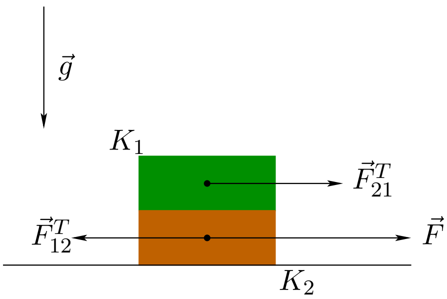
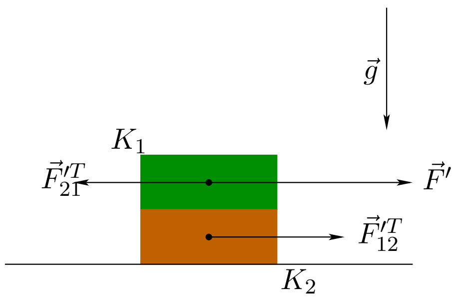
Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 3
23 marca 2020

Zadanie 1. Klocek K_1 o masie $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$ spoczywa na klocku K_2 o masie $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$, który z kolei spoczywa na poziomej powierzchni. Pomiędzy tą powierzchnią a klockiem K_2 nie występuje tarcie. Współczynnik tarcia statycznego między klockami jest zaś taki, że klocek K_1 zaczyna się ślizgać, gdy tylko wartość poziomej siły przyłożonej do klocka K_2 przekroczy $20\,\mathrm{N}$. Jaka jest maksymalna wartość siły, z jaką można ciągnąć w kierunku poziomym klocek K_1 tak, aby oba klocki poruszały się bez wzajemnego poślizgu?



Rys. 1: Siła $\vec{F}$ przyłożona do K_2



Rys. 2: Siła $\vec{F}'$ przyłożona do K_1

Rozwiązanie. Klocki K_1 i K_2 są dociśnięte do siebie na skutek działania siły grawitacji i siły sprężystości podłoża. Na skutek tego w chwili przyłożenia do klocka K_2 siły $\vec{F}$ o wartości nie większej od $20\,\mathrm{N}$ (rysunek 1) pojawią się siły tarcia statycznego: $\vec{F}^T_{12}$ jest siłą tarcia, z jaką klocek K_1 działa na klocek K_2, a $\vec{F}^T_{21}$ jest siłą tarcia, z jaką klocek K_2 działa na klocek K_1. Na mocy III zasady dynamiki Newtona

$$\vec{F}^T_{12} + \vec{F}^T_{21} = 0. \tag{1.1}$$

Siły tarcia powodują, że oba klocki pozostają względem siebie w spoczynku i w rezultacie poruszają się w poziomie z tym samym przyspieszenie $\vec{a}$. Ich równania ruchu (w płaszczyźnie poziomej) mają postać:

$$\begin{aligned} m_1\vec{a} &= \vec{F}^T_{21}, \\ m_2\vec{a} &= \vec{F}^T_{12} + \vec{F}. \end{aligned}$$

Wyliczając z obu równań przyspieszenie $\vec{a}$ i porównując otrzymane wyrażenia dostajemy

$$\frac{1}{m_1}\vec{F}^T_{21} = \frac{1}{m_2}(\vec{F}^T_{12} + \vec{F}).$$

Wykorzystując równanie (1.1) uzyskujemy równość

$$|\vec{F}^T_{21}| = \frac{m_1}{m_1 + m_2}|\vec{F}|. \tag{1.2}$$

W analogiczny sposób, w oparciu o rysunek 2 wyprowadzamy następującą zależność:

$$|\vec{F}'^T_{21}| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\vec{F}'|. \tag{1.3}$$

Wielkości po lewej stronie równań (1.2) i (1.3) to wartości siły tarcia statycznego pomiędzy klockami w dwóch różnych sytuacjach zobrazowanych na rysunkach 1 i 2. Ale maksymalna wartość $|\vec{F}^T_{21}|_{\max}$ tej siły jest jedna (przy ustalonej sile dociskającej jeden klocek do drugiego). Ta maksymalna wartość odpowiada (*i*) maksymalnej wartości $|\vec{F}|_{\max}$ siły, jaką możemy przyłożyć do klocka K_2, nie dopuszczając do poślizgu pomiędzy klockami i (*ii*) maksymalnej wartości $|\vec{F}'|_{\max}$ siły, jaką możemy przyłożyć do klocka K_1, nie dopuszczając do poślizgu pomiędzy klockami. Zatem

$$|\vec{F}^T_{21}|_{\max} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}|\vec{F}|_{\max},$$
$$|\vec{F}^T_{21}|_{\max} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\vec{F}'|_{\max}.$$

Mamy stąd

$$|\vec{F}'|_{\max} = \frac{m_1}{m_2}|\vec{F}|_{\max}.$$

Ponieważ $|\vec{F}|_{\max} = 20\,\mathrm{N}$ to szukana wartość maksymalnej siły, jaką możemy przyłożyć do klocka K_1 wynosi

$$|\vec{F}'|_{\max} = 16\,\mathrm{N}.$$

□

Zadanie 2. Trójwymiarowy izotropowy oscylator harmoniczny Punkt materialny P o masie m poddany jest działaniu siły

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \tag{2.1}$$

gdzie $k > 0$ jest stałą, a $\vec{r}$ wektorem wodzącym punktu materialnego P. Znaleźć i przedyskutować ruch punktu P.

Rozwiązanie. Siła[1] (2.1) jest wprost proporcjonalna i przeciwnie skierowana do wektora wodzącego $\vec{r}$ — siłę taką nazywamy *siłą elastyczną*, a punkt materialny poddany takiej sile nazywamy *izotropowym oscylatorem harmonicznym*, gdzie przymiotnik "izotropowy" oznacza, że siła (2.1) nie wyróżnia żadnej prostej (żadnego kierunku) przechodzącej przez punkt $\vec{r} = 0$.

Wprowadzając kartezjański układ współrzędnych (x, y, z) w ten sposób, że jego początek pokrywa się z punktem zaczepienia wektora wodzącego, możemy równanie ruchu

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

z siłą (2.1) zapisać w postaci trzech równań różniczkowych

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky, \\ m\ddot{z} &= -kz. \end{aligned} \tag{2.2}$$

[1] Rozwiązanie zadania opracowano w oparciu o podręcznik [1].

Mamy tu trzy jednakowe równania różniczkowe na funkcje, odpowiednio, $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, wystarczy zatem rozwiązać np. pierwsze z nich. W tym celu przepiszmy je w następującej postaci:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.3}$$

— lewa strona tego równania to kombinacja liniowa funkcji $x(t)$ i jej drugiej pochodnej, zaś prawa strona to funkcja stała równa 0. Takie równanie nazywamy *liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu* (rząd równania jest równy rzędowi najwyższej pochodnej szukanej funkcji, jaka występuje w równaniu).

Teoria liniowych równań różniczkowych mówi, że kombinacja liniowa rozwiązań takiego równania również jest jego rozwiązaniem, przez co zbiór rozwiązań tworzy przestrzeń liniową. Co więcej, wymiar tej przestrzeni jest równy rzędowi równania. Oznacza to, że dla znalezienia ogólnego rozwiązania wystarczy znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań, czyli kolekcję liniowo niezależnych rozwiązań w liczbie równej rzędowi równania. Wobec tego w przypadku równania (2.3) wystarczy znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania.

W tym celu załóżmy, że rozwiązanie równania (2.3) jest postaci $x(t) = \exp(\gamma t)$, gdzie γ jest stałą. Druga pochodna po czasie tej funkcji to $\ddot{x}(t) = \gamma^2 \exp(\gamma t)$. Podstawiając te funkcje do równania (2.3) i dzieląc jego obie strony przez $\exp(\gamma t)$ otrzymujemy równanie na γ zwane *równaniem charakterystycznym*

$$m + \gamma^2 k = 0.$$

Ponieważ zarówno m jak i k są dodatnie,

$$\gamma = \pm i\sqrt{m/k} \in \mathbb{C}$$

i w konsekwencji dostajemy dwa zespolone rozwiązania równania (2.3) postaci $\exp(\pm i\omega t)$, gdzie

$$\omega \equiv \sqrt{m/k}.$$

Z tych zespolonych rozwiązań łatwo utworzyć przy pomocy odpowiednich kombinacji liniowych dwa rozwiązania rzeczywiste

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)), \qquad \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)), \tag{2.4}$$

które są liniowo niezależne i tym samym stanowią bazę przestrzeni (rzeczywistych) rozwiązań równania (2.3). Wynika stąd, że ogólne (rzeczywiste) rozwiązanie równania (2.3) jest postaci

$$x(t) = A_x \sin(\omega t) + B_x \cos(\omega t),$$

gdzie A_x i B_x są dowolnymi stałymi.

Wobec powyższego, ogólnym rozwiązaniem równań ruchu (2.2) są funkcje

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \sin(\omega t) + B_x \cos(\omega t), \\ y(t) &= A_y \sin(\omega t) + B_y \cos(\omega t), \\ z(t) &= A_z \sin(\omega t) + B_z \cos(\omega t), \end{aligned}$$

gdzie A_x, A_y, A_z, B_x, B_y i B_z są dowolnymi stałymi. Rozwiązanie to wygodnie jest zapisać w postaci

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \sin(\omega t) + \vec{B} \cos(\omega t), \tag{2.5}$$

gdzie

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}.$$

Z postaci (2.5) ogólnego rozwiązania równań ruchu wynika, że jeśli tylko $|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 \neq 0$, to ruch punktu materialnego P jest ruchem okresowym o okresie

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Przypuśćmy teraz, że punkt materialny P w chwili $t = 0$ znajdował się w punkcie opisanym wektorem wodzącym $\vec{r_0}$, a jego prędkość wynosiła $\vec{v_0}$:

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r_0}, \qquad \dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v_0}. \tag{2.6}$$

Podstawiając do powyższych równań wartości $\vec{r}(t=0)$ i $\dot{\vec{r}}(t=0)$ obliczone na podstawie (2.5) otrzymujemy

$$\vec{B} = \vec{r_0}, \qquad \omega\vec{A} = \vec{v_0}.$$

Widzimy stąd, że rozwiązaniem spełniającym warunki początkowe (2.6) jest

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{v_0}}{\omega}\sin(\omega t) + \vec{r_0}\cos(\omega t).$$

Opiszemy teraz tor ruchu punktu materialnego P. W tym celu rozważymy trzy przypadki: (i) $\vec{A} = 0 = \vec{B}$, (ii) $|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 \neq 0$ i wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ są liniowo zależne i (iii) wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ są liniowo niezależne.

W przypadku (i) punkt materialny P pozostaje w spoczynku w punkcie $\vec{r} = 0$ i tor ruchu jest oczywiście punktem.

W przypadku (ii) istnieje jednostkowy wektor $\vec{n}$ i liczby a i b, z których przynajmniej jedna jest niezerowa, takie, że $\vec{A} = a\vec{n}$ i $\vec{B} = b\vec{n}$. Wtedy rozwiązanie (2.5) przyjmuje postać

$$\vec{r}(t) = \vec{n}(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)).$$

Widać stąd, że ruch odbywa się wzdłuż odcinka prostej, którego kierunek wyznaczony jest przez wektor $\vec{n}$, a którego długość jest równa maksymalnej wartości funkcji $t \mapsto a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$ pomnożonej przez 2 czyli $2\sqrt{a^2+b^2}$.

W przypadku (iii) wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ rozpinają płaszczyznę, w której zachodzi ruch punktu P. Wynika stąd, że tor ruchu jest w tym przypadku krzywą płaską. Aby znaleźć jej równanie, załóżmy, że układ współrzędnych (x, y, z) wybrany został tak, że płaszczyzna rozpinana przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ pokrywa się z płaszczyzną OXY. W tej sytuacji $z(t) = 0$ podczas całego ruchu i tym samym z-owe składowe obu wektorów tzn. A_z i B_z znikają. Zależność współrzędnych x i y od czasu można teraz przedstawić następująco:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Z liniowej niezależności wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ wynika nieosobliwość macierzy

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

i w konsekwencji jej odwracalność

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{A_x B_y - B_x A_y} \begin{pmatrix} B_y & -B_x \\ -A_y & A_x \end{pmatrix}.$$

Korzystając z powyższego wzoru możemy przekształcić równanie (2.7) do następującej postaci:

$$(A_x B_y - B_x A_y) \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_y & -B_x \\ -A_y & A_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wprowadźmy teraz na płaszczyźnie OXY współrzędne $(\bar{x}, \bar{y})$ otrzymane z współrzędnych (x, y) za pomocą obrotu o kąt φ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Składając obydwa powyższe przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} (A_x B_y - B_x A_y) \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_y & -B_x \\ -A_y & A_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} B_y \cos\varphi - B_x \sin\varphi & -B_y \sin\varphi - B_x \cos\varphi \\ -A_y \cos\varphi + A_x \sin\varphi & A_y \sin\varphi + A_x \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wynika stąd (po dłuższych obliczeniach), że

$$\begin{aligned} (A_x B_y - B_x A_y)^2 &= (A_x B_y - B_x A_y)^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \\ &= [(B_y \cos\varphi - B_x \sin\varphi)^2 + (-A_y \cos\varphi + A_x \sin\varphi)^2]\, \bar{x}^2 + \\ &+ [(B_y \sin\varphi + B_x \cos\varphi)^2 + (A_y \sin\varphi + A_x \cos\varphi)^2]\, \bar{y}^2 + \\ &+ 2\Big[\frac{1}{2}(A_x^2 + B_x^2 - A_y^2 - B_y^2) \sin(2\varphi) - (A_x A_y + B_x B_y) \cos(2\varphi)\Big] \bar{x}\bar{y}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Niech μ i ν będą dowolnymi liczbami. Wtedy istnieje taka liczba φ_0, że

$$\mu \sin(2\varphi_0) + \nu \cos(2\varphi_0) = 0.$$

Rzeczywiście, jeśli $\mu = 0$ to $\varphi_0 = \pi/4$. Jeśli zaś $\mu \neq 0$ to

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(\nu/\mu).$$

Oznacza to, że dla pewnej wartości kąta φ, którą oznaczymy φ_0, zeruje się całe wyrażenie w ostatniej linii równania (2.9).

Pozostałe wyrazy po prawej stronie równania (2.9) wygodnie jest przepisać w postaci

$$(A_x B_y - B_x A_y)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} B_y & -B_x \\ -A_y & A_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \right\}^2 \bar{x}^2 + \left\{ \begin{pmatrix} B_x & B_y \\ A_x & A_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \right\}^2 \bar{y}^2, \tag{2.10}$$

— wyrażenie w każdym nawiasie klamrowym to wektor otrzymany w wyniku działania macierzy na wektor $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$, a kwadrat przy nawiasie klamrowym oznacza kwadrat wektora w sensie standardowego iloczynu skalarnego.

Zauważmy teraz, że wyrażenie po lewej stronie równania (2.10) jest dodatnie, gdyż jest kwadratem wyznacznika nieosobliwej macierzy (2.8). Odnośnie pierwszego składnika po prawej stronie tego równania: wektor $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ jest niezerowy, a macierz

$$\begin{pmatrix} B_x & B_y \\ A_x & A_y \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

nieosobliwa, gdyż jej wyznacznik równy jest wyznacznikowi macierzy (2.8). Zatem wynik działania macierzy (2.11) na wektor $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ jest niezerowym wektorem. W konsekwencji $\bar{x}^2$ w rozważanym składniku jest mnożone przez dodatni czynnik. Podobnie można uzasadnić, że $\bar{y}^2$ po prawej stronie równania (2.10) również jest mnożone przez dodatni czynnik.

Wykazaliśmy w ten sposób, że w rozważanym przypadku (*iii*) istnieje układ współrzędnych kartezjańskich $(\bar{x}, \bar{y}, z)$ taki, że tor ruchu punktu materialnego P dany jest równaniami

$$\bar{c}^2 = \bar{a}^2\bar{x}^2 + \bar{b}^2\bar{y}^2, \qquad z = 0,$$

gdzie $\bar{a}$, $\bar{b}$ i $\bar{c}$ są dodatnimi stałymi. Dzieląc obie strony pierwszego z powyższych równań przez $\bar{c}^2$ i definiując $\alpha := \bar{c}/\bar{a}$ oraz $\beta := \bar{c}/\bar{b}$ otrzymujemy równania toru w postaci

$$1 = \frac{\bar{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\bar{y}^2}{\beta^2}, \qquad z = 0,$$

co oznacza, że tor ruchu punktu materialnego P jest elipsą.

□

Zadanie 3. Oscylator harmoniczny z tłumieniem liniowym Punkt materialny P o masie m porusza się wzdłuż prostej l pod działaniem siły

$$F = -k\vec{r} - 2\rho\vec{v}, \tag{3.1}$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym punktu P zaczepionym w pewnym punkcie prostej l, $\vec{v}$ jest prędkością punktu P, a ρ i k są dodatnimi stałymi. Znaleźć ruch punktu P.

Rozwiązanie. Siła (3.1) składa się z dwóch składników: składnik $-k\vec{r}$ to siła elastyczna charakterystyczna dla oscylatora harmonicznego, a składnik $-2\rho\vec{v}$ jest siłą skierowaną przeciwnie do chwilowej prędkości $\vec{v}$ punktu materialnego P i proporcjonalną do tejże prędkości — jest to więc siła tłumiąca zależna w sposób liniowy od prędkości. Intensywność tłumienia zależna jest od stałej ρ — im ta stała większa, tym silniejsze jest tłumienie.

Niech x będzie współrzędną na prostej l dobraną tak, że wektor wodzący

$$\vec{r} = x\vec{e}_x.$$

Wtedy

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$$

i równanie ruchu

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

z siłą (3.1) możemy zapisać w następującej postaci

$$m\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + kx = 0. \tag{3.2}$$

Otrzymane równanie ruchu to przyrównana do zera liniowa kombinacja funkcji $t \mapsto x(t)$ oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej — zgodnie z terminologią wprowadzoną w rozwiązaniu zadania 2, równanie to jest liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu na funkcję $t \mapsto x(t)$. Aby znaleźć jego ogólne rozwiązanie, wystarczy zatem znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania tego równania. W tym celu postulujemy ponownie, że $x(t) = \exp(\gamma t)$, gdzie γ jest stałą. Podstawiając do (3.2) tą funkcję i jej pochodne otrzymujemy równanie charakterystyczne na stałą γ:

$$m\gamma^2 + 2\rho\gamma + k = 0, \tag{3.3}$$

którego rozwiązania mają postać

$$\gamma_\pm = \frac{\pm\sqrt{\rho^2 - mk} - \rho}{m} \tag{3.4}$$

W zależności od znaku wyrażenia pod pierwiastkiem rozróżniamy trzy rodzaje rozwiązań:

1. $\rho^2 < mk$ — przypadek słabego tłumienia,
2. $\rho^2 > mk$ — przypadek silnego tłumienia,
3. $\rho^2 = mk$ — przypadek graniczny.

W przypadku słabego tłumienia wyrażenie pod pierwiastkiem w (3.4) jest ujemne i wobec tego rozwiązania $\gamma_\pm$ są zespolone. Oznaczmy

$$\omega \equiv \frac{\sqrt{mk - \rho^2}}{m} > 0, \qquad \beta \equiv \frac{\rho}{m} > 0.$$

Wtedy

$$\gamma_\pm = \pm i\omega - \beta$$

i w konsekwencji otrzymujemy dwa zespolone rozwiązania równania (3.2) w postaci funkcji

$$t \mapsto \exp((\pm i\omega - \beta)t) = \exp(-\beta t)\exp(\pm i\omega t).$$

Przy pomocy kombinacji liniowej łatwo jest otrzymać z powyższych rozwiązań zespolonych dwa liniowo niezależne rozwiązania rzeczywiste (porównaj z (2.4)):

$$\exp(-\beta t)\sin(\omega t), \qquad \exp(-\beta t)\cos(\omega t).$$

Ogólne rozwiązanie równania (3.2) w przypadku słabego tłumienia może więc być zapisane w postaci

$$x(t) = \exp(-\beta t)(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) \tag{3.5}$$

gdzie A i B to dowolne stałe.

Jeśli $A^2 + B^2 \neq 0$ to funkcję (3.5) można przedstawić następująco:

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\exp(-\beta t)\frac{(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Maksymalna wartość ułamka w tym równaniu wynosi 1 i dlatego czynnik $\sqrt{A^2 + B^2}e^{-\beta t}$ może być interpretowany jako malejąca (bo $\beta > 0$) eksponencjalnie w czasie amplituda drgań oscylatora.

Z postaci rozwiązania (3.5) wynika również, że w trakcie ruchu przy słabym tłumieniu punkt materialny P będzie przechodził przez położenie równowagi $x = 0$ nieograniczoną liczbę razy.

W klasie ruchów ze słabym tłumieniem mamy też przypadek skrajny $\rho = 0$ czyli ruch bez tłumienia. Wtedy $\beta = 0$ i rozwiązanie (3.5) redukuje się do standardowego rozwiązania opisującego zwykły (nietłumiony) oscylator harmoniczny.

Przejdźmy teraz do przypadku silnego tłumienia. W tym przypadku obie wartości $\gamma_\pm$ są rzeczywiste. Łatwo pokazać, że $\sqrt{\rho^2 - mk} < \rho$, skąd mamy

$$\gamma_\pm < 0.$$

Funkcje $t \mapsto \exp(\pm\gamma t)$ są liniowo niezależne i dlatego ogólne rozwiązanie równania ruchu (3.2) w rozważanym przypadku można zapisać w postaci

$$x(t) = A\exp(\gamma_+ t) + B\exp(\gamma_- t),$$

gdzie A i B są dowolnymi stałymi.

Widać z powyższego, że jeśli $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$ to ruch punktu materialnego przy silnym tłumieniu jest istotnie odmienny od ruchu nietłumionego oscylatora harmonicznego: (*i*) jeśli stałe A i B nie są przeciwnego znaku, to wychylenie punktu materialnego P z położenia równowagi $x = 0$ maleje eksponencjalnie do zera wraz z upływem czasu, (*ii*) jeśli A i B są przeciwnego znaku, to punkt P przechodzi przez położenie równowagi jeden raz, oddala się od tego położenia na pewną odległość, a potem zachowuje się tak, jak w przypadku (*i*)
.

W przypadku granicznym, dwa w ogólności różne rozwiązania $\gamma_\pm$ równania charakterystycznego (3.3) redukują się do jednego rozwiązania

$$\gamma = -\rho/m < 0,$$

co z kolei daje tylko jedno rozwiązanie równania ruchu (3.2) postaci $\exp(\gamma t)$. Z teorii liniowych równań różniczkowych wynika, że w takim przypadku drugie liniowo niezależne rozwiązanie równania (3.2) może być wybrane w postaci funkcji $t\exp(\gamma t)$. Zatem w przypadku granicznym ogólne rozwiązanie równania ruchu ma postać

$$x(t) = (A + Bt)\exp(\gamma t)$$

gdzie A i B są dowolnymi stałymi.

□

Andrzej Okołów

Literatura

[1] Rubinowicz W, Królikowski W, 1995 *Mechanika teoretyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.