} :

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (\text{P2.2})$$

Najprostszym sposobem rozwiązania tego równania jest rozpisanie go na składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych. Mamy

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \quad (\text{P2.3})$$

zatem

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = (v_y B, -v_x B, 0). \quad (\text{P2.4})$$

Równanie wektorowe (P2.2) jest więc równoważne układowi trzech równań skalarnych

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qBv_y, \\ m\dot{v}_y = -qBv_x, \\ m\dot{v}_z = 0. \end{cases} \quad (\text{P2.5})$$

Trzecie z nich ma szczególnie prostą postać:

$$m\dot{v}_z = 0.$$

Dzieląc je stronami przez m i całkując, otrzymujemy

$$v_z(t) = C = \text{const}. \quad (\text{P2.6})$$

Trzecia składowa prędkości cząstki jest zatem stała w trakcie ruchu – ruch cząstki w kierunku osi Oz jest ruchem jednostajnym. Wartość stałej całkowania C łatwo jest wyznaczyć z warunków początkowych: w chwili początkowej (przyjmijmy, że odpowiada jej czas $t = 0$) prędkość cząstki $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$, zatem jej trzecia składowa wynosiła $v_z(0) = v_{0z}$. Podstawiając w (P2.6) $t = 0$ dostajemy $C = v_{0z}$ i ostatecznie

$$v_z(t) = v_{0z} = \text{const}. \quad (\text{P2.7})$$

Wróćmy teraz do równań na składowe v_x i v_y , czyli pierwszych dwóch spośród równań (P2.5):

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qBv_y, \\ m\dot{v}_y = -qBv_x. \end{cases} \quad (\text{P2.8})$$

Zacniemy od ich uproszczenia. Po obustronnym podzieleniu przez m i wprowadzeniu parametru

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (\text{P2.9})$$

określanego mianem *częstości cyklotronowej*, równania (P2.8) przyjmują postać

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y, \\ \dot{v}_y = -\omega v_x. \end{cases} \quad (\text{P2.10})$$

Równania te są sprzężone – oba zawierają zarówno v_x , jak i v_y . Układ takich równań można rozwiązać na kilka różnych sposobów; przedstawimy tu jeden z nich, być może najbardziej intuicyjny.

Różniczkując pierwsze z równań (P2.10) po czasie, otrzymujemy

$$\ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y. \quad (\text{P2.11})$$

W miejsce \dot{v}_y po prawej stronie (P2.11) wstawimy teraz prawą stronę drugiego z równań (P2.10), otrzymując równanie różniczkowe drugiego rzędu zawierające tylko składową v_x :

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x. \quad (\text{P2.12})$$

Nie będziemy tu rozwiązywać tego równania, równanie tej postaci, nazywane *równaniem oscylatora harmonicznego*, odgrywa bowiem ogromną rolę w mechanice (i w całej fizyce) i sposoby jego rozwiązywania zostaną szczegółowo omówione w dalszej części wykładu. Tu ograniczymy się jedynie do podania rozwiązania równania (P2.12). Ma ono postać

$$v_x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t; \quad (\text{P2.13})$$

A_1 i A_2 to stałe całkowania. Mając już pierwszą składową prędkości cząstki, zajmiemy się teraz wyznaczeniem drugiej. Z pierwszego z równań (P2.10) otrzymujemy $v_y = \frac{1}{\omega} \dot{v}_x$, zatem

$$v_y(t) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) = -A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t. \quad (\text{P2.14})$$

Na mocy warunków początkowych

$$\begin{aligned} v_x(0) &= v_{0x}, & \text{czyli} & & A_1 &= v_{0x}, \\ v_y(0) &= v_{0y}, & \text{czyli} & & A_2 &= v_{0y}, \end{aligned} \quad (\text{P2.15})$$

tak więc ostatecznie

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \cos \omega t + v_{0y} \sin \omega t, \\ v_y(t) = -v_{0x} \sin \omega t + v_{0y} \cos \omega t. \end{cases} \quad (\text{P2.16})$$

Gdy mamy już składowe prędkości (P2.16) i (P2.7), pozostaje nam tylko je scałkować, by otrzymać składowe wektora wodzącego:

$$\begin{cases} x(t) = \int v_x(t) dt = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t - \frac{v_{0y}}{\omega} \cos \omega t + C_1, \\ y(t) = \int v_y(t) dt = \frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t + C_2, \\ z(t) = \int v_z(t) dt = v_{0z} t + C_3. \end{cases} \quad (\text{P2.17})$$

Z warunków początkowych

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & \text{czyli} & & C_1 &= x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}, \\ y(0) &= y_0, & \text{czyli} & & C_2 &= y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}, \\ z(0) &= z_0, & \text{czyli} & & C_3 &= z_0, \end{aligned} \quad (\text{P2.18})$$

zatem

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} (1 - \cos \omega t), \\ y(t) = y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1) + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t, \\ z(t) = z_0 + v_{0z} t. \end{cases} \quad (\text{P2.19})$$

Podstawiając (P2.9), otrzymujemy ostatecznie zależności opisujące ruch cząstki:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{mv_{0x}}{qB} \sin \frac{qB}{m} t + \frac{mv_{0y}}{qB} \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t \right), \\ y(t) = y_0 + \frac{mv_{0x}}{qB} \left(\cos \frac{qB}{m} t - 1 \right) + \frac{mv_{0y}}{qB} \sin \frac{qB}{m} t, \\ z(t) = z_0 + v_{0z} t. \end{cases} \quad (\text{P2.20})$$

Przykład 3.

W kopalni położonej na szerokości geograficznej ϕ wykopano szyb o głębokości H . Z powierzchni Ziemi rzucono do niego niewielki kamień, nie nadając mu prędkości początkowej. Uwzględniając efekty wynikające z ruchu obrotowego Ziemi, znaleźć odchylenie toru kamienia od pionu w chwili, gdy spadnie on na dno szybu, z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu w prędkości kątowej ruchu obrotowego Ziemi.

Rozwiązanie.

Na samym początku zdefiniujemy układ odniesienia, którym będziemy się posługiwać. Przyjmijmy, że układ ten obraca się wraz z Ziemią, jego początek pokrywa się ze środkiem Ziemi, zaś oś Oz – z osią obrotu Ziemi. Niech $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ będzie prędkością kątową ruchu obrotowego Ziemi. Oznaczmy przez \mathbf{r} wektor wodzący kamienia. Dla wygody, zamiast szerokości geograficznej ϕ , mierzonej od równika, w dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy jej dopełnieniem θ , czyli kątem mierzonym od bieguna, związanym z szerokością geograficzną zależnością

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi. \quad (\text{P3.1})$$

Jest to oczywiście kąt, który wykorzystuje się zwykle jako jedną ze współrzędnych sferycznych.

Układ odniesienia związany z obracającą się Ziemią jest układem nieinercyjnym – korzystając z II zasady dynamiki musimy więc pamiętać o uwzględnieniu, oprócz rzeczywistej siły \mathbf{F} działającej na kamień, także sił pozornych: siły odśrodkowej $\mathbf{F}_{\text{odśrodkowa}}$ i siły Coriolisa $\mathbf{F}_{\text{Coriolisa}}$. Równanie ruchu przyjmuje zatem postać

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{odśrodkowa}} + \mathbf{F}_{\text{Coriolisa}}; \quad (\text{P3.2})$$

m oznacza tu masę kamienia, zaś \mathbf{a} – jego przyspieszenie. Całkowita rzeczywista siła działająca na kamień to w naszym przypadku siła grawitacji

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}. \quad (\text{P3.3})$$

Siła odśrodkowa dana jest wzorem

$$\mathbf{F}_{\text{odśrodkowa}} = m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (\text{P3.4})$$

Jak wiemy z wykładu, efekty wynikające z istnienia siły odśrodkowej możemy najłatwiej uwzględnić, zastępując we wzorze na ciężar kamienia (P3.3) przyspieszenie ziemskie \mathbf{g} przez *przyspieszenie efektywne* \mathbf{g}_{eff} :

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{odśrodkowa}} = m\mathbf{g}_{\text{eff}}. \quad (\text{P3.5})$$

Wyrażenie na \mathbf{g}_{eff} znaleźć można w notatkach z wykładu – w naszych rozważaniach nie będzie ono odgrywało żadnej roli.

Siła Coriolisa, kluczowa w rozważanym zagadnieniu – to ona powoduje odchylenie od pionu toru swobodnie spadającego kamienia, dana jest wzorem

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolisa}} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (\text{P3.6})$$

Uwzględniając równości (P3.3) – (P3.6), równanie ruchu (P3.2) możemy przedstawić w postaci

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}_{\text{eff}} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (\text{P3.7})$$

Prawa strona otrzymanego równania zależy wyłącznie od prędkości kamienia, nie zależy zaś od jego położenia. Moglibyśmy zatem, tak, jak w przykładzie 2., podstawić $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ i przedstawić (P3.7) jako wektorowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu na \mathbf{v} , a następnie spróbować je rozwiązać. Postąpimy tu jednak inaczej. Dzieliąc równanie (P3.7) stronami przez m oraz wstawiając $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ i $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, otrzymujemy

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_{\text{eff}} + 2\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (\text{P3.8})$$

Zajmiemy się teraz szukaniem rozwiązań tego równania.

Na początku skorzystamy z faktu, że w równaniu (P3.8) nie pojawia się położenie kamienia \mathbf{r} , a tylko jego pochodne. Oznacza to, że postać tego równania nie zmieni się, gdy przesuniemy początek układu współrzędnych – transformacja taka odpowiada bowiem dodaniu do \mathbf{r} stałego wektora. Wykorzystamy ten fakt do wprowadzenia nowego, wygodniejszego układu współrzędnych. Jego początek będzie pokrywał się z tym punktem na dnie szybu, nad którym upuszczono kamień (gdyby więc Ziemia nie wykonywała ruchu obrotowego i nie istniałyby siły pozorne, kamień spadłby na dno właśnie w tym punkcie). Oś Oz nowego układu skierowana będzie pionowo „do góry” z punktu widzenia osoby stojącej na Ziemi; oś Oy – poziomo na północ, zaś oś Ox – poziomo na wschód. W tak zdefiniowanym układzie współrzędnych początkowe położenie kamienia opisuje wektor $\mathbf{r}_0 = (0, 0, H)$.

Rozpiszemy teraz równanie (P3.8) na składowe w nowym układzie odniesienia. Mamy

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \sin \theta, \Omega \cos \theta), \quad (\text{P3.9})$$

więc

$$\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & \Omega \sin \theta & \Omega \cos \theta \end{vmatrix} = (\dot{y}\Omega \cos \theta - \dot{z}\Omega \sin \theta, -\dot{x}\Omega \cos \theta, \dot{x}\Omega \sin \theta). \quad (\text{P3.10})$$

Równanie wektorowe (P3.8) jest zatem równoważne układowi trzech równań skalarnych

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega(\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta), \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x} \cos \theta, \\ \ddot{z} = -g_{\text{eff}} + 2\Omega\dot{x} \sin \theta. \end{cases} \quad (\text{P3.11})$$

Znajdziemy teraz przybliżone rozwiązania tego układu, opierając się na fakcie, że wartość prędkości kątowej ruchu obrotowego Ziemi Ω jest wielkością bardzo małą. W pierwszym kroku zaniedbamy całkowicie wpływ

ruchu obrotowego Ziemi, przyjmując $\Omega \approx 0$. Po zastosowaniu tego podstawienia układ (P3.11) redukuje się do

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = -g_{\text{eff}}. \end{cases} \quad (\text{P3.12})$$

Całkując dwukrotnie powyższe równania i wykorzystując warunki początkowe: $\mathbf{r}_0 = (0, 0, H)$, $\mathbf{v}_0 = (0, 0, 0)$, znajdujemy ruch kamienia w tym przybliżeniu:

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = H - \frac{1}{2}g_{\text{eff}}t^2. \end{cases} \quad (\text{P3.13})$$

Są to po prostu równania swobodnego spadku, nie ma tu żadnego odchylenia toru kamienia od pionu. Należało się tego spodziewać, wszak zaniedbaliśmy zupełnie wpływ ruchu obrotowego Ziemi, czyli fakt istnienia siły Coriolisa. Przybliżenie to określane jest mianem przybliżenia zerowego rzędu, ponieważ prędkość kątowna Ziemi pojawia się w (P3.13) wyłącznie w zerowej potędze (czyli w ogóle się nie pojawia).

Pójdźmy teraz o krok dalej i spróbujmy otrzymać lepsze przybliżenie. Skoro człony z Ω w równaniach (P3.11) są małe, nie popełnimy wielkiego błędu, jeśli obliczymy je, posługując się przybliżeniem (P3.13). Podstawiając (P3.13) po prawej stronie równań (P3.11), otrzymujemy

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega g_{\text{eff}}t \sin \theta, \\ \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = -g_{\text{eff}}. \end{cases} \quad (\text{P3.14})$$

Całkując te równania dwukrotnie i korzystając z warunków początkowych, dostajemy

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}\Omega g_{\text{eff}}t^3 \sin \theta, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = H - \frac{1}{2}g_{\text{eff}}t^2. \end{cases} \quad (\text{P3.15})$$

W przybliżeniu tym, określanym mianem przybliżenia pierwszego rzędu (Ω pojawia się w nim bowiem w potęgach nie większej niż pierwsza), widać już efekt istnienia siły Coriolisa: kamień nie spada pionowo w dół, tor jego spadku odchyła się nieznacznie w dodatnim kierunku osi Ox , czyli na wschód.

W celu otrzymania przybliżenia rzędu drugiego powinniśmy teraz podstawić (P3.15) po prawej stronie równań (P3.11), a następnie dwukrotnie scałkować otrzymane w ten sposób zależności. Moglibyśmy kontynuować tę procedurę dowolnie długo i dostawać coraz lepsze przybliżenia, treść zadania pozwala nam jednak poprzestać na przybliżeniu pierwszego rzędu.

Znajdziemy teraz odchylenie kamienia w chwili, gdy osiągnie on dno szybu. Musimy najpierw ustalić, po upływie jakiego czasu kamień znajdzie się na dnie. Oznaczmy ten czas przez T . Warunek $z(T) = 0$ daje

$$H - \frac{1}{2}g_{\text{eff}}T^2 = 0, \quad \text{czyli} \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g_{\text{eff}}}}. \quad (\text{P3.16})$$

Dochodzimy zatem do ostatecznego wniosku, że – z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu w prędkości kątownej ruchu obrotowego Ziemi – tor spadającego kamienia odchyli się od pionu na wschód, a w chwili

upadku kamienia na dno szybu odchylenie to będzie równe

$$d = x(T) = \frac{1}{3} \Omega g_{\text{eff}} \sqrt{\left(\frac{2H}{g_{\text{eff}}}\right)^3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right). \quad (\text{P3.17})$$

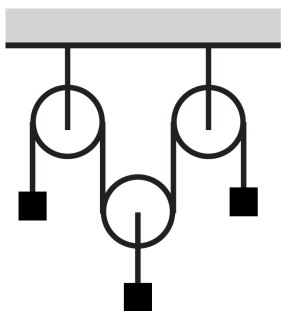
Wyraziliśmy tu ponownie kąt θ przez podaną w treści zadania szerokość geograficzną ϕ .

Interesujące jest to, jak wielki jest ten efekt. Przyjmijmy, że kopalnia znajduje się na równiku ($\phi = 0$), a szyb ma głębokość $H = 100$ m. Podstawiając przybliżone wartości $g_{\text{eff}} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\Omega \approx 7,3 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{s}}$, otrzymujemy

$$d \approx 2,2 \text{ cm}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.



Rys. 4. Układ mechaniczny z zadania 1.

Rozważmy układ złożony z trzech bloczków i trzech ciężarków przedstawiony na rys. 4. Bloczki rozmieszczone są równomiernie na prostej. Te z nich, które przymocowane są do sufitu, nie wykonują ruchu postępowego, mogą jednak obracać się wokół własnej osi; bloczek, który zawieszony jest na nici, może dodatkowo poruszać się w kierunku pionowym. Ciężarki mają identyczne masy. Środkowy ciężarek zawieszony jest na nici, której drugi koniec przymocowany jest do osi środkowego bloczka. Wszystkie bloczki są identyczne, nieważkie i obracają się wokół własnej osi bez tarcia, a osie ich obrotów usytuowane są poziomo; wszystkie nici są nierozciągliwe i nieważkie. Znaleźć przyspieszenie każdego z ciężarków.

Rozwiązanie.

Przyjmijmy, jak w przykładzie 1., zwrot „do góry” jako dodatni. Niech m będzie masą każdego z ciężarków, zaś N – naciągiem nici przerzuconej przez bloczki. Naciąg nici, na której zawieszony jest wewnętrzny ciężarek, jest równy $2N$, tak, by siły działające na wewnętrzny bloczek się równoważyły.

Na każdy z zewnętrznych ciężarków działają dwie siły: skierowany do dołu ciężar $Q = mg$ oraz skierowany do góry naciąg nici N . Całkowita siła działająca na każdy z tych ciężarków jest taka sama, zatem – na mocy II zasady dynamiki – muszą one poruszać się z takim samym przyspieszeniem; oznaczmy to przyspieszenie przez a_1 . Ruch obu ciężarków zewnętrznych jest więc opisany takim samym równaniem, wystarczy zatem, że zapiszemy tylko jedno równanie Newtona dla obu tych ciężarków. Wewnętrzny ciężarek również poddany jest działaniu dwóch sił: skierowanego do dołu ciężaru $Q = mg$ oraz skierowanego do góry naciągu nici, który tym razem równy jest $2N$. Niech jego przyspieszeniem będzie a_2 . Zgodnie z II zasadą dynamiki równania ruchu mają zatem postać:

$$\begin{aligned} \text{dla zewnętrznych ciężarków:} \quad N - mg &= ma_1, \\ \text{dla wewnętrznego ciężarka:} \quad 2N - mg &= ma_2. \end{aligned} \quad (\text{Z1.1})$$

Nierozciągliwość nici prowadzi do związku między przyspieszeniami:

$$2a_2 + a_1 + a_1 = 0, \quad \text{czyli} \quad a_2 = -a_1. \quad (\text{Z1.2})$$

Czynnik 2 stojący przy przyspieszeniu a_2 wynika z tego, że gdy wewnętrzny bloczek wraz z przymocowanym do niego ciężarkiem przemieści się na przykład o d do góry, wówczas w środkowej części układu „zniknie” fragment nici o długości $2d$ (zwisający pionowo fragment nici po lewej stronie wewnętrznego bloczka skróci

się o d , podobnie zwisający pionowo fragment nici po jego prawej stronie); oznacza to, że w zewnętrznych częściach układu muszą „pojawić się” fragmenty nici o łącznej długości $2d$ – ciężarki zewnętrzne przemieszczą się w dół, a suma ich przemieszczeń będzie równa $2d$.

Równania (Z1.1) i (Z1.2) tworzą układ trzech równań na trzy niewiadome: a_1 , a_2 i N . Rozwiązując go, otrzymujemy szukane przyspieszenia:

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{3}g, \\ a_2 = \frac{1}{3}g. \end{cases} \quad (\text{Z1.3})$$

Zadanie 2.

Na cząstkę o ładunku q poruszającą się z prędkością \mathbf{v} w polu elektrycznym o natężeniu \mathbf{E} oraz polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} działa siła

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Rozważmy cząstkę o masie m i ładunku q poruszającą się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_x$, $E = \text{const}$, i jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$, $B = \text{const}$. Położenie początkowe cząstki $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$, zaś jej prędkość początkowa $\mathbf{v}_0 = (0, v_{0y}, 0)$. Znaleźć ruch cząstki.

Wskazówka. Równania Newtona, podobnie jak w przykładzie 2., można tu zapisać w postaci układu równań różniczkowych na składowe prędkości cząstki. Równania dla składowych v_x i v_y najłatwiej rozwiązać, wprowadzając nowe zmienne u_x i u_y , zdefiniowane równościami

$$v_x = u_x, \quad v_y = u_y - \frac{E}{B},$$

i postępując dalej tak samo, jak w przykładzie 2.

Rozwiązanie.

Całkowita siła działająca na cząstkę to, zgodnie z treścią zadania, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, równanie ruchu $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ma więc postać

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{Z2.1})$$

Podstawiając $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, sprowadzimy (Z2.1) do wektorowego równania różniczkowego pierwszego rzędu na \mathbf{v} :

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{Z2.2})$$

Równanie to jest równoważne układowi trzech równań skalarnych

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qE + qBv_y, \\ m\dot{v}_y = -qBv_x, \\ m\dot{v}_z = 0. \end{cases} \quad (\text{Z2.3})$$

Trzecie z nich,

$$m\dot{v}_z = 0,$$

daje się rozwiązać przez bezpośrednie całkowanie. W wyniku otrzymujemy

$$v_z(t) = C = \text{const}. \quad (\text{Z2.4})$$

Trzecia składowa prędkości cząstki pozostaje więc stała w trakcie ruchu. Z warunków początkowych $v_z(0) = 0$, zatem $C = 0$ i ostatecznie

$$v_z(t) = 0. \quad (\text{Z2.5})$$

Cząstka nie wykonuje zatem ruchu w kierunku osi Oz .

Zajmiemy się teraz równaniami na składowe v_x i v_y , czyli pierwszymi dwoma spośród równań (Z2.3):

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qE + qBv_y, \\ m\dot{v}_y = -qBv_x. \end{cases} \quad (\text{Z2.6})$$

Zgodnie ze wskazówką do zadania, dokonamy w nich zamiany zmiennych: wprowadzimy nowe zmienne u_x i u_y , powiązane ze starymi zmiennymi v_x i v_y zależnościami

$$v_x = u_x, \quad v_y = u_y - \frac{E}{B}. \quad (\text{Z2.7})$$

Podstawiając (Z2.7) do (Z2.6), otrzymujemy

$$\begin{cases} m\dot{u}_x = qBu_y, \\ m\dot{u}_y = -qBu_x. \end{cases} \quad (\text{Z2.8})$$

Równania te mają postać identyczną jak równania, które otrzymaliśmy w przykładzie 2., możemy zatem rozwiązać je w ten sam sposób. Powtarzając rozumowanie z przykładu 2., otrzymujemy

$$\begin{cases} u_x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \\ u_y(t) = -A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \end{cases} \quad (\text{Z2.9})$$

gdzie częstość cyklotronowa

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (\text{Z2.10})$$

zaś A_1 i A_2 są stałymi całkowania. Korzystając z relacji (Z2.7), wracamy do oryginalnych zmiennych v_x i v_y :

$$\begin{cases} v_x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \\ v_y(t) = -A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t - \frac{E}{B}. \end{cases} \quad (\text{Z2.11})$$

Na mocy warunków początkowych

$$\begin{aligned} v_x(0) &= 0, & \text{czyli} & \quad A_1 = 0, \\ v_y(0) &= v_{0y}, & \text{czyli} & \quad A_2 = \frac{E}{B} + v_{0y}, \end{aligned} \quad (\text{Z2.12})$$

tak więc ostatecznie

$$\begin{cases} v_x(t) = \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right) \sin \omega t, \\ v_y(t) = \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right) \cos \omega t - \frac{E}{B}. \end{cases} \quad (\text{Z2.13})$$

Pozostaje nam już tylko scałkować składowe prędkości (Z2.13) i (Z2.5), by otrzymać składowe wektora wodzącego:

$$\begin{cases} x(t) = \int v_x(t) dt = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right) \cos \omega t + C_1, \\ y(t) = \int v_y(t) dt = \frac{1}{\omega} \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right) \sin \omega t - \frac{E}{B}t + C_2, \\ z(t) = \int v_z(t) dt = C_3. \end{cases} \quad (\text{Z2.14})$$

Z warunków początkowych

$$\begin{aligned} x(0) = 0, & \quad \text{czyli} \quad C_1 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right), \\ y(0) = 0, & \quad \text{czyli} \quad C_2 = 0, \\ z(0) = 0, & \quad \text{czyli} \quad C_3 = 0, \end{aligned} \tag{Z2.15}$$

zatem

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right) (1 - \cos \omega t), \\ y(t) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right) \sin \omega t - \frac{E}{B} t, \\ z(t) = 0. \end{cases} \tag{Z2.16}$$

Wstawiając (Z2.10), otrzymujemy ostatecznie zależności opisujące ruch cząstki:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{m}{qB} \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right) \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t \right), \\ y(t) = \frac{m}{qB} \left(\frac{E}{B} + v_{0y} \right) \sin \frac{qB}{m} t - \frac{E}{B} t, \\ z(t) = 0. \end{cases} \tag{Z2.17}$$

Zadanie 3.

Piłka została rzucona z prędkością początkową \mathbf{v}_0 z powierzchni Ziemi na szerokości geograficznej ϕ . Uwzględniając efekty wynikające z ruchu obrotowego Ziemi, znaleźć ruch piłki $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu w prędkości kątowej ruchu obrotowego Ziemi. Pominąć opory powietrza i przyjąć, że przyspieszenie Ziemskie \mathbf{g} jest stałe.

Rozwiązanie.

Rozwiązanie tego problemu przebiega niemal identycznie jak w przykładzie 3. – jedyną różnicą są inne warunki początkowe.

Niech, jak w przykładzie 3., $\boldsymbol{\Omega}$ będzie prędkością kątową ruchu obrotowego Ziemi, zaś \mathbf{r} – wektorem wodzącym piłki. Wprowadźmy ponadto pomocniczy kąt $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$. Powtarzając rozumowanie z przykładu 3., znajdujemy równanie ruchu

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}_{\text{eff}} + 2\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega} \tag{Z3.1}$$

(por. (P3.8)). \mathbf{g}_{eff} oznacza tu efektywne przyspieszenie Ziemskie, uwzględniające efekty wynikające z istnienia siły odśrodkowej.

Możemy teraz, nadal naśladowując rozumowanie z przykładu 3., wprowadzić nowy, wygodniejszy układ współrzędnych. Niech jego początek pokrywa się z punktem na powierzchni Ziemi, w którym w chwili początkowej znajdowała się piłka, jego osie zaś niech będą określone tak, jak w przykładzie 3. W tak zdefiniowanym układzie zachodzą równości (P3.9) i (P3.10), równanie wektorowe (Z3.1) jest zatem równoważne układowi trzech równań skalarnych identycznych z (P3.11):

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega(\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta), \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x} \cos \theta, \\ \ddot{z} = -g_{\text{eff}} + 2\Omega\dot{x} \sin \theta. \end{cases} \tag{Z3.2}$$

Warunki początkowe, określone dla $t = 0$, w nowym układzie przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \text{położenie początkowe:} \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 &= (0, 0, 0), \\ \text{prędkość początkowa:} \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 &= (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}). \end{aligned} \tag{Z3.3}$$

Szukanie przybliżonych rozwiązań tego równania możemy przeprowadzić w sposób identyczny, jak w przykładzie 3., pamiętając, że tym razem warunki początkowe to (Z3.3). Przybliżenie zerowego rzędu otrzymujemy, podstawiając $\Omega \approx 0$ po prawej stronie równań (Z3.2):

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = -g_{\text{eff}}, \end{cases} \quad (\text{Z3.4})$$

a następnie całkując dwukrotnie otrzymane równania (Z3.4) i uwzględniając warunki początkowe (Z3.3):

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t, \\ y(t) = v_{0y}t, \\ z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}g_{\text{eff}}t^2. \end{cases} \quad (\text{Z3.5})$$

W następnym kroku podstawiamy (Z3.5) po prawej stronie równań (Z3.2), otrzymując

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega(v_{0y}\cos\theta - v_{0z}\sin\theta + g_{\text{eff}}t\sin\theta), \\ \ddot{y} = -2\Omega v_{0x}\cos\theta, \\ \ddot{z} = -g_{\text{eff}} + 2\Omega v_{0x}\sin\theta. \end{cases} \quad (\text{Z3.6})$$

Całkując te równania dwukrotnie, korzystając z warunków początkowych (Z3.3) i podstawiając $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$, dostajemy ruch piłki w przybliżeniu pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t + \Omega\left(v_{0y}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - v_{0z}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right)t^2 + \frac{1}{3}\Omega g_{\text{eff}}t^3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right), \\ y(t) = v_{0y}t - \Omega v_{0x}t^2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right), \\ z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}g_{\text{eff}}t^2 + \Omega v_{0x}t^2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right). \end{cases} \quad (\text{Z3.7})$$

Bartłomiej Zglinicki

Bibliografia.

- [1] Królikowski W., Rubinowicz W., *Mechanika teoretyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
- [2] Taylor J.R., *Mechanika klasyczna*, t. I, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
- [3] Morin D., *Introduction to Classical Mechanics with problems and solutions*, Cambridge University Press, Nowy Jork 2007.