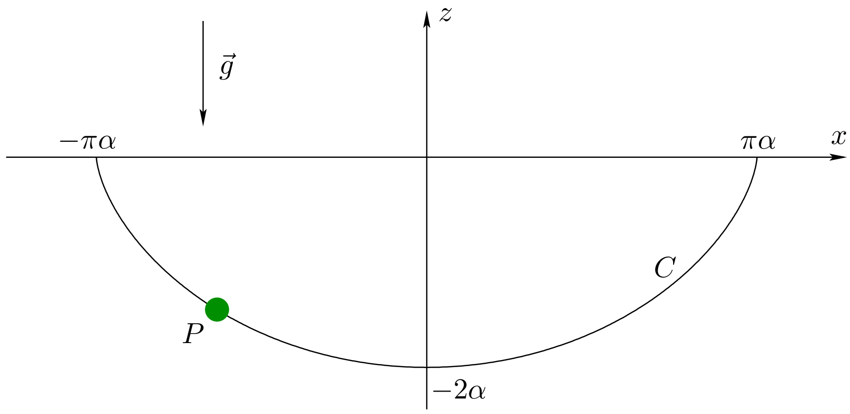
Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 5
6 kwietnia 2020

Zadanie 1. Wahadło cykloidalne Punkt materialny P o masie m porusza się bez tarcia po cykloidzie C, będącej obrazem odwzorowania

$$[-\pi, \pi] \ni \lambda \mapsto \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda + \sin\lambda) \\ 0 \\ -\alpha(1 + \cos\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

gdzie $\alpha > 0$ jest stałą (patrz rysunek 1). Oprócz siły reakcji cykloidy na punkt P działa siła ciężkości $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_z$ ($g > 0$ jest wielkością stałą). Znaleźć ruch punktu P oraz zależność działającej nań siły reakcji od położenia. Czy okres drgań punktu P zależy od amplitudy drgań?



Rys. 1: Wahadło cykloidalne

Rozwiązanie. Ponieważ odwzorowanie (1.1) jest różnowartościowe, więc parametr λ może być traktowany jak współrzędna na cykloidzie[1] C, a znalezienie ruchu punktu materialnego P można wobec tego rozumieć jako znalezienie zależności $t \mapsto \lambda(t)$, gdzie $\lambda(t)$ opisuje położenie punktu P na cykloidzie.

W celu znalezienia ruchu punktu P posłużymy się zasadą zachowania energii — siła ciężkości $\vec{F}_G$ jest siłą potencjalną o potencjale $V(x, y, z) = mgz$, a siła reakcji cykloidy jest siłą działającą prostopadle do chwilowego kierunku ruchu, w związku z czym siła ta nie wykonuje pracy. W efekcie całkowita energia mechaniczna E, będąca sumą energii kinetycznej i potencjalnej (równej potencjałowi siły $\vec{F}_G$), jest stała w czasie:

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + mgz = \text{const.}$$

Oznaczając symbolem e ilość energii przypadającej na jednostkę masy, $e \equiv E/m$ otrzymujemy z powyższego równania następujące prawo zachowania

$$e = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + gz = \text{const.}, \tag{1.2}$$

[1] Ściśle rzecz biorąc, parametr λ jest współrzędną na cykloidzie poza jej końcami, gdzie odpowiednie pochodne jednostronne $dx/d\lambda = 0 = dz/d\lambda$.

które będzie punktem wyjścia do znalezienia ruchu punktu P.

Przedtem jednak określimy dozwolone wartości wielkości e. Z (1.1) wynika, że zakres zmienności współrzędnej z wzdłuż cykloidy to przedział $[-2\alpha, 0]$. Minimalną wartość e otrzymamy minimalizując obydwa człony po prawej strony (1.2) kładąc $\vec{v} = 0$ i $z = -2\alpha$. Zatem minimalna wartość e to $-2g\alpha$. Z drugiej strony, wartość e nie może być większa od zera — gdyby była, to na każdym z końców cykloidy $(x, y, z) = (\pm\pi\alpha, 0, 0)$ równanie (1.2) przyjmowałoby postać

$$0 < e = \frac{1}{2}\vec{v}^2.$$

Oznaczałoby to, że punkt P może mieć na końcu cykloidy niezerową prędkość skierowaną ku górze, co oznaczałoby opuszczenie cykloidy przez punkt P. Zatem

$$e \in [-2g\alpha, 0]. \tag{1.3}$$

Przejdźmy teraz do wyznaczenia ruchu punktu materialnego P. Zaczniemy od wyrażenia prędkości $\vec{v}$ występującej w (1.2) za pomocą funkcji $t \mapsto \lambda(t)$ i jej pochodnej $\dot{\lambda}$. Z (1.1) mamy

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \Big(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}, \frac{dz}{d\lambda}\Big)\dot{\lambda} = \alpha(1 + \cos\lambda, 0, \sin\lambda)\dot{\lambda}. \tag{1.4}$$

Wstawiając powyższy wynik do (1.2) i wyrażając z w funkcji λ dostajemy

$$e = \frac{\alpha^2}{2}\big((1 + \cos\lambda)^2 + \sin^2\lambda\big)\dot{\lambda}^2 - \alpha g(1 + \cos\lambda) = \alpha^2(1 + \cos\lambda)\dot{\lambda}^2 - \alpha g(1 + \cos\lambda).$$

Możemy stąd obliczyć wartość $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \pm\sqrt{\frac{e + \alpha g(1 + \cos\lambda)}{\alpha^2(1 + \cos\lambda)}}. \tag{1.5}$$

Do przekształcenia powyższego wyrażenia wykorzystamy tożsamość trygonometryczną postaci

$$1 + \cos\lambda = 2\cos^2(\lambda/2).$$

Dla $\lambda \in [-\pi, \pi]$ wartość $\cos(\lambda/2)$ jest nieujemna, wobec czego

$$\sqrt{1 + \cos\lambda} = \sqrt{2}|\cos(\lambda/2)| = \sqrt{2}\cos(\lambda/2).$$

Zatem wyrażenie (1.5) na pochodną $\dot{\lambda}$ można zapisać jak następuje:

$$\dot{\lambda} = \pm\frac{\sqrt{e + 2\alpha g\cos^2(\lambda/2)}}{\sqrt{2}\alpha\cos(\lambda/2)} \tag{1.6}$$

i w efekcie

$$\pm 1 = \frac{\sqrt{2}\alpha\cos(\lambda/2)}{\sqrt{e + 2\alpha g\cos^2(\lambda/2)}}\dot{\lambda}.$$

Odcałkowując obie strony powyższego równania po czasie otrzymujemy

$$\pm(t - t_0) = \int \frac{\sqrt{2}\alpha\cos(\lambda/2)}{\sqrt{e + 2\alpha g\cos^2(\lambda/2)}}\,d\lambda = \left\{ \begin{aligned} u &= \sqrt{\tfrac{2\alpha g}{e+2\alpha g}}\sin(\lambda/2) \\ du &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2\alpha g}{e+2\alpha g}}\cos(\lambda/2)\,d\lambda \end{aligned} \right\} = $$

$$= \sqrt{\frac{4\alpha}{g}}\int\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{\frac{4\alpha}{g}}\arcsin u. \tag{1.7}$$

Na podstawie powyższego wyniku znajdziemy teraz zależność $u(t)$, pamiętając o tym, że znak $\pm$ mnożący nawias $(t - t_0)$ po lewej stronie (1.7) jest znakiem pochodnej $\dot{\lambda}$ (patrz (1.5)). Ustalmy zatem wartość $t_0 = t'$ i załóżmy, że pochodna $\dot{\lambda}$ jest wtedy dodatnia. Biorąc pod uwagę fakt, że dziedziną i obrazem funkcji arcus sinus są przedziały, odpowiednio, $[-1, 1]$ i $[-\pi/2, \pi/2]$ widzimy, że w rozwiązaniu (1.7) z ustalonym $t_0 = t'$ i znakiem $+$

$$u \in [-1, 1], \qquad\qquad t - t' \in \Big[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega} \Big], \tag{1.8}$$

gdzie

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{4\alpha}}. \tag{1.9}$$

Zakładając powyższe ograniczenia możemy odwrócić zależność (1.7) otrzymując

$$u(t) = \sin(\omega(t - t')). \tag{1.10}$$

Rozważmy teraz rozwiązanie (1.7) ze znakiem $-$ i ustalonym $t_0 = t' + \pi/\omega$. Wtedy

$$u \in [-1, 1], \qquad\qquad t - t' - \pi/\omega \in \Big[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega} \Big] \tag{1.11}$$

i w konsekwencji

$$u(t) = -\sin\big(\omega(t - t') + \pi\big) = \sin(\omega(t - t')). \tag{1.12}$$

Widzimy teraz, że zależność $u(t)$ ma taką samą postać (1.10) i (1.12) dla

$$t - t' \in \Big[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega} \Big] \cup \Big[\frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega} \Big] = \Big[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega} \Big] \tag{1.13}$$

— otrzymany tu zakres wartości $t - t'$ wynika z ograniczeń (1.8) i (1.11).

Łatwo się teraz przekonać, że (i) rozwiązania (1.7) ze znakiem $+$ z lewej strony i

$$t_0 = t' + 2k\pi/\omega, \quad k \in \mathbb{Z},$$

oraz (ii) rozwiązania (1.7) ze znakiem $-$ z lewej strony i

$$t_0 = t' + (2k+1)\pi/\omega, \quad k \in \mathbb{Z},$$

"zszywają się" po odwróceniu do jednego rozwiązania postaci (1.10) obowiązującego dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Wyrażając zmienną u przez zmienną λ otrzymujemy

$$\sin\big(\lambda(t)/2\big) = \sqrt{\frac{e + 2\alpha g}{2\alpha g}} \sin\big(\omega(t - t')\big). \tag{1.14}$$

Zauważmy teraz, że zakres zmienności wielkości $\lambda(t)/2$ zawiera się w przedziale $[-\pi/2, \pi/2]$ (patrz (1.1)). Z drugiej strony, biorąc po uwagę ograniczenie (1.3), widzimy, że pierwiastek po prawej stronie równania (1.14) jest nie większy niż 1, co oznacza, że zakres zmienności tej strony równania jest podzbiorem przedziału $[-1, 1]$. Możemy zatem na obie strony równania (1.14) podziałać funkcją arcus sinus, otrzymując w ten sposób ruch punktu materialnego P opisany za pomocą współrzędnej λ [2]:

$$\lambda(t) = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{e + 2\alpha g}{2\alpha g}} \sin\big(\omega(t - t')\big) \right). \tag{1.15}$$

[2] Dla $e = 0$ funkcja $t \mapsto \lambda(t)$ jest nieróżniczkowalna w $t = t' + k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. W tych chwilach punkt P znajduje się na jednym lub na drugim końcu cykloidy, czyli w punkcie, w którym parametr λ nie jest dobrze określoną współrzędną na cykloidzie.

Wnioskujemy stąd, że ruch punktu P jest ruchem okresowym z częstością (1.9).

Aby znaleźć siłę reakcji $\vec{F}_R$ działającą na punkt materialny P skorzystamy z równań ruchu

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{F}_G,$$

gdzie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem punktu P. Mamy z (1.4)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \alpha(-\sin\lambda, 0, \cos\lambda)\dot{\lambda}^2 + \alpha(1+\cos\lambda, 0, \sin\lambda)\ddot{\lambda}.$$

Drugą pochodną $\ddot{\lambda}$ wyliczamy różniczkując po czasie wyrażenie (1.6):

$$\ddot{\lambda} = \frac{d}{dt}\left(\pm\sqrt{\frac{e+\alpha g(1+\cos\lambda)}{\alpha^2(1+\cos\lambda)}}\right) = \pm\frac{d}{d\lambda}\Big(\frac{e}{\alpha^2(1+\cos\lambda)} + \frac{g}{\alpha}\Big)^{1/2}\dot{\lambda} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\Big(\frac{e}{\alpha^2(1+\cos\lambda)} + \frac{g}{\alpha}\Big)^{-1/2}\frac{e\sin\lambda}{\alpha^2(1+\cos\lambda)^2}\dot{\lambda} = \frac{e\sin\lambda}{2\alpha^2(1+\cos\lambda)^2}$$

— w ostatnim kroku użyliśmy (1.6) ponownie. Zatem zależność siły reakcji od położenia przedstawia się następująco:

$$\vec{F}_R(\lambda) = m\vec{a} - \vec{F}_G = m\alpha(-\sin\lambda, 0, \cos\lambda)\Big(\frac{e}{\alpha^2(1+\cos\lambda)} + \frac{g}{\alpha}\Big) +$$

$$+ \alpha(1+\cos\lambda, 0, \sin\lambda)\frac{e\sin\lambda}{2\alpha^2(1+\cos\lambda)^2} - m(0,0,g).$$

Odnośnie zależności okresu drgań od amplitudy: z zależności współrzędnej z od parametru λ (patrz (1.1)) i ze wzoru (1.2) wynika, że dla minimalnej dozwolonej wartości $e = -2g\alpha$ (patrz (1.3)) zachodzi

$$0 = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \alpha g(1-\cos\lambda).$$

Równość ta mówi, że suma dwóch nieujemnych składników jest zerem, a to może być spełnione tylko wtedy, gdy oba składniki są równe zeru. Oznacza to, że w przypadku minimalnej wartości e, punkt P spoczywa w położeniu $\lambda = 0$. Wnioskujemy stąd, że $\lambda = 0$ jest położeniem równowagi.

Przez amplitudę drgań punktu P (przy ustalonym e z zakresu (1.3)) będziemy rozumieli maksymalną wartość wychylenia się punktu P z położenia równowagi $\lambda = 0$. Z równania (1.15) mamy

$$|\lambda(t)| = \left|2\arcsin\left(\sqrt{\frac{e+2\alpha g}{2\alpha g}}\sin\big(\omega(t-t')\big)\right)\right| = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{e+2\alpha g}{2\alpha g}}\big|\sin\big(\omega(t-t')\big)\big|\right)$$

— ostatnia równość zachodzi dzięki temu, że arcus sinus jest funkcją rosnącą i nieparzystą. A ponieważ jest funkcją rosnącą, więc maksymalną wartość wychylenia $|\lambda|_{\max}$ otrzymamy przy maksymalnej wartości bezwzględnej sinusa tzn. przy $\big|\sin\big(\omega(t-t')\big)\big| = 1$:

$$|\lambda|_{\max} = 2\arcsin\Big(\sqrt{\frac{e+2\alpha g}{2\alpha g}}\Big).$$

Widać stąd, że dla ustalonej cykloidy i siły ciężkości (ustalone wartości stałych α i g) amplituda $|\lambda|_{\max}$ drgań punktu P jest funkcją wielkości e. Natomiast częstotliwość drgań ω dana wzorem (1.9) jest wielkością zależną tylko od stałych α i g. W konsekwencji, zarówno częstotliwość drgań punktu P jak i okres $T = 2\pi/\omega$ tych drgań nie zależą od amplitudy.

Ruch oscylujący (wahadłowy) o tej własności nazywamy ruchem *izochronicznym*. □

Zadanie 2. Obręcz w kształcie okręgu o promieniu R obraca się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół pionowej osi zawierającej jedną ze średnic obręczy. Na obręczy znajduje się koralik K o masie m. Zakładając, że pomiędzy koralikiem a obręczą nie występują siły tarcia, znaleźć położenia równowagi koralika na obręczy.

Rozwiązanie. Niech układ U będzie układem nieinercjalnym trwale związanym z obręczą. Przyjmijmy, że w układzie U układ współrzędnych kartezjańskich (x, y, z) wybrany jest tak, że oś OZ jest pionowa i skierowana ku górze, a obręcz zadana jest równaniami

$$f_1(x, y, z) = x^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad f_2(x, y, z) = y = 0. \tag{2.1}$$

W układzie U koralik K podlega działaniu siły ciężkości $\vec{F}_G$, sił bezwładności: Coriolisa i odśrodkowej oraz siłom reakcji obręczy — siły reakcji są prostopadłe do obręczy i dlatego mogą być wyrażone jako wielkości proporcjonalne do gradientów funkcji (2.1). Wynika stąd, że równania ruchu koralika mogą być zapisane w postaci równania Lagrange'a pierwszego rodzaju:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= m\Big(-2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\Big) + \vec{F}_G + \lambda_1 \vec{\nabla} f_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} f_2, \\ f_1(x, y, z) &= x^2 + z^2 - R^2 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= y = 0, \end{aligned}$$

gdzie λ_1 i λ_2 są mnożnikami Lagrange'a.

Jeśli w położeniu równowagi umieścimy koralik z zerową prędkością początkową (względem układu U), to będzie on pozostawał w tym położeniu dowolnie długo. Zatem w tym położeniu prędkość i przyspieszenie koralika są zerowe w każdej chwili. Uwzględniając ponadto, że

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z, \qquad \vec{\omega} = \omega\vec{e}_z, \qquad \vec{F}_G = -mg\vec{e}_z, \quad g > 0,$$

możemy uprościć równania ruchu do następującej postaci:

$$\begin{aligned} 0 &= m\omega^2 x\vec{e}_x - mg\vec{e}_z + \lambda_1(2x\vec{e}_x + 2z\vec{e}_z) + \lambda_2\vec{e}_y, \\ 0 &= x^2 + z^2 - R^2, \\ 0 &= y. \end{aligned}$$

Po rozpisaniu pierwszego z powyższych równań na składowe otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= (m\omega^2 + 2\lambda_1)x, \\ 0 &= \lambda_2, \\ 0 &= -mg + 2z\lambda_1, \\ 0 &= x^2 + z^2 - R^2, \\ 0 &= y. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pierwsze z powyższych równań jest spełnione, jeśli (i) $x = 0$ lub (ii) $m\omega^2 + 2\lambda_1 = 0$. W przypadku (i) z czwartego z równań (2.2) wynika, że $z = \pm R$. W przypadku (ii)

podstawiając $\lambda_1 = -m\omega^2/2$ do trzeciego z równań (2.2) dostajemy $z = -g/\omega^2$. Wstawiając ten wynik do czwartego z równań (2.2) otrzymujemy

$$x = \pm\sqrt{R^2 - g^2/\omega^4}. \tag{2.3}$$

Podsumowując, położeniami równowagi są punkty

$$(0, 0, \pm R).$$

Jeśli wartość prędkości kątowej jest dostatecznie duża: $\omega^2 \geq g/R$ (warunek nieujemności wyrażenia pod pierwiastkiem w (2.3)), to istnieją dodatkowe położenia równowagi

$$(\pm\sqrt{R^2 - g^2/\omega^4}, 0, -g/\omega^2).$$

$\square$

Andrzej Okołów