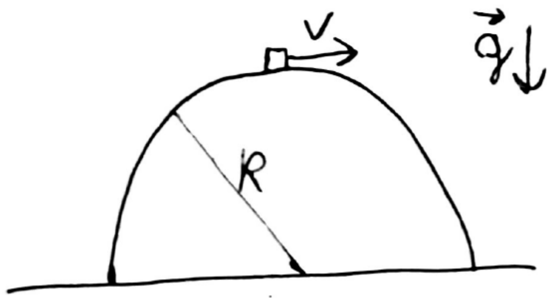
Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

Zadania na ćwiczenia – seria 5.
6 kwietnia 2020 r.

Zadania przykładowe

Przykład 1.
W polu grawitacyjnym $\vec{g}$, na szczycie połowy kuli o promieniu R znajduje się koralik o masie m i początkowej prędkości v. Początkowo koralik będzie ześlizgiwał się po powierzchni kuli. Na jakiej wysokości nad ziemią się od niej oderwie?
Zastosować formalizm równań Lagrange'a I rodzaju.



Rozwiązanie.
W zadaniu wykorzystamy formalizm równań Lagrange'a pierwszego rodzaju. Na początku zastanówmy się, jak przetłumaczyć warunek "oderwania się" koralika od powierzchni kuli na ten język.

W ogólności w zadaniu mamy do czynienia z więzami jednostronnymi ($r \geqslant R$) – odpowiada to faktowi, iż siła rekacji podłoża może być skierowana wyłącznie na zewnątrz kuli (chroni ona koralik przez wniknięciem do wnętrza kuli, ale nie zapobiega odpadnięciu na zewnątrz).

Z drugiej strony na wykładzie uczyliśmy się przeprowadzać rachunki dla więzów dwustronnych ($r = R$), co w naszym przypadku byłoby równoważne stwierdzeniu, iż siła reakcji możey działać zarówno na zewnątrz, jak i do wnętrza kuli.

Możemy zatem przeprowadzić następujące rozumowanie – napisać równania Lagrange'a dla więzów dwustronnych a następnie zobaczyć, na jakiej wysokości wartość siły reakcji (skierowanej na zewnątrz) koniecznej do utrzymania koralika na powierzchni osiąga ujemną wartość. Będzie to punkt, w którym (podlegający więzom jednostronnym) koralik odrywa się od powierzchni.

Dla uproszczenia rachunków zauważmy, że cały ruch będzie odbywał się w płaszczyznie kartki (nie występują żadne siły do niej prostopadłe). Wprowadźmy układ współrzędnych o początku w środku kuli. Wówczas mamy:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda\nabla(\vec{r}^2 - R^2), \quad \vec{r}^2 - R^2 = 0 \tag{P1.1}$$

gdzie symbol ∇ oznacza gradient. Człon $\lambda\cdot\nabla(\vec{r}^2 - R^2)$ wyraża siłę reakcji – skalar λ zezwala, aby przyjmowała dowolną wartość, a człon $\nabla(\vec{r}^2 - R^2)$ gwarantuje, że jest ona skierowana prostopadle do powierzchni więzów wyznaczonej równaniem $\vec{r}^2 - R^2 = 0$ (tutaj: powierzchni kuli).

Żeby przeprowadzić dalsze rachunki musimy wybrać konkretny układ współrzędnych. Ze względu na specyfikę problemu, naturalnym wyborem będzie układ współrzędnych biegunowych (gdzie $\varphi = 0$ odpowiada wektorowi skierowanemu w górę i φ narasta zgodnie ruchem wskazówek zegara). Przypominamy sobie jawne wyrażenia na przyspieszenie oraz gradient:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi, \tag{P1.2}$$

$$\nabla = [\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial \varphi}]^T. \tag{P1.3}$$

Równanie sfery dane jest prostym wzorem $r^2 - R^2 = 0$, zatem siła reakcji przyjmuje postać:

$$\lambda \nabla(r^2 - R^2) = \lambda 2r\hat{e}_r. \tag{P1.4}$$

Rokładamy siłę grawitacji na składowe:

$$m\vec{g} = -mg\cos(\varphi)\hat{e}_r + mg\sin(\varphi)\hat{e}_\varphi. \tag{P1.5}$$

Podstawiając to wszystko do równania ruchu (Z2.42) i zapisując osobno równania dla obu współrzędnych otrzymujemy:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) & = -mg\cos(\varphi) + \lambda 2r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) & = mg\sin(\varphi) \\ r^2 - R^2 & = 0. \end{cases} \tag{P1.6}$$

Z ostatniego mamy $r = R, \dot{r} = 0$; podstawiając do dwóch poprzednich:

$$\begin{cases} -mR\dot{\varphi}^2 & = -mg\cos(\varphi) + \lambda 2R \\ mR\ddot{\varphi} & = mg\sin(\varphi) \end{cases} \tag{P1.7}$$

skąd $\lambda = \frac{m}{2R}(g\cos(\varphi) - R\dot{\varphi}^2)$. Pozostaje nam ustalić, dla jakiego φ wartość λ staje się ujemna. Ponieważ równania na $\varphi(t)$ są nieliniowe, ich bezpośrednie rozwiązanie byłoby trudne – na szczęście nie musimy tego robić. Korzystając z faktu, iż siły reakcji nie wykonują żadnej pracy (gdyż są zawsze prostopadłe do kierunku ruchu), możemy użyć zasady zachowania energii:

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} + mgR = \frac{m(R\dot{\varphi})^2}{2} + mgR\cos(\varphi) \tag{P1.8}$$

Stąd $R\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{R} + 2g(1 - \cos(\varphi))$, zatem:

$$\lambda = \frac{g}{2R}\left(3\cos(\varphi) - \left(2 + \frac{v^2}{Rg}\right)\right) \tag{P1.9}$$

Powyższe wyrażenie na przedziale $\varphi \in [0, \pi/2]$ jest malejącą funkcją φ i osiąga wartość zero $\lambda = 0$ dla:

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{v^2}{Rg}\right), \tag{P1.10}$$

(dla większych φ wartość λ będzie ujemna), zatem koralik oderwie sie od powierzchni na wysokości:

$$h = R\cos(\varphi)\big|_{\lambda=0} = \frac{R}{3}\left(2 + \frac{v^2}{Rg}\right). \tag{P1.11}$$

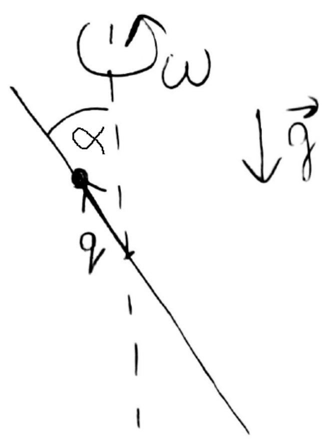
Zastanówmy się jeszcze przez chwilę, czy powyższy wynik ma sens. Warto zadać sobie pytanie, dla jakich wartości prędkości pozątkowej koralik w ogóle utrzyma się na początku na powierzchni. Sprowadza się do istnienia rozwiązania równania (P1.10) (ze względu na φ), czyli innymi słowy $1 > \frac{1}{3}\left(2 + \frac{v^2}{Rg}\right)$. Warunek ten możemy przearanżować do postaci $g > \frac{v^2}{R}$, co ma już prostą interpetację – aby wystąpił etap ślizgania, w chwili początkowej przyspieszenie dośrodkowe musi mieć mniejszą wartość niż przyspieszenie grawitacyjne (wówczas pojawia się siła rekacji podłoża, niwelująca różnicę).

—

W powyższym zadaniu zastosowaliśmy formalizm równań Lagrange'a pierwszego rodzaju, które mają charakter **wektorowy** (Z2.42). Związana była z tym pewna trudność – chcąc je rozwiązać z wykorzystaniem pewnego konkretnego układu współrzednych (tutaj: biegunowego), musieliśmy znać (lub wyprowadzić od zera) postać wektorów: przspieszenia (Z2.43) oraz gradientu (Z2.44) w tych współrzędnych.

W pozostałych dwóch przykładach skupimy się na równaniach Lagrange'a drugiego rodzaju, które operują na obiekcie **skalarnym**, jakim jest lagranżjan. Pozwala to znacznie łatwiej wyprowadzać równania w arbitralnych układach współrzędnych, gdyż transoformacja obiektów skalarnych sprowadza się do zwykłego podstawienia zmiennych.

Przykład 2.
Nieskończenie długi pręt, nachylony do pionu pod stałym kątem α obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej osi. Na pręt nanizany jest koralik o masie m. Całość znajduje się w polu grawitacyjnym $\vec{g}$. Podać wzór na położenie koralika od czasu $q(t)$ dla dowolnych warunków początkowych. Czy istnieją takie warunki początkowe, dla ktorych koralik nie będzie się poruszał?
Zastosować formalizm równań Lagrange'a II rodzaju.



Rozwiązanie.
Ogólnie koralik porusza się w trójwymiarowej przestrzeni, ale swoboda jego ruchu jest ograniczona do jednego wymiaru (sparametryzowanego na obrazku przez q). Aby zastosować równania Lagrange'a II rodzaju, potrzebujemy wyrazić energię kinetyczną i potencjalną jako funkcje tej współrzędnej; w szczególności energia kinetyczna może sprawiać problemy.

Aby nie musieć nic "zgadywać", ani "łatwo zauważać", możemy to zrobić w dwóch krokach:

- zapisać energię kinetyczną używając jakiegoś standardowego układu współrzędnych (kartezjańskie, sferyczne itd.), dla którego znamy odpowiednie wyrażenia.
- powiązać te współrzędne ze zmienną q oraz uwzględnić narzucone więzy.

Do tego zadanie wygodne będą współrzędne sferyczne (r, θ, φ) (gdzie początek układu współrzędnych znajduje się na przecięciu pręta i osi obrotu). Energia kinetyczna jest dana wówczas jako:

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\theta})^2}{2} + \frac{m(r\sin(\theta)\dot{\varphi})^2}{2} \tag{P2.12}$$

Ropatrzmy na razie przypadek $q \geqslant 0$. Z treści zadania kąt nachylenia pręta do pionu jest stały $\theta = \alpha$ (a zatem $\dot{\theta} = 0$), a także prędkość obrotu wokół pionowej osi ma stałą wartość $\dot{\varphi} = \omega$. Wreszcie długość promienia wodzącego jest równa $r = q$, zatem energia kinetyczna (jako funkcja jednej zmiennej uogólnionej q i jej pochodnej $\dot{q}$) jest równa:

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m(q\sin(\alpha)\omega)^2}{2} \tag{P2.13}$$

(wzór jest symetryzny na zamianę $q \mapsto -q$ oraz $\alpha \mapsto \alpha + \pi$, a więc będzie obowiązywał również dla $q < 0$). Widzimy, że całkowita energia kinetyczna koralika jest sumą energii związanej z ruchem wdłuż pręta oraz ruchem wokół osi obrotu – dzieje się tak dlatego, że wektory prędkości związne z tymi dwoma ruchami są wzajemnie **prostopadłe**.

Energia potencjalna występująca w zadaniu to energia grawitacji. Przyjmując, że wartość potencjału wynosi 0 w punkcie przecięcia pręta z osią obrotu, otrzymujemy:

$$V = mgq\cos(\alpha). \tag{P2.14}$$

Możemy teraz zapisać pełen Lagranżjan:

$$L = T - V = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m(q\sin(\alpha)\omega)^2}{2} - mgq\cos(\alpha) \tag{P2.15}$$

oraz równanie Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \tag{P2.16}$$

Wyliczamy wzory na poszczególne wyrażenia:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}, \tag{P2.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = m\sin^2(\alpha)\omega^2 q - mg\cos(\alpha). \tag{P2.18}$$

Podstawiając wyniki i dzieląc stronami prze m otrzymujemy:

$$\ddot{q} = \sin^2(\alpha)\omega^2 q - g\cos(\alpha) \tag{P2.19}$$

Warto zauważyć, że już w tym momencie możemy odpowiedzieć na końcowe pytanie z treści zadania "Czy istnieją takie warunki początkowe, dla których koralik nie będzie się poruszał?". Widzimy, że przyspieszenie będzie równe zero, gdy koralik znajdzie się w punkcie $q = \frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2}$. Zatem jeśli umieścimy go tam z zerową prędkością początkową, pozostanie nieruchomy.

Aby znaleźć ogólny wzór, użyjemy standardowych metod rozwiązywania liniowych równań niejednorodnych. Wspomniane przed chwilą rozwiązanie stacjonarne jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego (RSRNJ):

$$q_{RSRNJ}(t) = \frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2}, \tag{P2.20}$$

a rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (RORJ) jest:

$$q_{RORJ}(t) = C_1 e^{\sin(\alpha)\omega t} + C_2 e^{-\sin(\alpha)\omega t}, \tag{P2.21}$$

zatem ostatecznie:

$$q(t) = C_1 e^{\sin(\alpha)\omega t} + C_2 e^{-\sin(\alpha)\omega t} + \frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2}. \tag{P2.22}$$

Zadając warunki początkowe $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = v_0$, otrzymujemy układ dwóch równań liniowych:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2} & = q_0 \\ \sin(\alpha)\omega C_1 - \sin(\alpha)\omega C_2 & = v_0 \end{cases} . \tag{P2.23}$$

Porządkujemy wyrazy:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = q_0 - \frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2} \\ C_1 - C_2 & = \frac{v_0}{\sin(\alpha)\omega} \end{cases} . \tag{P2.24}$$

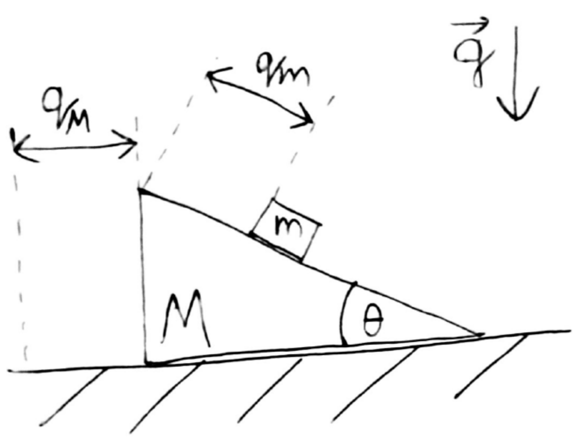
Dodając i odejmując stronami otrzymujemy ostatecznie:

$$q(t) = C_1 e^{\sin(\alpha)\omega t} + C_2 e^{-\sin(\alpha)\omega t} + \frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2},$$
$$\begin{cases} C_1 & = \frac{1}{2}\left(\left(q_0 - \frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2}\right) + \frac{v_0}{\sin(\alpha)\omega}\right) \\ C_2 & = \frac{1}{2}\left(\left(q_0 - \frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2}\right) - \frac{v_0}{\sin(\alpha)\omega}\right) \end{cases} \tag{P2.25}$$

Chcąc sprawdzić poprawność rachunków możemy podstawić zidentyfikowane wcześniej warunki początkowe rozwiązania stacjonarnego $(q_0, v_0) = \left(\frac{g\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\omega^2}, 0\right)$ – faktycznie, obie stałe C_1, C_2 się wówczas zerują.

Z ogólnego wzoru widzimy również, że nie jest to położenie równowagi trwałej, tylko chwiejnej – jeżeli początkowo umieścimy nieruchomy koralik nieco powyżej tego punktu ($C_1 > 0$), zacznie się od ekspotenjalnie szybko oddalać w górę; podobnie, jeśli zaczniemy nieco poniżej punktu równowagi z zerową prędkością ($C_1 < 0$), poleci od w dół.

Przykład 3.
W polu grawitacyjnym $\vec{g}$ na równi pochyłej o kącie nachylenia θ i masie M umieszczona jest cegła o masie m. Nie ma tarcia między równią a podłożem (równia może przesuwać się w poziomie), ani między cegłą a równią. Wyznaczyć wartość przyspieszenia równi.
Zastosować formalizm równań Lagrange'a II rodzaju (na rysunku zaproponowano przykładowe współrzędne uogólnione $(q_1, q_2) = (q_m, q_M)$).



Rozwiązanie.
Ponownie główną trudnością zadania jest tutaj poprawne zapisanie wzoru na energię kinetyczną wyrażoną przez wpsółrzędne uogólnione. Zauważmy, że o ile współrzędna q_M parametryzuje ruch równi względem incercjalnego układu odniesienia (zatem energia kinetyczna równi zależeć będzie wyłącznie od $\dot{q}_M$), to q_m

określa położenie cegły względem równi, która też się porusza (czyli energia kinetyczna cegły zależeć będzie zarówno od $\dot{q}_m$ jak i $\dot{q}_M$). Aby to usystematyzować, wprowadźmy układ współrzednych kartezjańskich o początku z lewej strony obrazka na wysokości czubka równi. Współrzędne kartezjańskie poszczególnych obiektów wyrażają się wówczas przez współrzędne uogólnione w następujący sposób:

$$\begin{cases} x_M &= q_M \\ y_M &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_m &= q_M + \cos(\theta) q_m \\ y_m &= -\sin(\theta) q_m \end{cases}. \tag{P3.26}$$

Różniczkując po czasie otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{x}_M &= \dot{q}_M \\ \dot{y}_M &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_m &= \dot{q}_M + \cos(\theta) \dot{q}_m \\ \dot{y}_m &= -\sin(\theta) \dot{q}_m \end{cases} \tag{P3.27}$$

(ktoś może zauwazyć, że nie są to współrzędne środków masy, lecz pewnych krańcowych punktów obydwu brył – nie stanowi to jednak problemu, gdyż, jakoże bryły się nie obracają, dowolny punkt bryły porusza się z tą samą prędkością co środek masy). Dalej, znając wzór na energię kinetyczną wyrażoną we współrzędnych kartezjańskich możemy podstawić powyższą zależność i otrzymać:

$$T = \frac{M(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2)}{2} + \frac{m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)}{2} = \frac{M\dot{q}_M^2}{2} + \frac{m}{2}\Big(\dot{q}_M^2 + 2\cos(\theta)\dot{q}_M\dot{q}_m + \dot{q}_m^2\Big). \tag{P3.28}$$

Energia potencjalna grawitacji wyraża się w prosty sposób:

$$V = -gmq_m \sin(\theta) \tag{P3.29}$$

Mamy zatem:

$$L = T - V = \frac{M\dot{q}_M^2}{2} + \frac{m}{2}\Big(\dot{q}_M^2 + 2\cos(\theta)\dot{q}_M\dot{q}_m + \dot{q}_m^2\Big) + gmq_m\sin(\theta) \tag{P3.30}$$

Zapisujemy równania EL dla każdej ze współrzędnych. Dla q_M:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_M} = \frac{\partial L}{\partial q_M} \tag{P3.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_M} = (M+m)\dot{q}_M + m\cos(\theta)\dot{q}_m \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_M} = (M+m)\ddot{q}_M + m\cos(\theta)\ddot{q}_m \tag{P3.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_M} = 0 \tag{P3.33}$$

Podstawiajac poszczególne elementy do (P3.31)

$$(M+m)\ddot{q}_M + m\cos(\theta)\ddot{q}_m = 0. \tag{P3.34}$$

Dla q_m:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial L}{\partial q_m} \tag{P3.35}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = m\dot{q}_m + m\cos(\theta)\dot{q}_M \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_M} = m\ddot{q}_m + m\cos(\theta)\ddot{q}_M \tag{P3.36}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = gm\sin(\theta) \tag{P3.37}$$

Podstawiając poszczególne elementy do (P3.35)

$$m\ddot{q}_m + m\cos(\theta)\ddot{q}_M = gm\sin(\theta). \tag{P3.38}$$

Otrzymujemy zatem układ dwóch równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_M} & = \frac{\partial L}{\partial q_M} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} & = \frac{\partial L}{\partial q_m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{q}_M + m\cos(\theta)\ddot{q}_m & = 0 \\ m\ddot{q}_m + m\cos(\theta)\ddot{q}_M & = gm\sin(\theta) \end{cases} \tag{P3.39}$$

Interesuje nas jedynie przyspieszenie równi ($\ddot{q}_M$), zatem dla ograniczenia rachunków spróbujmy "pozbyć się" drugiej zmiennej bez jej jawnego wyliczania. Przemnażając drugie równanie przez $\cos(\theta)$ i odejmując stronami dostajemy:

$$\big(M + m(1-\cos^2(\theta))\big)\ddot{q}_M = -gm\sin(\theta)\cos(\theta), \tag{P3.40}$$

co po podzieleniu stronami (i wykorzystaniu jedynki trygonometrycznej) daje:

$$\ddot{q}_M = -\frac{gm\sin(\theta)\cos(\theta)}{M+m\sin^2(\theta)}. \tag{P3.41}$$

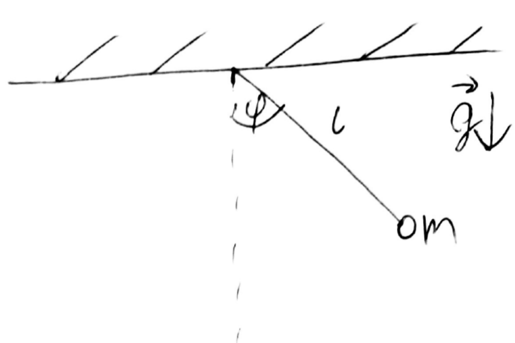
Ponieważ wynik wygląda nieco egzotycznie, warto się zastanowić, czy jesteśmy w stanie skontrolować jego poprawność badając pewne przypadki graniczne, np.:

- gdy masa równi dąży do nieskończoności, przyspieszenie dąży do 0 (ok.).
- gdy masa rowni dąży do zera, przyspieszenie daży do $-g\,\mathrm{ctg}(\theta)$ – ma to sens, gdyż kiedy równia jest nieważka, na bieżąco wyśliguje się on spod cegły spadającej z przyspieszeniem g (ok.).
- gdy $\theta = 0$, przyspieszenie równi również jest zerowe (bo cały układ spoczywa) (ok.).
- gdy $\theta = \pi/2$, przyspieszenie równi jest zerowe (cegła spada pionowo, nie naciskając na równię) (ok.).

Oczywiście sprawdzenie granicznych przypadków nie daje gwarancji poprawności rozwiązania, ale często pozwala wyeliminować błędy rachunkowe.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Koralik o masie m wisi na nitce o długości l w polu grawitacyjnym $\vec{g}$. Maksymalne naprężenienie, jakie jest w stanie wytrzymać nitka, wynosi $N_{\max}$. W chwili początkowej koralik wychylony jest o $\pi/2$ w prawo i nie porusza się, po czym zaczyna spadać pod wpływem grawitacji. Dla jakiego kąta φ nitka ulegnie zerwaniu (zakładając, że masa koralika jest na tyle duża, iż faktycznie dojdzie do zerwania)?
Zastosować formalizm równań Lagrange'a I rodzaju.



Rozwiązanie.

Postępujemy podobnie jak w przykładowym zadaniu 1. Przyjmujemy środek układu współrzędnych w punkcie zaczepienia nitki do sufitu. Fakt, że koralik znajduje się na końcu nitki o długości l wyraża się równaniem więzów $\vec{r}^2 - l^2 = 0$, mamy zatem:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda\nabla(\vec{r}^2 - l^2), \quad \vec{r}^2 - l^2 = 0, \tag{Z2.42}$$

gdzie $\lambda\nabla(\vec{r}^2 - l^2) =: \vec{N}$ to siłą naprężenia nici – interesuje nas, kiedy osiągnie ona wartość $|\vec{N}| = N_{\max}$. Tak jak ostatnio ruch będzie zachodził w jednej płaszczyźnie. Wprowadzamy współrzędne biegunowe, gdzie φ przyjmuje wartość 0 dla koralika zwisającego w dół i narasta w prawo (antyzegarowo) – jak na rysunku. Korzystając z wyrażeń na pryspieszenie i gradient:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi, \tag{Z2.43}$$

$$\nabla = [\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial \varphi}]^T \Rightarrow \lambda\nabla(r^2 - l^2) = \lambda 2r\hat{e}_r \tag{Z2.44}$$

i rokładając siłę grawitacji na składowe:

$$m\vec{g} = mg\cos(\varphi)\hat{e}_r - mg\sin(\varphi)\hat{e}_\varphi \tag{Z2.45}$$

(zauważmy, że powyższe równanie różni sie od tego z zadania przykładowego, gdyż przyjeliśmy tu inną konwencję mierzenia kąta φ) otrzymujemy:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) & = mg\cos(\varphi) + \lambda 2r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) & = -mg\sin(\varphi) \\ r^2 - l^2 & = 0. \end{cases} \tag{Z2.46}$$

Z ostatniego mamy $r = l, \dot{r} = 0$; podstawiając do dwóch poprzednich:

$$\begin{cases} -mR\dot{\varphi}^2 & = mg\cos(\varphi) + \lambda 2l \\ mR\ddot{\varphi} & = -mg\sin(\varphi) \end{cases} \tag{Z2.47}$$

skąd $N = \lambda 2l = -m(g\cos(\varphi) + l\dot{\varphi}^2)$. Widzimy, że przyjmuje ona wartość ujemną – to dobrze, gdyż wersor $\hat{e}_r$ skierowany jest na zewnątrz okręgu, po którym porusza się koralik, zatem siła $\vec{N} = N\hat{e}_r$ skierowana jest w stronę punktu zaczepienia (tak jak powinna).

Aby znaleźć punkt, w ktorym nitka ulegnie zerwaniu, ponownie skorzystajmy z zasady zachowania energii:

$$E_0 = mgl = \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2} + mgl(1 - \cos(\varphi)) \tag{Z2.48}$$

Stąd $l\dot{\varphi}^2 = 2g\cos(\varphi)$, zatem:

$$|N| = 3mg\cos(\varphi) \tag{Z2.49}$$

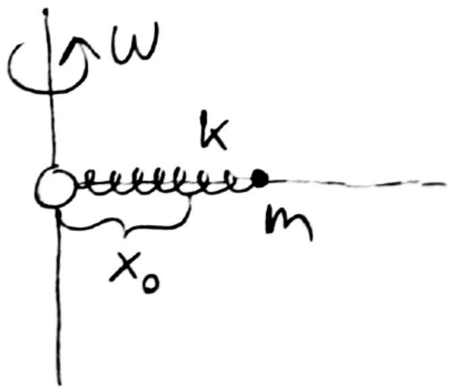
Nitka ulegnie zerwaniu dla kąta spełniającego:

$$|N| = N_{\max} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{N_{\max}}{3mg}\right). \tag{Z2.50}$$

Zadanie 2.

Do pionowego pręta przyczepiona jest jednym końcem sprężyna o stałej k, z ciężarkiem m na drugim końcu. Długość nierozciągniętej sprężyny wynosi x_0. Cały układ obraca się z częstością kątową ω. Znaleźć częstość drgań ciężarka (sprężyna nie ulega wygięciu na boki).

Zastosować formalizm równań Lagrange'a II rodzaju.



Rozwiązanie.

Wybierzmy za współrzędną uogólnioną odległość x ciężarka od osi obrotu. Energia kinetyczna wyrażona we współrzędnych biegunowych (w płaszczyźnie poziomej) dana jest wzorem:

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\varphi})^2}{2}. \tag{Z2.51}$$

U nas $r = x$, $\dot{\varphi} = \omega$, zatem:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m(x\omega)^2}{2}. \tag{Z2.52}$$

Energia potencjalna sprężyny wynosi $V = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$; mamy więc ostatecznie:

$$L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m(x\omega)^2}{2} - \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \tag{Z2.53}$$

Zapisujemy równanie EL:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{Z2.54}$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x - k(x - x_0) \tag{Z2.55}$$

$$\ddot{x} = -(\tfrac{k}{m} - \omega^2)x + \tfrac{k}{m}x_0 \tag{Z2.56}$$

Punktem równowagi jest tutaj $x = \frac{kx_0}{k - m\omega^2}$. Wprowadzając dla wygody nową zmienną $\tilde{x} = x - \frac{kx_0}{k - m\omega^2}$ dostajemy:

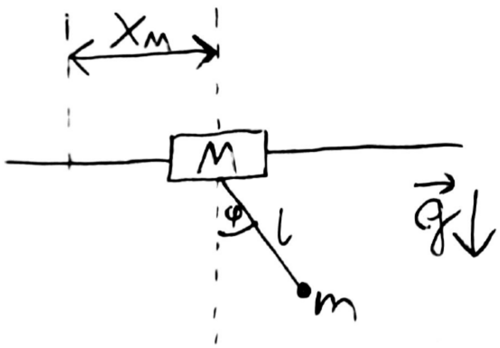
$$\ddot{\tilde{x}} = -(\tfrac{k}{m} - \omega^2)\tilde{x}, \tag{Z2.57}$$

co jest równaniem oscylatora o częstości $\omega_{\mathrm{osc}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$. Widzimy, że wynik ten ma sens wyłącznie dla $\omega^2 < \frac{k}{m}$. Istotnie, tylko dla takich prędkości kątowych ciężarek będzie oscylował – jeśli ω będzie większa, siła odśrodkowa okaże się zbyt duża, aby sprężyna była w stanie ją zrównoważyć, a ciężarek oddali się do nieskończoności.

Zadanie 3.

Na poziomej szynie umieszczony jest klocek o masie M (może się on swobodnie przemieszczać wzdłuż szyny). Do klocka przyczepione jest wahadło o masie m i długości l (przyspieszenie ziemskie wynosi $\vec{g}$). Zapisać układ różniczkowych na wartość współrzędnych uogólnionych w zależności od czasu (bez rozwiązywania).

Zastosować formalizm równań Lagrange'a II rodzaju (na rysunku zaproponowano przykładowe współrzędne uogólnione $(q_1, q_2) = (x_M, \varphi)$).



Rozwiązanie.
Wprowadźmy układ kartezjański o początku na szynie z lewej strony obrazka. Współrzędne kartezjańskie poszczególnych obiektów wyrażają się wówczas przez x_M, φ następująco:

$$\begin{cases} x_M &= x_M \\ y_M &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_m &= x_M + \sin(\varphi) l \\ y_m &= -\cos(\varphi) l \end{cases}. \tag{Z3.58}$$

Prędkości:

$$\begin{cases} \dot{x}_M &= \dot{x}_M \\ \dot{y}_M &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_m &= \dot{x}_M + \cos(\varphi) l \dot{\varphi} \\ \dot{y}_m &= \sin(\varphi) l \dot{\varphi} \end{cases}. \tag{Z3.59}$$

Zatem:

$$T = \frac{M(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2)}{2} + \frac{m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)}{2} = \frac{M\dot{x}_M^2}{2} + \frac{m}{2}\Big(\dot{x}_M^2 + 2\cos(\varphi)\dot{x}_M l\dot{\varphi} + (l\dot{\varphi})^2\Big). \tag{Z3.60}$$

$$V = -mgl\cos(\varphi). \tag{Z3.61}$$

Wypisujemy Lagranżjan:

$$L = T - V = \frac{M\dot{x}_M^2}{2} + \frac{m}{2}\Big(\dot{x}_M^2 + 2\cos(\varphi)\dot{x}_M l\dot{\varphi} + (l\dot{\varphi})^2\Big) + mgl\cos(\varphi) \tag{Z3.62}$$

i równania EL:

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} = \frac{\partial L}{\partial x_M} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}. \end{gathered} \tag{Z3.63}$$

Liczymy bezpośrednio:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} = (M+m)\dot{x}_M + m\cos(\varphi) l\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} = (M+m)\ddot{x} - m\sin(\varphi) l\dot{\varphi}^2 + m\cos(\varphi) l\ddot{\varphi} \tag{Z3.64}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_M} = 0 \tag{Z3.65}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + \cos(\varphi)\dot{x}_M l \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi} - m\sin(\varphi)\dot{x}_M l\dot{\varphi} + m\cos(\varphi)\ddot{x}_M l \tag{Z3.66}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m\sin(\varphi)\dot{x}_M l\dot{\varphi} - mgl\sin(\varphi) \tag{Z3.67}$$

i podstawiamy:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M - m\sin(\varphi)l\dot{\varphi}^2 + m\cos(\varphi)l\ddot{\varphi} & = 0 \\ ml^2\ddot{\varphi} - m\sin(\varphi)\dot{x}_M l\dot{\varphi} + m\cos(\varphi)\ddot{x}_M l & = -m\sin(\varphi)\dot{x}_M l\dot{\varphi} - mgl\sin(\varphi) \end{cases} \tag{Z3.68}$$

Część wyrazów się upraszcza i ostatecznie mamy:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_M + m(-\sin(\varphi)l\dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi)l\ddot{\varphi}) & = 0 \\ l\ddot{\varphi} + \cos(\varphi)\ddot{x}_M + g\sin(\varphi) & = 0. \end{cases} \tag{Z3.69}$$

Równania się wysoce nieliniowe i nie da się ich rozwiązać standardowymi metodami.

——

Ciekawostka dla zainteresowanych: można zauważyć, że pierwsze z powyższych równań ma prostą intepretację. Zauważmy, że na układ nie działają żadne siły zewnętrzne w kierunku poziomym (siły reakcji więzów są pionowe); oznacza to, że składowa pozioma wektora pędu jest zachowana. Wyraża się ona jako:

$$M\dot{x}_M + m(\dot{x}_M + l\dot{\varphi}\cos(\varphi)) = const. \tag{Z3.70}$$

Różniczkując po czasie otrzymamy dokładnie pierwsze równanie z (Z3.69). Wyprzedzając nieco materiał i używając języka z wykładu z 6 kwietnia, powiedzielibyśmy, że x_M jest tutaj współrzędną cykliczną, a składowa pozioma pędu całego układu – odpowiadającym jej pędem uogólnionym.

Wojciech Górecki