Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 4
30 marca 2020

Zadanie 1. Wśród podanych poniżej pól wektorowych znaleźć pola potencjalne i ich potencjały:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \vec{F}_\mathrm{a} = \Big(-\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}, \sin z \Big),\\
&\text{b)}\quad \vec{F}_\mathrm{b} = (y, z, x),\\
&\text{c)}\quad \vec{F}_\mathrm{c} = \Big(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Big),\\
&\text{d)}\quad \vec{F}_\mathrm{d} = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \Big),
\end{aligned}
$$

(pola wyrażone są w kartezjańskim układzie współrzędnych).

Rozwiązanie. Jeżeli (różniczkowalne) pole wektorowe $\vec{F}$ jest potencjalne, to jego rotacja znika: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Dlatego też sprawdzanie, czy dane pole jest potencjalne zaczynamy od policzenia jego rotacji — jeśli rotacja okaże się niezerowa, to pole nie jest potencjalne. Jeśli rotacja jest zerem, to szukamy potencjału f tego pola rozwiązując równanie różniczkowe postaci

$$\vec{\nabla} f = \vec{F}$$

— funkcja f jest potencjałem pola $\vec{F}$, jeżeli spełnia powyższe równanie *na całej dziedzinie pola* $\vec{F}$ tzn. wszędzie tam, gdzie pole $\vec{F}$ jest określone. Oznacza to w szczególności, że funkcja f musi być funkcją *różniczkowalną* na całej dziedzinie pola $\vec{F}$.

Przypadek a) W przypadku pola $\vec{F}_\mathrm{a}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F}_\mathrm{a} = \left\wr \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{-y}{(x-y)^2} & \frac{x}{(x-y)^2} & \sin z \end{pmatrix} \right\wr &= \vec{e}_x \Big(\frac{\partial}{\partial y} \sin z - \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{(x-y)^2} \Big) + \\
&+ \vec{e}_y \Big(\frac{\partial}{\partial z} \frac{-y}{(x-y)^2} - \frac{\partial}{\partial z} \sin z \Big) + \vec{e}_z \Big(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x-y)^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{(x-y)^2} \Big) = 0
\end{aligned}
$$

(wyrażenie pomiędzy pionowych falistymi ogranicznikami nie jest poprawnym wyrażeniem matematycznym, lecz regułą mnemotechniczną ułatwiającą obliczanie rotacji). Zatem pole $\vec{F}_\mathrm{a}$ spełnia warunek konieczny do bycia polem potencjalnym. Warunek ten nie jest jednak wystarczający, dlatego też należy sprawdzić, czy pole to posiada potencjał. Sprawdzenia dokonamy próbując odcałkować równanie, jakie musi spełniać potencjał f_a pola $\vec{F}_\mathrm{a}$:

$$\vec{\nabla} f_\mathrm{a} = \frac{\partial f_\mathrm{a}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f_\mathrm{a}}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f_\mathrm{a}}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{F}_\mathrm{a}.$$

Rozpisując pole $\vec{F}_\mathrm{a}$ na składowe, otrzymujemy z powyższego równania trzy cząstkowe równania różniczkowe na funkcję f_a:

$$\frac{\partial f_\mathrm{a}}{\partial x} = -\frac{y}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\partial f_\mathrm{a}}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\partial f_\mathrm{a}}{\partial z} = \sin z. \tag{1.1}$$

Ustalmy na chwilę wartości współrzędnych $y = y_0$ i $z = z_0$, dopuszczając jedynie zmienność współrzędnej x. Wtedy funkcja trzech zmiennych f_a staje się funkcją jednej zmiennej $x \mapsto f_\mathrm{a}(x, y_0, z_0)$ i pierwsze z równań (1.1) możemy zapisać w postaci

$$\frac{df_\mathrm{a}}{dx} = -\frac{y_0}{(x - y_0)^2},$$

skąd mamy

$$f_\mathrm{a}(x, y_0, z_0) = -\int \frac{y_0}{(x - y_0)^2}\, dx = \frac{y_0}{x - y_0} + C,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Powyższy wynik jest oczywiście słuszny dla dowolnych $y \neq x$ i z. Nie mamy jednak podstaw do tego, aby zakładać z góry, że stała całkowania C jest taka sama dla wszystkich y i z. Dlatego też musimy potraktować ją jako funkcję od y i z:

$$f_\mathrm{a}(x, y, z) = \frac{y}{x - y} + C(y, z). \tag{1.2}$$

Wstawiając powyższą funkcję do drugiego z równań (1.1) otrzymujemy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0,$$

co oznacza, że funkcja $C(y, z)$ nie zależy od współrzędnej y. Zatem postać funkcji (1.2) upraszcza się do

$$f_\mathrm{a}(x, y, z) = \frac{y}{x - y} + C(z).$$

Podstawienie powyższej funkcji do trzeciego z równań (1.1) daje równanie

$$\frac{dC}{dz} = \sin z,$$

skąd mamy

$$C(z) = -\cos z + C',$$

gdzie C' jest stałą całkowania.

Ostatecznie rozwiązanie równań (1.1) przyjmuje postać

$$f_\mathrm{a}(x, y, z) = \frac{y}{x - y} - \cos z + C'. \tag{1.3}$$

Zauważmy teraz, że dziedzina tej funkcji pokrywa się z dziedziną pola wektorowego $\vec{F}_\mathrm{a}$ (całe $\mathbb{R}^3$ za wyjątkiem punktów, w których $x = y$) oraz, że funkcja ta jest wszędzie różniczkowalna. Oznacza to, że funkcja (1.3) jest potencjałem pola wektorowego $\vec{F}_\mathrm{a}$, a samo pole jest polem potencjalnym.

Przypadek b) W przypadku pola $\vec{F}_\mathrm{b}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_\mathrm{b} = \left\{ \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & x \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \vec{e}_x\Big(\frac{\partial}{\partial y}x - \frac{\partial}{\partial z}z\Big) + \vec{e}_y\Big(\frac{\partial}{\partial z}y - \frac{\partial}{\partial x}x\Big) + \vec{e}_z\Big(\frac{\partial}{\partial x}z - \frac{\partial}{\partial y}y\Big) = -\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z \neq 0.$$

Ponieważ rotacja pola $\vec{F}_\mathrm{b}$ jest niezerowa, pole to nie jest potencjalne.

Przypadek c) W przypadku pola $\vec{F}_\mathrm{c}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_\mathrm{c} = \left\{ \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \vec{e}_x \Big(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Big) +$$
$$+ \vec{e}_y \Big(\frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Big) +$$
$$+ \vec{e}_z \Big(\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Big) = 0$$

Zatem pole $\vec{F}_\mathrm{c}$ spełnia warunek konieczny do bycia polem potencjalnym. Aby stwierdzić, czy pole $\vec{F}_\mathrm{c}$ jest potencjalne spróbujmy odcałkować równanie na potencjał f_c:

$$\vec{\nabla} f_\mathrm{c} = \vec{F}_\mathrm{c}.$$

Rozkładając gradient funkcji f_c i pole $\vec{F}_\mathrm{c}$ na składowe otrzymujemy:

$$\frac{\partial f_\mathrm{c}}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f_\mathrm{c}}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f_\mathrm{c}}{\partial z} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \tag{1.4}$$

Z pierwszego z powyższych równań mamy

$$f_\mathrm{c}(x,y,z) = \int \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dx = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C(y,z).$$

Podstawiając ten wynik do dwóch pozostałych równań (1.4) dostajemy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 = \frac{\partial C}{\partial z},$$

skąd płynie wniosek, że funkcja $C(y,z)$ jest funkcją stałą.

Ostatecznie

$$f_\mathrm{c}(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C$$

jest funkcją różniczkowalną na całej dziedzinie pola $\vec{F}_c$ i spełnia równanie (1.4). Jest więc potencjałem tego pola.

Przypadek d) W przypadku pola $\vec{F}_\mathrm{d}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_\mathrm{d} = \left\{ \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} \right\} = \vec{e}_x \Big(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{x^2+y^2} \Big) +$$
$$+ \vec{e}_y \Big(\frac{\partial}{\partial z} \frac{-y}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial x} 0 \Big) + \vec{e}_z \Big(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2+y^2} \Big) = 0$$

Zatem pole $\vec{F}_\mathrm{d}$ spełnia warunek konieczny do bycia polem potencjalnym. Aby stwierdzić, czy pole $\vec{F}_\mathrm{d}$ jest potencjalne, spróbujmy odcałkować równanie na potencjał f_d:

$$\vec{\nabla} f_\mathrm{d} = \vec{F}_\mathrm{d}. \tag{1.5}$$

W tym przypadku wygodnie będzie posłużyć się współrzędnymi walcowymi (ρ, φ, z) (patrz rozwiązanie zadania 1 z ćwiczeń nr 2). Gradient funkcji f_{d} we współrzędnych walcowych wyraża się następująco:

$$\vec{\nabla} f_{\mathrm{d}} = \frac{\partial f_{\mathrm{d}}}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_{\mathrm{d}}}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f_{\mathrm{d}}}{\partial z}\vec{e}_z,$$

zaś

$$\vec{F}_{\mathrm{d}} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{e}_y = -\frac{\sin\varphi}{\rho}\vec{e}_x + \frac{\cos\varphi}{\rho}\vec{e}_y = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi.$$

Zatem na mocy (1.5)

$$\frac{\partial f_{\mathrm{d}}}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial f_{\mathrm{d}}}{\partial \varphi} = 1, \qquad \frac{\partial f_{\mathrm{d}}}{\partial z} = 0$$

i w konsekwencji

$$f_d(\rho, \varphi, z) = \varphi + C. \tag{1.6}$$

Rozważmy teraz okrąg zadany równaniami $\rho = \rho_0 > 0$ i $z = z_0$. Zauważmy, że współrzędna φ rośnie, gdy poruszamy się wzdłuż tego okręgu w jedną stronę i maleje, gdy poruszamy się wzdłuż okręgu w stronę przeciwną. Oznacza to, że istnieje punkt p na tym okręgu, w którym funkcja (1.6) jest nieciągła — w punkcie p wartość funkcji (1.6) zmienia się skokowo o 2π. A skoro funkcja ta jest nieciągła w p, to nie może być w tym punkcie różniczkowalna.

Płynie stąd następujący wniosek: równanie (1.5) na funkcje f_{d} nie posiada rozwiązania, które jest określone na całej dziedzinie pola $\vec{F}_{\mathrm{d}}$. Zatem pole $\vec{F}_{\mathrm{d}}$ nie jest potencjalne mimo, że jego rotacja jest niezerowa. Przykład ten pokazuje, że warunek znikania rotacji pola wektorowego nie jest wystarczającym warunkiem dla jego potencjalności.

□

Zadanie 2. Punkt materialny P o masie m porusza się w polu siły

$$\vec{F} = -\alpha\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \tag{2.1}$$

gdzie $\alpha \neq 0$ jest stałą. Pokazać, że jeśli $\vec{L}$ jest momentem pędu punktu P liczonym względem punktu $\vec{r} = 0$, to wielkość wektorowa (zwana wektorem Rungego-Lenza)

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

jest wielkością zachowaną podczas ruchu.

Rozwiązanie. Niech[1] $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ będzie pędem punktu materialnego P. Wtedy

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}.$$

Z drugiej strony, równanie ruchu punktu P pod działaniem siły (2.1) jest postaci

$$m\ddot{\vec{r}} = -\alpha\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

[1] Rozwiązanie zadania opracowano w oparciu o podręcznik [1].

Mnożąc wektorowo obie strony powyższego równania przez $\vec{L}$ otrzymujemy

$$m\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = -\frac{\alpha}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \times \vec{L}. \tag{2.2}$$

Ponieważ siła (2.1) jest centralna, $\vec{L}$ jako moment pędu liczony względem centrum tej siły, jest zachowany podczas ruchu. Dlatego wielkość po lewej stronie równania powyżej można przekształcić następująco:

$$m\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}) \times \vec{L} = m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}). \tag{2.3}$$

Przejdźmy teraz do prawej strony równania (2.2):

$$-\frac{\alpha}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \times \vec{L} = -\frac{\alpha m}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}).$$

Zastosowanie do podwójnego iloczynu wektorowego $\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ tożsamości

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \circ \vec{b})$$

daje

$$-\frac{\alpha}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \times \vec{L} = -\frac{\alpha m}{|\vec{r}|^3}(\vec{r}\,(\vec{r} \circ \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}r^2),$$

gdzie $r \equiv |\vec{r}|$. Różniczkując po czasie obie strony tożsamości $r^2 = \vec{r} \circ \vec{r}$ dostajemy

$$2r\dot{r} = \dot{\vec{r}} \circ \vec{r} + \vec{r} \circ \dot{\vec{r}} = 2\vec{r} \circ \dot{\vec{r}}.$$

Wstawienie tego wyniku do poprzedniego równania pozwala kontynuować przekształcenia:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \times \vec{L} &= -\frac{\alpha m}{r^3}(\vec{r}(r\dot{r}) - \dot{\vec{r}}r^2) = -\frac{\alpha m}{r^2}(\vec{r}\dot{r} - \dot{\vec{r}}r) = \alpha m\Big[\Big(-\frac{\dot{r}}{r^2}\Big)\vec{r} + \frac{1}{r}\dot{\vec{r}}\Big] = \\ &= \alpha m\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{r}\Big)\vec{r} + \frac{1}{r}\dot{\vec{r}}\Big] = \alpha m\frac{d}{dt}\Big(\frac{\vec{r}}{r}\Big). \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższy rezultat i równanie (2.3) możemy równanie (2.2) zapisać w postaci

$$m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) = \alpha m\frac{d}{dt}\Big(\frac{\vec{r}}{r}\Big),$$

skąd mamy

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}\Big) = 0.$$

Tym samym wektor Rungego-Lenza jest zachowany podczas ruchu punktu materialnego P.

Na zakończenie warto dodać, że dwie następujące siły mają postać (2.1):

1. siła ciężkości, z jaką na ciało próbne działa ciało masywne o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy,
2. siła oddziaływania elektrostatycznego, z jaką na ładunek próbny działa sferycznie symetryczny rozkład ładunku.

□

Zadanie 3. W pewnym punkcie p na powierzchni obracającej się Ziemi umieszczono oscylator harmoniczny o masie m i stałej sprężystości $k > 0$ i ograniczono swobodę jego ruchu do płaszczyzny prostopadłej do kierunku pionu w punkcie p. Znaleźć ruch oscylatora, przy założeniu, że częstość drgań tego oscylatora (przy braku innych sił) jest dużo większa od częstotliwości obrotu Ziemi wokół swojej osi, a amplituda jego drgań jest dużo mniejsza od promienia Ziemi.

Rozwiązanie. Niech[2] U będzie układem inercjalnym, względem którego środek i oś obrotu Ziemi znajdują się w spoczynku, zaś U' niech będzie nieinercjalnym układem odniesienia związanym trwale z obracającą się Ziemią. Przyjmując stałość prędkości kątowej $\vec{\omega}$ opisującej obrót Ziemi, możemy wypisać równania ruchu punktu materialnego P o masie m w układzie U':

$$m\frac{d'^2\vec{r}'}{dt^2} = m\Big(\vec{g} - \vec{a}_{\mathrm{tr}} - 2\vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}'}{dt} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\Big) + \vec{F},$$

gdzie $\vec{r}'$ jest wektorem wodzącym punktu materialnego P zaczepionym w punkcie p, $\vec{g}$ jest (grawitacyjnym) przyspieszeniem ziemskim, $\vec{a}_{\mathrm{tr}}$ przyspieszeniem punktu p względem układu U, wreszcie $\vec{F}$ reprezentuje wszystkie pozostałe siły działające na P. Zauważmy, że przy braku pozostałych sił $\vec{F}$ na nieruchomy punkt materialny znajdujący się w położeniu p działa siła $m(\vec{g} - \vec{a}_{\mathrm{tr}})$ — siła ta wyznacza *kierunek pionu*

$$\vec{n} = \frac{\vec{g} - \vec{a}_{\mathrm{tr}}}{|\vec{g} - \vec{a}_{\mathrm{tr}}|} \tag{3.1}$$

w punkcie p.

Wobec tego równanie oscylatora harmonicznego opisanego w treści zadania będzie postaci

$$m\frac{d'^2\vec{r}'}{dt^2} = m\Big(\vec{g} - \vec{a}_{\mathrm{tr}} - 2\vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}'}{dt} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\Big) - k\vec{r}' + \vec{F}_R \tag{3.2}$$

— $\vec{F}_R$ są siłami reakcji zapewniającymi, że ruch oscylatora zachodzi w płaszczyźnie prostopadłej do pionu $\vec{n}$ i dlatego $\vec{F}_R = |\vec{F}_R|\vec{n}$.

Jak łatwo obliczyć

$$|-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| = m\omega^2 \sin\alpha |\vec{r}'|, \qquad |-k\vec{r}'| = k|\vec{r}'| = m\frac{k}{m}|\vec{r}'| = m\omega_0^2|\vec{r}'|$$

— $\alpha \in [0, \pi[$ jest tu kątem pomiędzy wektorami $\vec{\omega}$ i $\vec{r}'$, ω jest częstotliwością obrotu Ziemi wokół swojej osi, a ω_0 częstotliwością drgań oscylatora przy braku innych sił. Z założenia $\omega \ll \omega_0$ wynika

$$|-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| \ll |-k\vec{r}'|,$$

dzięki czemu z dobrym przybliżeniem możemy opuścić siłę $-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ w równaniu (3.2).

Wprowadźmy w układzie odniesienia U' układ współrzędnych (x', y', z') o początku w punkcie p i osi OZ' skierowanej ku górze tzn. $\vec{e}_{z'} = -\vec{n}$. Wtedy na mocy więzów nałożonych na ruch oscylatora

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{e}_{x'} + y'(t)\vec{e}_{y'}$$

[2] Rozwiązanie zadania opracowano w oparciu o podręcznik [1].

i w konsekwencji

$$\vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}'}{dt} = -\dot{y}'\omega_{z'}\vec{e}_{x'} + \dot{x}'\omega_{z'}\vec{e}_{y'} + (\dot{y}'\omega_{x'} - \dot{x}'\omega_{y'})\vec{e}_{z'}.$$

Jednakże siły reakcji $\vec{F}_R$ niwelują składową z'-ową powyższej siły, jak również całą siłę $m(\vec{g} - \vec{a}_{\rm tr})$ (założenie, że amplituda drgań oscylatora jest bardzo mała w porównaniu z promieniem Ziemi, pozwala nam traktować siłę $m(\vec{g} - \vec{a}_{\rm tr})$ jako stałą w obszarze ruchu). Dzięki temu równania ruchu (3.2) przybierają następującą prostą postać:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= 2m\dot{y}'\omega_{z'} - kx', \\ m\ddot{y}' &= -2m\dot{x}'\omega_{z'} - ky'. \end{aligned}$$

Wprowadzając zmienną zespoloną $u = x' + iy'$ można powyższe dwa równania zapisać w postaci

$$m\ddot{u} + 2mi\dot{u} + ku = 0. \tag{3.3}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu na zespoloną funkcję czasu $t \mapsto u(t)$, które można rozwiązać metodą opisaną w rozwiązaniu zadania 3 z ćwiczeń wykładowych nr 3.

Ogólne rozwiązanie równania (3.3) jest postaci

$$u(t) = A\exp(i\Omega_+ t) + B\exp(i\Omega_- t), \tag{3.4}$$

gdzie A i B są zespolonymi stałymi, a

$$\Omega_\pm = -\omega_{z'} \pm \sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}.$$

Ruch oscylatora opisany jest zatem funkcjami

$$x'(t) = \operatorname{Re} u(t), \qquad y'(t) = \operatorname{Im} u(t).$$

Nie będziemy jednak znajdować jawnej postaci powyższych funkcji, a ograniczymy się jedynie do analizy szczególnego ruchu tego oscylatora otrzymanego poprzez wychylenie go z położenia równowagi w kierunku osi OX' i oswobodzenie go z zerową prędkością początkową.

Zatem w chwili początkowej $t = 0$ wartość funkcji (3.4) powinna być rzeczywista (bo $y'(t=0) = \operatorname{Im} u(t=0) = 0$):

$$u(t=0) = A + B \in \mathbb{R}.$$

Mamy stąd

$$A = a + ic, \qquad B = a - ic,$$

gdzie a, b i c są rzeczywiste. Skoro w chwili $t = 0$ prędkość oscylatora jest zerowa to wartość funkcji

$$\dot{u}(t) = \dot{x}'(t) + i\dot{y}'(t) = iA\Omega_+ \exp(i\Omega_+ t) + iB\Omega_- \exp(i\Omega_- t)$$

w chwili $t = 0$ powinna być równa zeru:

$$\dot{u}(t=0) = iA\Omega_+ + iB\Omega_- = 0.$$

Wynika stąd, że

$$A = -\alpha\Omega_-, \qquad\qquad B = \alpha\Omega_+$$

— $\alpha \neq 0$ jest tu stałą rzeczywistą. Ostatecznie poszukiwane przez nas rozwiązanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}u(t) &= \alpha(-\Omega_- \exp(i\Omega_+ t) + \Omega_+ \exp(i\Omega_- t)) = \\ &= \alpha\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}\Big[\Big(\frac{\omega_{z'}}{\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}} + 1\Big)\exp(i\Omega_+ t) + \Big(\frac{-\omega_{z'}}{\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}} + 1\Big)\exp(i\Omega_- t)\Big]\end{aligned}$$

Z założenia $\omega = \sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2} \ll \omega_0$ wynika, że

$$\frac{\omega_{z'}}{\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}} \ll 1$$

i dlatego z dobrym przybliżeniem

$$\begin{aligned}u(t) &= \alpha\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}\,(\exp(i\Omega_+ t) + \exp(i\Omega_- t)) = \\ &= \alpha\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}\,\exp(-i\omega_{z'}t)\Big(\exp\big(i\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}\,t\big) + \exp\big(-i\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}\,t\big)\Big) = \\ &= 2\alpha\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}\,\exp(-i\omega_{z'}t)\cos\big(\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}\,t\big).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Zauważmy teraz, że gdyby w powyższym wyrażeniu nie było czynnika $\exp(-i\omega_{z'}t)$ to wartość $u(t)$ byłaby rzeczywista dla każdego t i wtedy funkcja ta opisywałaby ruch oscylatora wzdłuż osi OX' z częstotliwością $\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}$. Na płaszczyźnie zespolonej mnożenie przez $\exp(i\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, skutkuje obrotem o kąt φ względem punktu $z = 0$. Zatem czynnik $\exp(-i\omega_{z'}t)$ w (3.5) wywołuje obrót w płaszczyźnie $OX'Y'$ o kąt $-\omega_{z'}t$. Widać stąd, że ruch opisany rozwiązaniem (3.5) jest złożeniem (i) drgań oscylatora wzdłuż poziomej prostej zachodzących z "dużą" częstotliwością $\sqrt{\omega_{z'}^2 + \omega_0^2}$ i (ii) obrótu tej prostej wokół pionowej osi OZ' z "małą" częstotliwością $-\omega_{z'}$.

Rozwiązanie (3.5) może być traktowane jako przybliżony opis "małych drgań" wahadła Foucaulta na powierzchni obracającej się Ziemi — w wyniku obrotu Ziemi wokół swojej osi płaszczyzna drgań tego wahadła obraca się względem Ziemi wokół kierunku pionu z częstotliwością

$$-\omega_{z'} = \vec{n} \circ \vec{\omega},$$

gdzie wektor $\vec{n}$ dany wzorem (3.1) jest kierunkiem pionu, a $\vec{\omega}$ prędkością kątową Ziemi.

□

Literatura

[1] Rubinowicz W, Królikowski W, 1995 *Mechanika teoretyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.