Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

Zadania na ćwiczenia - seria 4.
30 marca 2020 r.

Zadania przykładowe

Przykład 1.
Cząstka o masie m znajduje się pod działaniem siły $\mathbf{F} = (-kx + bx^3)\hat{\mathbf{e}}_x$, gdzie k i b są stałymi o dodatnich wartościach.
a) Naszkicować wykres energii potencjalnej cząstki $V(x)$ i przedyskutować jej ruch.
b) Wyznaczyć częstość małych drgań wokoło położenia równowagi.

Rozwiązanie.
a) rozpatrywana siła jest potencjalna zachowawcza, a zatem:

$$V(x) = -\int(-kx + bx^3)dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}bx^4, \tag{1}$$

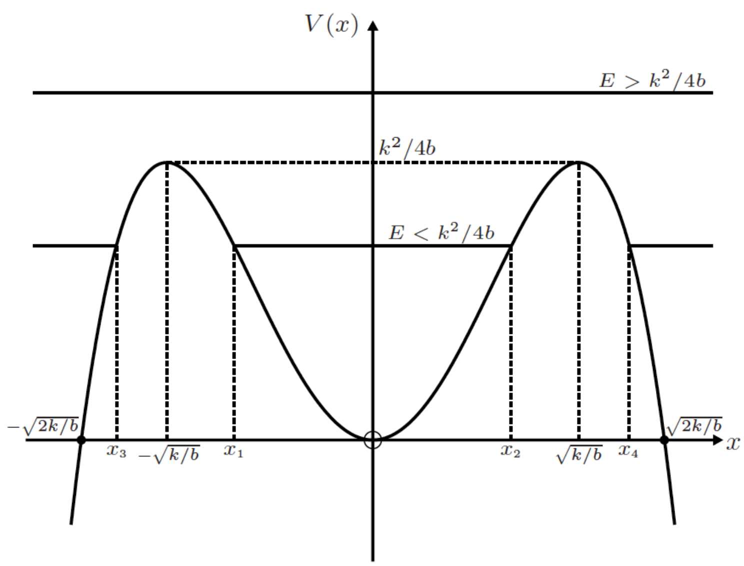
gdzie założyliśmy, że dla $x = 0$ potencjał ma wartość równą zeru. Zanim naszkicujemy wykres $V(x)$ zauważmy, że potencjał zeruje się również w punktach $x = \pm\sqrt{2k/b}$. Ponadto, $V \to -\infty$ dla $x \to \pm\infty$. Znajdziemy teraz ekstrema $V(x)$:

$$\frac{dV}{dx} = kx - bx^3 = 0, \tag{2}$$

co daje nam następujące punkty: $x = 0$ oraz $x = \sqrt{k/b}$. V(x) jest funkcją parzystą, b jest dodatnie, a zatem:

$$V_{\max} = V(\pm\sqrt{k/b}) = \frac{k^2}{2b} - \frac{bk^2}{4b^2} = \frac{k^2}{4b}. \tag{3}$$

Mamy już wszystkie informacje potrzebne do naszkicowania wykresu $V(x)$ (Rys. 1).



Rysunek 1: Wykres energii potencjalnej $V(x)$

W $x = 0$ znajduje się stabilny punkt równowagi, cząstka o energii $E = 0$ umieszczona w tym punkcie pozostanie w nim. Pod wpływem niewielkiego zwiększenia energii cząstki, zacznie ona drgać (oscylować) wokół punktu równowagi. Tego typu zachowanie nie jest możliwe w $x = \pm\sqrt{k/b}$, mimo że są to również ekstrema $V(x)$. Cząstka o energii $E = k^2/4b$ może pozostać w tych punktach w spoczynku, ale jakiekolwiek zaburzenie energii całkowicie wytrąci cząstkę z jej położenia - punkty te są niestabilnymi punktami równowagi. Istnieje krytyczna wartość energii $E_c = k^2/4b$, poniżej której ruch cząstki jest ograniczony. W przypadku, kiedy energia jest większa od E_c, ruch cząstki jest nieograniczony. Z kolei, kiedy $E < E_c$ równanie:

$$-\frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{2}kx^2 = E \tag{4}$$

będzie miało 4 pierwiastki. Jeśli cząstka o energii $E < E_c$ znajduje się między punktami x_1 a x_2, jej ruch jest ograniczony do przedziału (x_1, x_2). Z kolei punkty x_3 i x_4 są miejscami bariery dla cząstki o energii $E < E_c$ znajdującej się "na zewnątrz" od tych punktów i nie będzie ona w stanie ich przekroczyć. Omawiany układ jest nazywany oscylatorem anharmonicznym ze względu na wyraz bx^3, który powoduje odstępstwa od ruchu harmonicznego. Modele oscylatorów anharmonicznych wykorzystywane są m.in. w modelowaniu molekularnym.

b). Kiedy $E \to 0$, to punkty $x_1, x_2 \to 0$, a drgania wokół punktu równowagi stają się małe, a wyraz bx^3 zaniedbywalny w stosunku do wyrazu liniowego $-kx$. W rezultacie siłę możemy przybliżyć wzorem:

$$\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{e}}_x. \tag{5}$$

Równanie ruchu sprowadza się do:

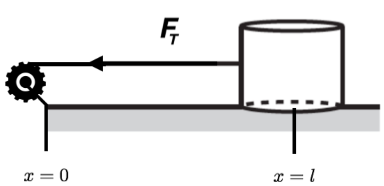
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{6}$$

a zatem równania oscylatora harmonicznego. Rozwiązanie ma postać:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$ jest częstością drgań. Zatem okres drgań wynosi $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. Dokładna analiza ruchu cząstki pod działaniem siły $\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{e}}_x$ jest tematem zadania 1 z zadań do samodzielnego rozwiązania.

Przykład 2.



Rysunek 2: Wiaderko z piaskiem wciągane przez wyciągarkę.

Wyciągarka linowa przyciąga do siebie wiaderko z piaskiem ze stałą siłą F_T(Rys. 2). Ruch wiaderka odbywa się bez tarcia. Niech x będzie odległością wiaderka od wyciągarki a m masą piasku w wiaderku, którego ubywa w tempie $dm/dt = b\ddot{x}$. Wiedząc, że w czasie $t = 0$ wiaderko zawierało piasek o masie M i znajdowało się w odległości l od wyciągarki:

a) znajdź masę $m(t)$.

b) znajdź położenie $x(t)$ i prędkość $v(t)$ wiaderka (zanim cały piasek wydostał się na zewnątrz). Znajdź położenie i prędkość w funkcji masy: $x(m)$, $v(m)$. Jaka jest prędkość wiaderka tuż przed tym, kiedy wydostanie się z niego cały piasek (zakładając, że cała lina nie została jeszcze wciągnięta).

c) Jaka jest maksymalna wartość energii kinetycznej wiaderka (zakładając, że zostanie osiągnięta przed wciągnięciem całej liny przez wyciągarkę)?

d) Jaka jest maksymalna wartość pędu wiaderka (zakładając, że zostanie osiągnięta przed wciągnięciem całej liny przez wyciągarkę)?

e) Dla jakiej wartości b wiaderko stanie się puste w momencie, kiedy wyciągarka wciągnie całą linę?

Rozwiązanie.
a) Zagadnienie jest jednowymiarowe, zatem ruch wiaderka opisany jest równaniem:

$$m(t)\ddot{x} = -F_T \tag{8}$$

Korzystając z $\ddot{x} = \frac{1}{b}\frac{dm}{dt}$ dostajemy:

$$\frac{m(t)}{b}\frac{dm}{dt} = -F_T. \tag{9}$$

Rozdzielając zmienne i całkując po czasie obie strony równania dostajemy:

$$\frac{m^2}{2} = -bF_T t + C_1, \tag{10}$$

gdzie $C_!$ jest stałą całkowania. Z warunków początkowych wyznaczamy:

$$C_1 = \frac{M^2}{2}. \tag{11}$$

Zatem masa w funkcji czasu ma następującą postać:

$$m(t) = \sqrt{M^2 - 2bF_T t}. \tag{12}$$

Należy zwrócić uwagę, że wyrażenie (12) jest spełnione dla $t < \frac{M^2}{2bF_T}$, o ile cała lina nie została jeszcze wciągnięta przez wyciągarkę.

b) Podstawiając wyrażenie na masę (12) do równania (8) otrzymujemy:

$$\ddot{x} = \frac{-F_T}{\sqrt{M^2 - 2bF_T t}} \tag{13}$$

Całkujemy po czasie obie strony równania i dostajemy:

$$\dot{x} = \frac{1}{b}\sqrt{M^2 - 2bF_T t} + C_2. \tag{14}$$

Wiemy, że w czasie $t = 0$ wartość prędkości była równa zeru czyli:

$$C_2 = -\frac{M}{b}. \tag{15}$$

Zatem prędkość wiaderka z piaskiem wynosi:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{1}{b}\sqrt{M^2 - 2bF_T t} - \frac{M}{b}. \tag{16}$$

Ponownie całkujemy po czasie powyższe równanie, aby znaleźć położenie wiaderka w funkcji czasu:

$$x(t) = -\frac{2}{3}\frac{\left(M^2 - 2bF_T t\right)^{3/2}}{2b^2 F_T} - \frac{M}{b}t + C_3. \tag{17}$$

W chwili początkowej, wiaderko znajdowało się w odległości l od wyciągarki, w związku z czym:

$$C_3 = l + \frac{M^3}{3b^2 F_T}. \tag{18}$$

Teraz skorzystamy (12), aby znaleźć zależność czasu od masy $t(m)$ i wykorzystać ją do policzenia $x(m)$ i $\dot{x}(m)$. Otrzymujemy:

$$t(m) = \frac{1}{2bF_T}\left(M^2 - m^2\right). \tag{19}$$

Możemy teraz wyrazić położenie i prędkość w funkcji masy podstawiając (19) odpowiednio do (17) i (16):

$$x(m) = L - \frac{1}{6b^2 F_T} (M - m)^2 (M + 2m) \,, \tag{20}$$

$$v(m) = \frac{m - M}{b}. \tag{21}$$

Następnie szukamy prędkości wiaderka tuż przed tym jak wydostanie się z niego cały piasek, tzn. dla $m \to 0$. Z powyższego wzoru na $v(m)$ wnioskujemy, że szukana prędkość wyniesie $-\frac{M}{b}$.

c) Podstawiając (21) do wzoru na energię kinetyczną otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2b^2}(m - M)^2, \tag{22}$$

czyli wielomian trzeciego stopnia, którego miejsca zerowe znajdują się w $m = 0$ i $m = M$. Na przedziale $(0, M)$ szukamy ekstremum (22):

$$\frac{d}{dm}\left(m \left(\frac{m - M}{b} \right)^2 \right) = \frac{1}{b^2} (m - M) (3m - M) \,, \tag{23}$$

wnioskujemy stąd, że energia kinetyczna T osiągnie swoje maksimum dla $m = \frac{M}{3}$:

$$T_{\max} = \frac{2M^3}{27b^2}. \tag{24}$$

d) Szukając maksymalnej wartości pędu wiaderka postępujemy analogicznie do poprzedniego podpunktu:

$$p = mv = \frac{m}{b}(m - M), \tag{25}$$

$$\frac{dp}{dm} = \frac{2m - M}{b}. \tag{26}$$

Zatem maksymalna wartość pędu wynosi:

$$|p|_{\max} = \frac{M^2}{4b}. \tag{27}$$

e) Szukamy wartości b, dla której wiaderko stanie się puste w momencie, kiedy uderzy w wyciągarkę, warunek ten możemy zapisać następująco: $x(m = 0) = 0$. Korzystając z (20) otrzymujemy:

$$0 = l - \frac{M^3}{6b^2 T}, \tag{28}$$

stąd

$$b = \sqrt{\frac{M^3}{6F_T l}}. \tag{29}$$

Przykład 3.
Wyznaczyć i przedyskutować ruch cząstki o masie m w potencjale:

$$V(r) = -\tfrac{\alpha}{r} + \tfrac{\beta}{r^2}, \qquad \alpha, \beta > 0. \tag{30}$$

Rozwiązanie.
Rozwiązywanie zadania zaczniemy od zasady zachowania energii, zasady zachowania momentu pędu i rozważań czysto jakościowych:

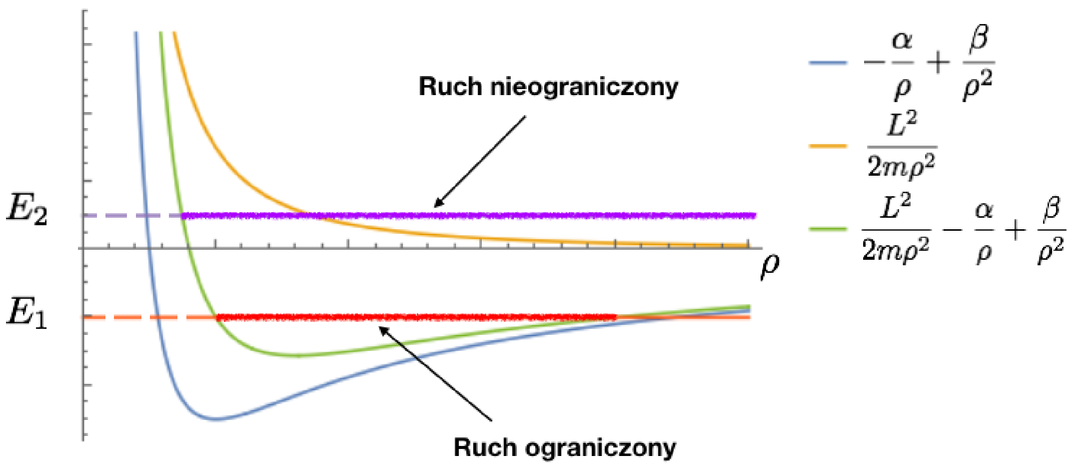
- siła jest centralna. Oznacza to, że ruch odbywa się w pewnej płaszczyźnie, która możemy opisać współrzędnymi biegunowymi: ρ, φ; a długość wektora momentu pędu jest stała:

$$L = m\rho^2\dot{\varphi} = \text{const} \tag{31}$$

- siła jest potencjalna zachowawcza, więc całkowita energia jest stała:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \tfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \tfrac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2 - \tfrac{\alpha}{\rho} + \tfrac{\beta}{\rho^2} \\ &= \tfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \tfrac{L^2}{2m\rho^2} - \tfrac{\alpha}{\rho} + \tfrac{\beta}{\rho^2} \end{aligned} \tag{32}$$

- wyrażenie $\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$ jest dodatnie, więc ustalenie wartości E określa zakres ruchu (Rys. 3). W zależności od wartości energii cząstki, jej ruch może być ograniczony lub nieograniczony.



Rysunek 3: Wykres energii potencjalnej $V(x)$.

Rozważania ilościowe zaczniemy od zasady zachowania energii, zauważmy najpierw:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{L}{m\rho^2} = -\frac{L}{m} \cdot \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{\rho} \tag{33}$$

gdzie trzeciej równości skorzystaliśmy ze wzoru (31). Po wprowadzeniu zmiennej $\omega = \frac{1}{\rho}$ otrzymujemy:

$$\dot{\rho} = -\frac{L}{m}\frac{d\omega}{d\varphi} \tag{34}$$

Całkowitą energię możemy zatem zapisać w następujący sposób:

$$E = \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{L^2}{m} + \beta\right)\omega^2 - \alpha\omega \tag{35}$$

Z powyższego wzoru wyznaczamy $\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2$:

$$\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \left(1 + \frac{2m\beta}{L^2}\right)\omega^2 + \frac{2m\alpha}{L^2}\omega. \tag{36}$$

Następnie obustronnie działamy $\frac{d}{d\varphi}$ i korzystamy z faktu, że E jest zachowana, tzn. $\frac{dE}{d\varphi} = 0$, w rezultacie otrzymujemy:

$$2\frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} = 0 - 2\left(1 + \frac{2m\beta}{L^2}\right)\omega\frac{d\omega}{d\varphi} + 2\frac{m\alpha}{L^2}\frac{d\omega}{d\varphi}. \tag{37}$$

Dzielimy obustronnie przez $2\frac{d\omega}{d\varphi}$ i w rezultacie otrzymujemy równanie liniowe niejednorodne:

$$\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \left(1 + \frac{2m\beta}{L^2}\right)\omega = \frac{m\alpha}{L^2}. \tag{38}$$

Stosujemy standardowe metody rozwiązywania tego typu równań:

- Rozwiązania ogólnego równania jednorodnego: równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\sqrt{1 + \frac{2m\beta}{L^2}}$

$$\omega(\varphi) = A\cos\left(\sqrt{1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}}\varphi\right) \tag{39}$$

- Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego: szukamy rozwiązania w postaci funkcji stałej

$$\omega(\varphi) = \frac{\frac{m\alpha}{L^2}}{1+\frac{2m\beta}{L^2}} \tag{40}$$

- dodajemy oba wyniki i wstawiamy z powrotem do równania wyjściowego (36), aby wyznaczyć stałą A:

$$\begin{aligned} A^2\left(1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}\right)\sin^2\left(\sqrt{1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}}\varphi\right) &= \tfrac{2mE}{L^2} - \left(1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}\right)\cdot A^2\cos^2\left(\sqrt{1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}}\varphi\right) \\ &- \left(1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}\right)\cdot 2A\cos\left(\sqrt{1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}}\varphi\right)\frac{\frac{m\alpha}{L^2}}{1+\frac{2m\beta}{L^2}} \\ &- \left(1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}\right)\frac{\frac{m^2\alpha^2}{L^4}}{\left(1+\frac{2m\beta}{L^2}\right)^2} \\ &+ \tfrac{2m\alpha}{L^2}\left(A\cos\left(\sqrt{1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}}\varphi\right) + \frac{\frac{m\alpha}{L^2}}{1+\frac{2m\beta}{L^2}}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

  Porządkując powyższe równanie otrzymujemy:

$$A^2\left(1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}\right) = \tfrac{2mE}{L^2} + \frac{m^2\alpha^2}{L^4\left(1+\frac{2m\beta}{L^2}\right)} \tag{42}$$

  Stąd:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1+\frac{2m\beta}{L^2}}\sqrt{\tfrac{2mE}{L^2}\left(1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}\right) + \tfrac{m^2\alpha^2}{L^4}} \\ &= \frac{\frac{m\alpha}{L^2}}{1+\frac{2m\beta}{L^2}}\sqrt{1 + \tfrac{2EL^2}{m\alpha^2}\left(1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}\right)} \end{aligned} \tag{43}$$

Szukane rozwiązanie ma następującą postać:

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{\frac{L^2}{m\alpha}\left(1 + \frac{2m\beta}{L^2}\right)}\cdot\left[1 + \sqrt{1 + \tfrac{2EL^2}{m\alpha^2}\left(1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}\right)}\cos\left(\sqrt{1 + \tfrac{2m\beta}{L^2}}\varphi\right)\right] \tag{44}$$

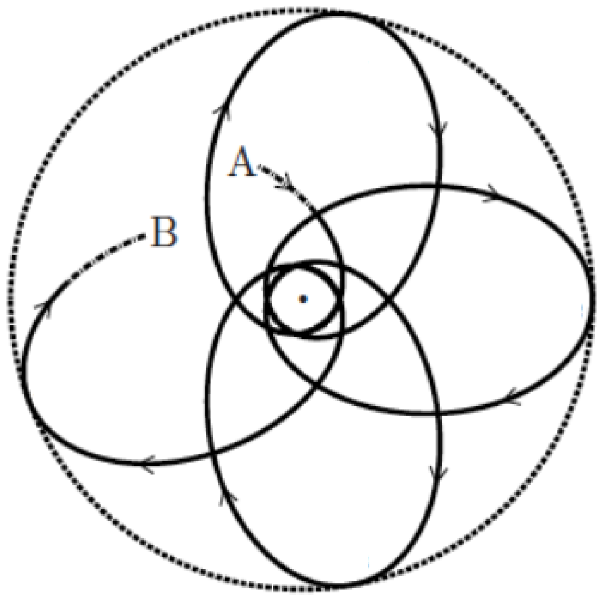
Pamiętając, że $\rho = \frac{1}{\omega}$ otrzymujemy:

$$\rho(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}\left(1+\frac{2m\beta}{L^2}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}\left(1+\frac{2m\beta}{L^2}\right)}\cos\left(\sqrt{1+\frac{2m\beta}{L^2}}\varphi\right)} \tag{45}$$

Dla $E < 0$ tor przypomina elipsę, tyle że wyjściową odległość od początku układu współrzędnych osiąga się po obrocie o kąt:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{2m\beta}{L^2}}} < 2\pi, \tag{46}$$

oznacza to, że elipsa ta "powoli się obraca" (Rys. 3).



Rysunek 4: Obracanie się elipsy - ruch peryhelium.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Cząstka o masie m znajduje się pod działaniem siły $\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{e}}_x$, gdzie k jest stałą.
a) Znaleźć energię potencjalną $V(x)$ cząstki.
b) Dla dodatnich i ujemnych wartości k naszkicować możliwe wykresy $V(x)$ i przedyskutować ruch cząstki korzystając z zasady zachowania energii.
Przykładem układy fizycznego, w którym pojawia się taka siła jest ciężarek na sprężynie. Współczynnik proporcjonalności k nazywamy wtedy stałą sprężystości.

Rozwiązanie.
a) Podobnie jak w Przykładzie 1, energię potencjalną cząstki liczymy następująco:

$$V(x) = -\int(-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2, \tag{47}$$

gdzie założyliśmy, że w punkcie $x = 0$ potencjał jest równy zeru.
b). Zgodnie z treścią zadania rozpatrywać będziemy dwa przypadki: $k > 0$ oraz $k < 0$.
I) $k > 0$.
Zauważmy najpierw, że w tym przypadku całkowita energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \tag{48}$$

jest nieujemna (żaden z wyrazów nie przyjmuje wartości ujemnych). Jeśli energia cząstki $E = 0$, spoczywa ona w punkcie $x = 0$, który jest stabilnym punktem równowagi. Wychylenie z punktu równowagi skutkować będzie działaniem siły F o przeciwnym zwrocie. W przypadku, kiedy $E > 0$, położenie cząstki jest ograniczone do obszaru, w którym $V \leq E$. Jeśli $V = E$, czyli $v = 0$, energia jest opisana wzorem:

$$E = \frac{1}{2}kx^2, \tag{49}$$

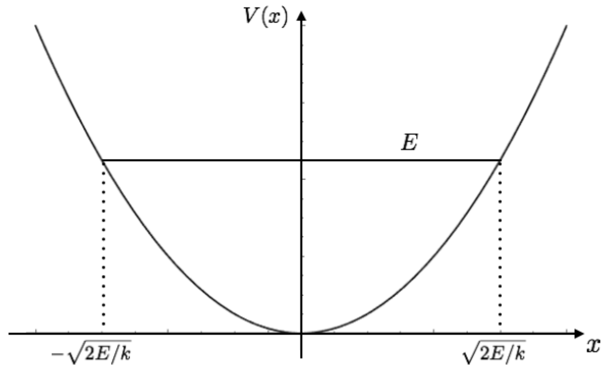
a pierwiastkami tego równania są: $x = \pm\sqrt{2E/k}$. Na cząstkę, która znajduje się w punkcie $x = \sqrt{2E/k}$ działa siła zwrócona w stronę stabilnego punktu równowagi $x = 0$. W tym punkcie cząstka osiągnie maksymalną wartość prędkości $|v_{\max}| = \sqrt{2E/m}$. Jednak po przekroczeniu punktu $x = 0$, zwrot siły zmieni się i zacznie powodować spowolnienie cząstki. Prędkość równą zeru osiągnie w punkcie $x = -\sqrt{2E/k}$ (czyli drugim pierwiastku równania (81)), a następnie zacznie poruszać się w stronę punktu równowagi. Ruch cząstki jest ruchem periodycznym, o amplitudzie $\sqrt{2E/k}$. Możemy również znaleźć okres tego ruchu. Ze wzoru (48) dostajemy:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2. \tag{50}$$

Rozdzielamy zmienne i całkujemy:

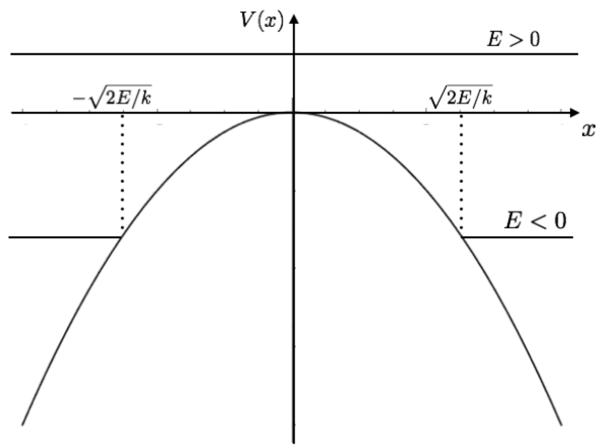
$$\frac{1}{2}T = t - t_0 = \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}}, \tag{51}$$

stąd otrzymujemy, że $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.



Rysunek 5: Wykres energii potencjalnej $V(x)$ dla $k > 0$.

II). $k < 0$.



Rysunek 6: Wykres energii potencjalnej $V(x)$ dla $k < 0$.

Dla $E > 0$ tzn. $V > -T$, ruch cząstki jest nieograniczony. W punkcie $x = 0$ i $V = 0$ znajduje się niestabilny punkt równowagi, jeśli energia cząstki zostanie zaburzona, cząstka zmieni położenie i będzie się oddalać od punktu równowago. W przypadku, kiedy $E < 0$, czyli $V < -T$, prędkość cząstki znajdującej się w $x < 0$ i poruszającej się w prawo, zmniejszy się do zera w punkcie $x = -\sqrt{2E/k}$, a następnie pod działaniem siły F zacznie przyspieszać w lewo, a ruch będzie nieograniczony.

Zadanie 2.
Rozważyć taki sam układ jak w Przykładzie 2 z tą różnicą, że teraz masa wiaderka zmienia się zgodnie ze wzorem $dm/dx = M/l$ (a nie jak w Przykładzie 2: $dm/dt = b\ddot{x}$). Wiedząc, że w czasie $t = 0$ wiaderko zawierało piasek o masie M i znajdowało się w odległości l od wyciągarki:
a) znaleźć zależność energii kinetycznej wiaderka z piaskiem od położenia x. Jaka jest jej maksymalna wartość?
b) znaleźć zależność pędu wiaderka z piaskiem od położenia x. Jaka jest jego maksymalna wartość?

Rozwiązanie.

a) Zaczynamy od znalezienia zależności masy od położenia. Rozdzielamy zmienne równania:

$$\frac{dm}{dx} = \frac{M}{l}, \tag{52}$$

a następnie całkujemy, w wyniku czego otrzymujemy:

$$m(x) = \frac{M}{l}x + C. \tag{53}$$

Wiemy, że w momencie, kiedy wiaderko znajdowało się w odległości l od wyciągarki jego masa wynosiła M, a zatem:

$$C = 0. \tag{54}$$

Równanie ruchu ma postać:

$$m\ddot{x}(t) = m\dot{v}(t) = -F_T. \tag{55}$$

Zauważmy, że $\dot{v}$ możemy zapisać następująco:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}. \tag{56}$$

Podstawiając to do równania ruchu dostajemy:

$$mv\frac{dv}{dx} = -F_T, \tag{57}$$

rozwiązujemy metodą rozdzielenia zmiennych:

$$\begin{aligned} \int v dv &= -F_T \int \frac{1}{m} dx = -F_T \frac{l}{M} \int \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{2}v^2 &= -F_T \frac{l}{M} \ln x + D, \end{aligned} \tag{58}$$

gdzie stałą D wyznaczamy z warunków początkowych:

$$D = F_T \frac{l}{M} \ln l. \tag{59}$$

W rezultacie, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}v^2 = -F_T \frac{l}{M} \ln \frac{x}{l}. \tag{60}$$

Jesteśmy już gotowi policzenia energii kinetycznej:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{M}{l}x\left(-F_T\frac{l}{M}\ln\frac{x}{l}\right) = -F_T x \ln\frac{x}{l}. \tag{61}$$

Następnie szukamy jej maksymalnej wartości:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= -F_T\left(\ln\frac{x}{l} + 1\right) = 0 \\ x &= \frac{l}{e} \\ T_{\max} &= -F_T\frac{l}{e}\ln\frac{1}{e} = F_T\frac{l}{e}. \end{aligned} \tag{62}$$

b) Ze wzoru (60) wyznaczamy:

$$v = -\sqrt{-2F_T\frac{l}{M}\ln\frac{x}{l}}, \tag{63}$$

stąd:

$$p = mv = -\frac{M}{l}x\sqrt{-2F_T\frac{l}{M}\ln\frac{x}{l}}. \tag{64}$$

Szukamy wartości maksymalnej pędu analogicznie do pierwszej części zadania i otrzymujemy:

$$|p|_{\max} = \sqrt{\frac{F_T l M}{e}}. \tag{65}$$

Zadanie 3.
Wyznaczyć ruch cząstki o masie m w potencjale

$$V(r) = -\tfrac{k}{r^2}, \qquad k > 0. \tag{66}$$

Wskazówka. Rozważyć 3 przypadki: $L > \sqrt{2mk}$, $L < \sqrt{2mk}$, $L = \sqrt{2mk}$.

Rozwiązanie.
Podobnie jak w Przykładzie 3 znajdujemy całkowitą energię cząstki we współrzędnych biegunowych:

$$E = T + V = \tfrac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \tfrac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2 - \tfrac{k}{\rho^2}. \tag{67}$$

Dokonujemy zamiany zmiennych (patrz Przykład 3):

$$\rho = \frac{1}{\omega}\dot{\rho} = -\frac{L}{m}\frac{d\omega}{d\varphi} \tag{68}$$

stąd:

$$\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \left(1 - 2\frac{mk}{L^2}\right)\omega^2 \tag{69}$$

Działając obustronnie $d/d\varphi$ i dokonując drobnych przekształceń otrzymujemy:

$$0 = \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \left(1 - 2\frac{mk}{L^2}\right)\omega. \tag{70}$$

Zgodnie ze wskazówką, będziemy teraz szukać rozwiązań równania (70) w zależności od tego czy wyrażenie w nawiasie jest dodatnie, ujemne bądź równe zeru.

I). $L = \sqrt{2mk}$.

W tym przypadku równanie (70) będzie miało następującą postać:

$$0 = \frac{d^2\omega}{d\varphi^2}, \tag{71}$$

a jego rozwiązaniem jest:

$$\omega(\varphi) = A\varphi + B. \tag{72}$$

Podstawiając rozwiązanie do (69) znajdujemy stałą całkowania:

$$A = \frac{2mE}{L^2} \tag{73}$$

Powracając do zmiennej ρ otrzymujemy:

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{\frac{2mE}{L^2}\varphi + B} \tag{74}$$

II). $L > \sqrt{2mk}$.
Tym razem rozwiązaniem równania (70) jest:

$$\omega(\varphi) = C\cos(\Omega\varphi + \varphi_0), \tag{75}$$

$$\Omega = \sqrt{\left(1 - 2\frac{mk}{L^2}\right)}. \tag{76}$$

Rozwiązanie wstawiamy do równania (69), aby znaleźć stałą C:

$$C = \sqrt{\frac{2mE}{L^2\Omega^2}}, \tag{77}$$

a zatem

$$\rho(\varphi) = \sqrt{\frac{L^2\Omega^2}{2mE}}\frac{1}{\cos\left(\Omega\varphi + \varphi_0\right)} \tag{78}$$

III). $L < \sqrt{2mk}$.
Tutaj szukane rozwiązanie równania (70) ma postać:

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{2}\left(De^{\alpha\varphi} + Fe^{-\alpha\varphi}\right), \tag{79}$$

$$\alpha = \sqrt{2\frac{mk}{L^2} - 1} \tag{80}$$

Podobnie jak w pkt. II, rozwiązanie podstawiamy do równania (69), w wyniku czego otrzymujemy:

$$E = -\alpha^2\frac{L^2}{2m}DF. \tag{81}$$

W zależności od wartości stałych D i F, energia E może być dodatnia, ujemna lub równa zeru.

i) Jeśli byłaby równa zeru, to jedna ze stałych D i F musiałaby również się zerować, a zatem rozwiązanie miałoby następującą postać:

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{D}e^{-\alpha\varphi}, \text{ lub} \tag{82}$$

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{F}e^{\alpha\varphi}. \tag{83}$$

ii) zakładając, że $E > 0$, możemy zapisać stałe D i F następująco:

$$D = Ke^{-\alpha\varphi_0}, \qquad F = -Ke^{\alpha\varphi_0}. \tag{84}$$

W takim przypadku z (81) liczymy:

$$K = \sqrt{\frac{2mE}{L^2\alpha^2}}, \tag{85}$$

a rozwiązanie wynosi:

$$\rho(\varphi) = \sqrt{\frac{L^2\alpha^2}{2mE}}\frac{1}{\sinh[\alpha(\varphi - \varphi_0)]} \tag{86}$$

iii) jeśli $E < 0$ to stałe D i F zapiszemy:

$$D = Ke^{-\alpha\varphi_0}, \qquad F = Ke^{\alpha\varphi_0}. \tag{87}$$

Wtedy z (81) liczymy:

$$K = \sqrt{-\frac{2mE}{L^2\alpha^2}}, \tag{88}$$

a rozwiązanie wynosi:

$$\rho(\varphi) = \sqrt{-\frac{L^2\alpha^2}{2mE}}\frac{1}{\cosh[\alpha(\varphi - \varphi_0)]}. \tag{89}$$