Mechanika i STW
Ćwiczenia nr 6
20 kwietnia 2020

Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 1. Wypisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla swobodnego punktu materialnego we współrzędnych parabolicznych (ξ, η, φ) $(\xi > 0,\ \eta > 0)$ określonych wzorami

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \qquad y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \qquad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta). \tag{1.1}$$

Rozwiązanie. Lagranżjan swobodnego punktu materialnego ma postać energii kinetycznej $T = m\vec{v}^2/2$ tego punktu wyrażonej za pomocą odpowiednich współrzędnych. W naszym wypadku będą to oczywiście współrzędne paraboliczne. W pierwszym kroku wyrazimy kartezjańskie składowe prędkości $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ za pomocą współrzędnych parabolicznych i ich pochodnych po czasie. Korzystając z (1.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}}{2\sqrt{\xi\eta}}\cos\varphi - \sqrt{\xi\eta}\dot{\varphi}\sin\varphi, \\
\dot{y} &= \frac{\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}}{2\sqrt{\xi\eta}}\sin\varphi + \sqrt{\xi\eta}\dot{\varphi}\cos\varphi, \\
\dot{z} &= \frac{1}{2}(\dot{\xi} - \dot{\eta}).
\end{aligned}$$

Stąd mamy

$$\begin{aligned}
\vec{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \Big(\frac{\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}}{2\sqrt{\xi\eta}}\cos\varphi - \sqrt{\xi\eta}\dot{\varphi}\sin\varphi\Big)^2 + \\
+ \Big(\frac{\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}}{2\sqrt{\xi\eta}}\sin\varphi + \sqrt{\xi\eta}\dot{\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{1}{4}(\dot{\xi} - \dot{\eta})^2 = \frac{(\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta})^2}{4\xi\eta} + \frac{1}{4}(\dot{\xi} - \dot{\eta})^2 + \xi\eta\dot{\varphi}^2 = \\
= \frac{1}{4}\Big(\frac{\eta}{\xi} + 1\Big)\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{\xi}{\eta} + 1\Big)\dot{\eta}^2 + \xi\eta\dot{\varphi}^2.
\end{aligned}$$

Zatem lagranżjan przyjmuje postać

$$L(\xi, \eta, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\Big[\frac{1}{4}\Big(\frac{\eta}{\xi} + 1\Big)\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{\xi}{\eta} + 1\Big)\dot{\eta}^2 + \xi\eta\dot{\varphi}^2\Big]. \tag{1.2}$$

Można teraz przystąpić do wypisania równań Lagrange'a. Zacznijmy od współrzędnej φ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\xi\eta\dot{\varphi}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\eta\dot{\xi}\dot{\varphi} + m\xi\dot{\eta}\dot{\varphi} + m\xi\eta\ddot{\varphi}, \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0.
\end{aligned}$$

Równanie Lagrange'a zadane przez współrzędną φ:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m\eta\dot{\xi}\dot{\varphi} + m\xi\dot{\eta}\dot{\varphi} + m\xi\eta\ddot{\varphi}$$

lub równoważnie

$$m\ddot{\varphi} = -m\Big(\frac{\dot{\xi}\dot{\varphi}}{\xi} + \frac{\dot{\eta}\dot{\varphi}}{\eta}\Big). \tag{1.3}$$

Dla współrzędnej ξ mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} &= \frac{m}{4}\Big(\frac{\eta}{\xi} + 1\Big)\dot{\xi}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} &= \frac{m}{4}\Big[\frac{\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}}{\xi^2}\dot{\xi} + \Big(\frac{\eta}{\xi} + 1\Big)\ddot{\xi}\Big], \\
\frac{\partial L}{\partial \xi} &= \frac{m}{2}\Big(- \frac{\eta}{4\xi^2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4\eta}\dot{\eta}^2 + \eta\dot{\varphi}^2\Big).
\end{aligned}$$

W konsekwencji równanie Lagrange'a zadane przez współrzędną ξ przyjmuje postać

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{m}{4}\Big[\frac{\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}}{\xi^2}\dot{\xi} + \Big(\frac{\eta}{\xi} + 1\Big)\ddot{\xi}\Big] - \frac{m}{2}\Big(- \frac{\eta}{4\xi^2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4\eta}\dot{\eta}^2 + \eta\dot{\varphi}^2\Big).$$

Równoważnie

$$m\ddot{\xi} = 2m\Big(\frac{\eta}{\xi} + 1\Big)^{-1}\Big[\frac{\eta\dot{\xi}^2}{4\xi^2} - \frac{\dot{\eta}\dot{\xi}}{2\xi} + \frac{1}{4\eta}\dot{\eta}^2 + \eta\dot{\varphi}^2\Big]. \tag{1.4}$$

Aby otrzymać równanie Lagrange'a zadane przez współrzędną η wystarczy zauważyć, że lagranżjan (1.2) jest niezmienniczy względem zamiany $(\xi, \dot{\xi}) \leftrightarrow (\eta, \dot{\eta})$ i dokonać analogicznej "roszady" w równaniu (1.4):

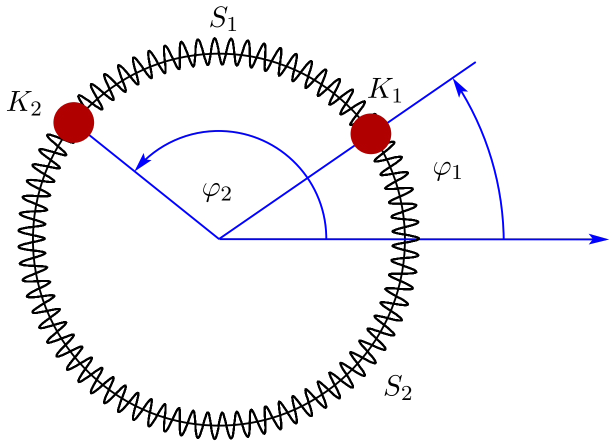
$$m\ddot{\eta} = 2m\Big(\frac{\xi}{\eta} + 1\Big)^{-1}\Big[\frac{\xi\dot{\eta}^2}{4\eta^2} - \frac{\dot{\xi}\dot{\eta}}{2\eta} + \frac{1}{4\xi}\dot{\xi}^2 + \xi\dot{\varphi}^2\Big]. \tag{1.5}$$

Na zakończenie podkreślmy, że równania (1.3), (1.4) i (1.5) opisują ruch cząstki swobodnej. Jednakże równania te nie mają postaci typu

"masa $\times$ druga pochodna współrzędnej po czasie $= 0$",

ponieważ współrzędne paraboliczne są współrzędnymi krzywoliniowymi. W związku z tym prawe strony równań (1.3), (1.4) i (1.5) możemy traktować jako siły pozorne, których źródłem jest krzywoliniowość układu współrzędnych, a zatem geometria tego układu. Warto tu zauważyć, że siły te są proporcjonalne do masy punktu materialnego i są kwadratowymi funkcjami pochodnych $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ i $\dot{\varphi}$. □

Zadanie 2. Dwa koraliki K_1 i K_2 o masach odpowiednio m_1 i m_2 nawleczone są na drucianą obręcz w kształcie okręgu o promieniu R. Koraliki połączone są w sposób pokazany na rysunku 1 nieważkimi sprężynami S_1 i S_2 o stałych sprężystości odpowiednio k_1 i k_2 i takiej samej długości swobodnej πR. Znaleźć ruch koralików przy założeniach, że nie dochodzi do zderzeń pomiędzy nimi i że nie ma tarcia pomiędzy koralikami a obręczą. Podać warunek braku zderzeń.



Rysunek 1: Układ koralików i sprężyn na okręgu

Rozwiązanie. Oznaczmy położenia koralików na okręgu za pomocą kątów φ_1 i φ_2 tak, jak to jest zaznaczone na rysunku 1, przy czym

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_1 + 2\pi. \tag{2.1}$$

W tej sytuacji długość sprężyny S_1 (długość sprężyn mierzymy tu jak długość łuków okręgu) wynosi $R(\varphi_2 - \varphi_1)$, a długość sprężyny S_2 to $R(2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))$ jako, że suma długości obu sprężyn to długość okręgu. Biorąc pod uwagę, że długość swobodna każdej sprężyny wynosi πR otrzymujemy następujące wzory na energię potencjalną obu sprężyn:

$$\begin{aligned} V_1(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{k_1}{2} R^2 (\varphi_2 - \varphi_1 - \pi)^2, \\ V_2(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{k_2}{2} R^2 (2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1) - \pi)^2 = \frac{k_2}{2} R^2 (\varphi_2 - \varphi_1 - \pi)^2. \end{aligned}$$

Możemy wobec powyższego wypisać lagranżjan dla rozważanego tu układu

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \dot\varphi_1, \dot\varphi_2) = \frac{m_1}{2} R^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2} R^2 \dot\varphi_2^2 - \frac{k_1 + k_2}{2} R^2 (\varphi_2 - \varphi_1 - \pi)^2$$

oraz wynikające z niego równania ruchu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = m_1 R^2 \ddot\varphi_1 - (k_1 + k_2) R^2 (\varphi_2 - \varphi_1 - \pi), \\ 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 R^2 \ddot\varphi_2 + (k_1 + k_2) R^2 (\varphi_2 - \varphi_1 - \pi). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Powyższy układ równań łatwo jest rozwiązać wprowadzając nowe zmienne

$$\alpha := \varphi_2 - \varphi_1 - \pi, \qquad \beta := m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2. \tag{2.3}$$

Transformacja odwrotna ma postać

$$\varphi_1 = \frac{\beta - m_2 \alpha}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\pi, \qquad \varphi_2 = \frac{\beta + m_1 \alpha}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\pi. \tag{2.4}$$

Z drugiego z równań (2.3) wynika, że

$$\ddot{\beta} = m_1\ddot{\varphi}_1 + m_2\ddot{\varphi}_2.$$

Korzystając z tego wyniku, po dodaniu stronami równań (2.2) otrzymujemy

$$\ddot{\beta} = 0, \tag{2.5}$$

skąd wynika, że

$$\beta(t) = \dot{\beta}_0 t + \beta_0,$$

gdzie $\dot{\beta}_0$ i β_0 są stałymi całkowania.

Z drugiej strony z (2.4) i (2.5) mamy

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\ddot{\alpha}, \qquad \ddot{\varphi}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\ddot{\alpha}.$$

Wstawiając powyższe wyniki do równań (2.2) otrzymujemy jedno równanie postaci

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ddot{\alpha} + (k_1+k_2)\alpha = 0,$$

Jego rozwiązaniem jest

$$\alpha(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t), \tag{2.6}$$

gdzie A i B to stałe dowolne, a

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}(k_1+k_2)}.$$

Ostatecznie

$$\varphi_1(t) = \frac{\dot{\beta}_0 t + \beta_0 - m_2(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))}{m_1+m_2} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\pi,$$
$$\varphi_2(t) = \frac{\dot{\beta}_0 t + \beta_0 + m_1(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))}{m_1+m_2} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\pi.$$

Koraliki nie będą się zderzać, jeśli spełniony będzie warunek (2.1). Warunek ten można zapisać w równoważnej postaci

$$-\pi < \varphi_2 - \varphi_1 - \pi < \pi.$$

Tym samym

$$-\pi < \alpha < \pi.$$

Z drugiej strony, maksymalna i minimalna wartość funkcji (2.6) to wartości odpowiednio $\pm\sqrt{A^2+B^2}$. Zatem warunek braku zderzeń koralików to

$$\sqrt{A^2+B^2} < \pi.$$

□

Zadanie 3. Punkt materialny P o masie m porusza się w polu siły elastycznej $\vec{F} = -kz\vec{e}_z$ ($k > 0$ jest stałą) po powierzchni Σ danej warunkiem $f(x,y,z) = (z/l) - \cosh(x/l) = 0$, gdzie $l > 0$ jest stałą o wymiarze długości. Znaleźć ruch punktu P.

Rozwiązanie. Powierzchnię Σ można sparametryzować w następujący sposób

$$\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto \begin{pmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \\ z(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\alpha \\ l\beta \\ l\cosh(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{3.1}$$

i potraktować parametry (α, β) jako (bezwymiarowe) współrzędne na Σ.

W celu znalezienia lagranżjanu punktu materialnego P wyrazimy jego energię kinetyczną T we współrzędnych (α, β) — z (3.1) mamy

$$\dot{x} = l\dot{\alpha}, \qquad \dot{y} = l\dot{\beta}, \qquad \dot{z} = l\sinh\alpha\,\dot{\alpha},$$

zatem

$$T = \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{ml^2}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \sinh^2\alpha\,\dot{\alpha}^2) = \frac{ml^2}{2}(\cosh^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) = T(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \tag{3.2}$$

gdzie w trzecim kroku skorzystaliśmy z "jedynki hiperbolicznej".

Z drugiej strony jako potencjał siły $\vec{F} = -kz\vec{e}_z$ można wybrać funkcję

$$V(x, y, z) = \frac{k}{2}z^2 = \frac{kl^2}{2}\cosh^2\alpha = V(\alpha, \beta) \tag{3.3}$$

— w drugim kroku użyliśmy (3.1).

Lagranżjan punktu materialnego P przedstawia się więc następująco:

$$L(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \frac{ml^2}{2}(\cosh^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - \frac{kl^2}{2}\cosh^2\alpha,$$

a wynikające zeń równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = l^2(m\cosh\alpha\,\sinh\alpha\,\dot{\alpha}^2 + m\cosh^2\alpha\,\ddot{\alpha} + k\cosh\alpha\,\sinh\alpha), \\ 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} = ml^2\ddot{\beta}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Drugie z powyższych równań ma proste rozwiązanie

$$\beta(t) = \dot{\beta}_0 t + \beta_0,$$

gdzie $\dot{\beta}_0$ i β_0 są stałymi całkowania.

Pierwsze z równań (3.4) podzielimy stronami przez $l^2\cosh\alpha$, a następnie dokonamy zamiany zmiennych podstawiając

$$u = \sinh\alpha,$$

skąd wynika, że

$$\ddot{u} = \sinh\alpha\,\dot{\alpha}^2 + \cosh\alpha\,\ddot{\alpha}.$$

Po tych operacjach rozważane równanie upraszcza się do równania

$$m\ddot{u} + ku = 0.$$

Jego ogólnym rozwiązaniem jest funkcja

$$u(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

gdzie A i B są dowolnymi stałymi, a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ostatecznie ruch punktu materialnego P opisany jest funkcjami

$$\alpha(t) = \operatorname{ar\,sinh} u(t) = \operatorname{ar\,sinh}\big(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\big), \qquad \beta(t) = \dot{\beta}_0 t + \beta_0.$$

$\square$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie S1. Wypisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju dla swobodnego punktu materialnego we współrzędnych sferycznych.

Szkic rozwiązania. Kwadrat prędkości swobodnego punktu materialnego wyrażony za pomocą współrzędnych sferycznych ma postać

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta.$$

Lagranżjan jest tu energią kinetyczną punktu wyrażoną we współrzędnych sferycznych:

$$L(r,\theta,\varphi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta).$$

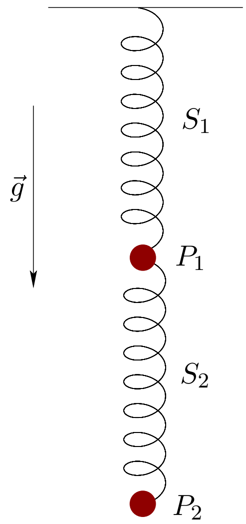
Wynikają zeń następujące równania:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta), \\ m\ddot{\theta} &= m\Big(-2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \dot{\varphi}^2\sin\theta\,\cos\theta\Big), \\ m\ddot{\varphi} &= m\Big(-2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + \dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{ctg}\theta\Big). \end{aligned}$$

$\square$

Zadanie S2. Punkt materialny P_1 o masie m_1 zawieszony jest na nieważkiej sprężynie S_1 o stałej sprężystości k_1 i długości swobodnej l_1 — patrz rysunek 2. Do punktu P_1 doczepiona jest nieważka sprężyna S_2 o stałej sprężystości k_2 i długości swobodnej l_2, na końcu której znajduje się punkt materialny P_2 o masie m_2. Znaleźć ruch punktów P_1 i P_2, zakładając, że (i) oba punkty materialne mają swobodę ruchu jedynie wzdłuż prostej pionowej przechodzącej przez punkt zawieszenia sprężyny S_1 oraz że (ii) podczas ruchu obie sprężyny podlegają jedynie rozciąganiu i ściskaniu wzdłuż wspomnianej prostej. Kierunek pionu zadany jest przez jednorodną stałą w czasie siłę grawitacji.

Szkic rozwiązania. Przyjmijmy, że punkty materialne P_1 i P_2 poruszają się wzdłuż pionowej i skierowanej ku dołowi osi OZ, której początek pokrywa się z punktem zawieszenia sprężyny S_1. Niech $0 \leq z_1 \leq z_2$ będą współrzędnymi punktów, odpowiednio, P_1 i P_2.



Rysunek 2: Układ punktów materialnych i sprężyn w polu grawitacyjnym

Energia kinetyczna układu punktów P_1 i P_2 wyraża się wzorem

$$T(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2,$$

zaś energia potencjalna jest sumą energii potencjalnej obu punktów w polu siły grawitacji oraz energii potencjalnych obu sprężyn:

$$V(z_1, z_2) = -g(m_1 z_1 + m_2 z_2) + \frac{k_1}{2}(z_1 - l_1)^2 + \frac{k_2}{2}(z_2 - z_1 - l_2)^2,$$

gdzie $g > 0$ jest wartością przyspieszenia ziemskiego. Zatem lagranżjan układu ma postać

$$L(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 + g(m_1 z_1 + m_2 z_2) - \frac{k_1}{2}(z_1 - l_1)^2 - \frac{k_2}{2}(z_2 - z_1 - l_2)^2.$$

i generuje następujące równania ruchu:

$$\begin{aligned} 0 &= m_1\ddot{z}_1 - m_1 g + k_1(z_1 - l_1) - k_2(z_2 - z_1 - l_2), \\ 0 &= m_2\ddot{z}_2 - m_2 g + k_2(z_2 - z_1 - l_2), \end{aligned}$$

które można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g + \dfrac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{m_1} \\ g + \dfrac{k_2 l_2}{m_2} \end{pmatrix} \equiv A\vec{z} + \vec{b}. \tag{S2.1}$$

Widać stąd, że równania ruchu tworzą układ liniowych równań niejednorodnych.

W pierwszym kroku rozwiążemy układ równań liniowych (jednorodnych) otrzymany przez położenie $\vec{b} = 0$ w (S2.1):

$$\ddot{\vec{z}} = A\vec{z}. \tag{S2.2}$$

Podobnie jak w rozwiązaniu zadania 2 dokonamy zamiany zmiennych z_1, z_2 na takie zmienne, w których układ (S2.2) rozpada się na dwa niezależne równania różniczkowe. Trudno jednak będzie znaleźć tu odpowiednie zmienne w prosty sposób (tak jak w rozwiązaniu zadania 2) i dlatego też w tym celu będziemy musieli znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy A.

Zapisując macierz A w prostszy sposób:

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -c \end{pmatrix},$$

gdzie $a, b, c > 0$, otrzymujemy równanie na wartości własne λ tej macierzy

$$0 = \det \begin{pmatrix} -a-\lambda & b \\ c & -c-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + (a+c)\lambda + (a-b)c.$$

Wyróżnik tego równania

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(a-b)c = (a-c)^2 + 4bc$$

jest dodatni (bo b, c są dodatnie) i mniejszy od $(a+c)^2$ (bo różnica $a - b = k_1/m_1$ i c są dodatnie). W konsekwencji otrzymujemy dwie różne i *ujemne* wartości własne macierzy A:

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \frac{\pm\sqrt{(a+c)^2 - 4(a-b)c} - (a+c)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}} - \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)\right) \equiv \\ &\equiv -\omega_\pm^2. \end{aligned} \tag{S2.3}$$

Zatem wektor własny $\vec{s}_\pm = (s_{\pm 1}, s_{\pm 2})$ macierzy A o wartości własnej $\lambda_\pm$ spełnia równanie

$$\begin{pmatrix} -a-\lambda_\pm & b \\ c & -c-\lambda_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{\pm 1} \\ s_{\pm 2} \end{pmatrix} = 0.$$

Ale macierz powyżej jest osobliwa, wobec czego dla znalezienia wektora $\vec{s}_\pm$ wystarczy rozwiązać równanie

$$c s_{\pm 1} - (c + \lambda_\pm) s_{\pm 2} = 0,$$

skąd mamy

$$\vec{s}_\pm = \begin{pmatrix} s_{\pm 1} \\ s_{\pm 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + \lambda_\pm \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_2/m_2) - \omega_\pm^2 \\ k_2/m_2 \end{pmatrix}.$$

Jeśli więc do układu równań (S2.2) podstawimy wektor $\vec{z}$ przedstawiony w postaci

$$\vec{z} = \vec{s}_+ u_+ + \vec{s}_- u_-,$$

gdzie (u_+, u_-) są nowymi zmiennymi, to układ ten przyjmie prostą postać

$$\begin{aligned} \ddot{u}_+ &= -\omega_+^2 u_+, \\ \ddot{u}_- &= -\omega_-^2 u_-, \end{aligned}$$

wobec czego łatwo jest wypisać ogólne rozwiązanie tego układu i wyrazić je za pomocą wyjściowych zmiennych (z_1, z_2).

Znajdziemy teraz szczególne rozwiązanie układu niejednorodnego (S2.1). Rozważany przez nas układ fizyczny powinien mieć położenie równowagi i w związku z tym powinno istnieć rozwiązanie układu (S2.1) postaci $z_1 = \text{const.}$ i $z_2 = \text{const.}$. Podstawiając tak zapostulowane rozwiązanie do (S2.1) otrzymujemy

$$0 = A\vec{z} + \vec{b},$$

skąd mamy rozwiązanie postaci

$$\vec{z} = -A^{-1}\vec{b}.$$

Ogólne rozwiązanie równań ruchu (S2.1) można przedstawić w postaci sumy ogólnego rozwiązania układu jednorodnego (S2.2) i znalezionego przed chwilą szczególnego rozwiązania układu niejednorodnego (S2.1). Wyrażając te dwa ostatnie rozwiązania w postaci jawnej otrzymujemy ogólne rozwiązanie równań ruchu:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \Big(\frac{k_2}{m_2} - \omega_+^2\Big)(A\sin(\omega_+ t) + B\cos(\omega_+ t)) + \\ &+ \Big(\frac{k_2}{m_2} - \omega_-^2\Big)(C\sin(\omega_- t) + D\cos(\omega_- t)) + g\frac{m_1+m_2}{k_1} + l_1, \\ z_2(t) &= \frac{k_2}{m_2}(A\sin(\omega_+ t) + B\cos(\omega_+ t) + C\sin(\omega_- t) + D\cos(\omega_- t)) + \\ &+ g\Big(\frac{m_1+m_2}{k_1} + \frac{m_2}{k_2}\Big) + l_1 + l_2, \end{aligned}$$

gdzie $\omega_\pm > 0$ dane są wzorem (S2.3), a A, B, C i D są dowolnymi stałymi.

Ruch układu jest więc superpozycją drgań z częstotliwościami $\omega_\pm$ wokół położenia równowagi.

□

Zadanie S3. Punkt materialny P o masie m porusza się w polu siły elastycznej $\vec{F} = -kz\vec{e}_z$ ($k > 0$ jest stałą) po krzywej Γ danej warunkami $f_1(x,y,z) = (z/l) - \cosh(x/l) = 0$, gdzie $l > 0$ jest stałą o wymiarze długości, i $f_2(x,y,z) = y = 0$. Znaleźć ruch punktu posługując się całką energii.

Wskazówka. Rozwiązując zadanie można wzorować się na rozwiązaniu zadania 3 z niniejszych ćwiczeń oraz na rozwiązaniu zadania 1 z ćwiczeń wykładowych nr 5 (wahadło cykloidalne).

Szkic rozwiązania. Na punkt materialny P działają: siła elastyczna będąca siłą potencjalną i siły reakcji niezależnych od czasu więzów. Wynika stąd, że całkowita energia E punktu jest wielkością zachowaną.

W stosunku do zadania 3 punkt P podlega tu dodatkowemu warunkowi więzów $y = 0$, co pozwala nam łatwo skorzystać z wyników tego zadania. I tak: jako (bezwymiarowej) współrzędnej na krzywej Γ użyjemy parametru α:

$$\mathbb{R} \ni \alpha \mapsto \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \\ z(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\alpha \\ 0 \\ l\cosh\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(patrz (3.1)), a całkowita energia punktu P wyraża się wzorem

$$E = \frac{ml^2}{2}\cosh^2\!\alpha\,\dot{\alpha}^2 + \frac{kl^2}{2}\cosh^2\!\alpha \tag{S3.1}$$

(patrz (3.2) i (3.3)). Widać stąd, że minimalna wartość energii to $E = kl^2/2$ — przy tej wartości punkt P spoczywa w położeniu $\alpha = 0$. W konsekwencji z ruchem punktu P mamy do czynienia, gdy

$$E > \frac{kl^2}{2}.$$

Z równania (S3.1) mamy

$$\pm 1 = \frac{\sqrt{m} l \cosh \alpha}{\sqrt{2E - kl^2 \cosh^2 \alpha}} \dot{\alpha}.$$

Odcałkowując obie strony tego równania po czasie otrzymujemy

$$\pm (t - t_0) = \int \frac{\sqrt{m} l \cosh \alpha}{\sqrt{2E - kl^2 \cosh^2 \alpha}} d\alpha = \left\{ \begin{aligned} u &= \sqrt{\tfrac{kl^2}{2E - kl^2}} \sinh \alpha \\ du &= \sqrt{\tfrac{kl^2}{2E - kl^2}} \cosh \alpha \, d\alpha \end{aligned} \right\} = \\ = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin u.$$

Definiując

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

i stosując rozumowanie przedstawione w rozwiązaniu zadania 1 z ćwiczeń wykładowych nr 5 otrzymujemy zależność

$$u(t) = \sin \big(\omega (t - t_0) \big)$$

obowiązującą dla każdego $t \in \mathbb{R}$, skąd mamy

$$\alpha(t) = \operatorname{ar\,sinh} \left(\sqrt{\frac{2E - kl^2}{kl^2}} \sin \big(\omega (t - t_0) \big) \right).$$

$\square$

Andrzej Okołów