Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 6
23 kwietnia 2020

Zadanie 1. Jak zmienia się lagranżjan $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ i równania Lagrange'a drugiego rodzaju zapisane we współrzędnych (q_i) $(i = 1, 2, \dots, N)$ przy przejściu do współrzędnych (Q_j) $(j = 1, 2, \dots, N)$ powiązanych z wyjściowymi w następujący sposób

$$q_i = F_i(Q_1, \dots, Q_N, t) \equiv F_i(Q_j, t)? \tag{1.1}$$

Rozwiązanie. Z równań (1.1) mamy

$$\dot{q}_i = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial F_i}{\partial t}. \tag{1.2}$$

Niech

$$\tilde{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t) := L\Big(F_i(Q_j, t), \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial F_i}{\partial t}, t\Big).$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial F_i}{\partial Q_j},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} &= \sum_i \Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)\frac{\partial F_i}{\partial Q_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial Q_k},\\
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial F_i}{\partial Q_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big(\sum_j \frac{\partial^2 F_i}{\partial Q_j \partial Q_k}\dot{Q}_j + \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial Q_k}\Big).
\end{aligned}$$

Od przedostatniego równania odejmijmy teraz stronami równanie ostatnie:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial Q_k}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\Big) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial Q_k} - \sum_j \frac{\partial^2 F_i}{\partial Q_j \partial Q_k}\dot{Q}_j - \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial Q_k}\Big). \tag{1.3}$$

Ale pochodna

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F_i}{\partial Q_k} = \sum_j \frac{\partial^2 F_i}{\partial Q_j \partial Q_k}\dot{Q}_j + \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial Q_k},$$

co pozwala nam uprościć równanie (1.3):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial Q_k}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\Big). \tag{1.4}$$

Ponieważ dla każdego t, (1.1) jest transformacją współrzędnych, więc macierz pochodnych $(\partial F_i/\partial Q_k)$ jest nieosobliwa. To zaś oznacza, że

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Płynie stąd następujący wniosek: transformacja współrzędnych (1.1) nie zmienia równań Lagrange'a pod warunkiem, że lagranżjan $\tilde{L}$ zależny od nowych współrzędnych został otrzymany z lagranżjanu od starych współrzędnych przez zamianę zmiennych (1.1) i (1.2). □

Zadanie 2. Kartezjański układ współrzędnych (x'_i), $(i = 1, 2, 3)$ obraca się względem kartezjańskiego układu współrzędnych (x_j), $(j = 1, 2, 3)$ ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ w taki sposób, że w pewnej chwili czasu oś $O'X'$ pokrywa się z osią OX, oś $O'Y'$ z osią OY, a oś $O'Z'$ z osią OZ. Przyjmując, że układ (x_j) jest układem współrzędnych pewnego układu inercjalnego U, wyrazić we współrzędnych (x'_i) lagranżjan punktu materialnego P, swobodnego w układzie U.

Rozwiązanie. Niech (ω_i) będą składowymi prędkości kątowej $\vec{\omega}$ (w obu układach (x'_i) i (x_j) składowe $\vec{\omega}$ są takie same). Rozważmy macierz Ω wymiaru 3×3, której składowe mają postać

$$\Omega_{ik} = \sum_j \epsilon_{ijk}\omega_j,$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem całkowicie antysymetrycznym używanym do zapisania iloczynu wektorowego.

Związek pomiędzy współrzędnymi (x_j), a (x'_k) jest postaci

$$x_i = \sum_k [\exp(\Omega t)]_{ik} x'_k, \tag{2.1}$$

gdzie macierz $\exp(\Omega t)$ jest macierzą 3×3 zdefiniowaną jak następuje:

$$\exp(\Omega t) := \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Omega t)^n}{n!}$$

($\mathbf{1}$ jest tu macierzą jednostkową 3×3). Z geometrycznego punktu widzenia, macierz $\exp(\Omega t)$ jest macierzą obrotu wokół przechodzącej przez początek układu współrzędnych osi o zwrocie i kierunku zadanym przez $\vec{\omega}$ o kąt $|\vec{\omega}|t$.

Widać stąd, że transformacja współrzędnych jest transformacją typu (1.1). Do znalezienia szukanego lagranżjanu możemy zatem zastosować wyniki zadania 1 — skoro lagranżjan swobodnego punktu materialnego o masie m ma we współrzędnych (x_i) postać

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2}\sum_{ij}\delta_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, \tag{2.2}$$

więc dla rozwiązania zadania wystarczy jedynie wyrazić występujące powyżej pochodne $(\dot{x}_i)$ za pomocą współrzędnych (x'_j) i ich pochodnych $(\dot{x}'_j)$.

Z równania (2.1) mamy

$$\dot{x}_i = \sum_k \left(\frac{d}{dt}[\exp(\Omega t)]_{ik}\right)x'_k + \sum_k [\exp(\Omega t)]_{ik}\dot{x}'_k. \tag{2.3}$$

Z drugiej strony, w zapisie macierzowym

$$\frac{d}{dt}\exp(\Omega t) = \exp(\Omega t)\Omega,$$

skąd wynika, że

$$\frac{d}{dt}[\exp(\Omega t)]_{ik} = \sum_{l}[\exp(\Omega t)]_{il}\Omega_{lk} = \sum_{lj}[\exp(\Omega t)]_{il}\epsilon_{ljk}\omega_j.$$

Wstawiając ten rezultat do (2.3) uzyskujemy

$$\begin{aligned}\dot{x}_i = \sum_{ljk}[\exp(\Omega t)]_{il}\epsilon_{ljk}\omega_j x'_k + \sum_{l}[\exp(\Omega t)]_{il}\dot{x}'_l = \sum_{l}[\exp(\Omega t)]_{il}\big(\sum_{jk}\epsilon_{ljk}\omega_j x'_k + \dot{x}'_l\big) = \\ = \sum_{l}[\exp(\Omega t)]_{il}\big((\vec{\omega}\times\vec{x}')_l + \dot{x}'_l\big) = \sum_{l}[\exp(\Omega t)]_{il}(\vec{\omega}\times\vec{x}' + \dot{\vec{x}}')_l.\end{aligned}$$

Podstawienie powyższego wyniku do (2.2) daje

$$\begin{aligned}\tilde{L}(x'_j, \dot{x}'_j) = \frac{m}{2}\sum_{ijkl}\delta_{ij}[\exp(\Omega t)]_{il}(\vec{\omega}\times\vec{x}' + \dot{\vec{x}}')_l[\exp(\Omega t)]_{jk}(\vec{\omega}\times\vec{x}' + \dot{\vec{x}}')_k = \\ = \frac{m}{2}\sum_{ijkl}\delta_{ij}[\exp(\Omega t)]_{il}[\exp(\Omega t)]_{jk}(\vec{\omega}\times\vec{x}' + \dot{\vec{x}}')_l(\vec{\omega}\times\vec{x}' + \dot{\vec{x}}')_k.\end{aligned}$$

Każda macierz A obrotu spełnia warunek

$$\sum_{ij}\delta_{ij}A_{il}A_{jk} = \delta_{kl},$$

zatem

$$\begin{aligned}\tilde{L}(x'_j, \dot{x}'_j) = \frac{m}{2}\sum_{kl}\delta_{kl}(\vec{\omega}\times\vec{x}' + \dot{\vec{x}}')_l(\vec{\omega}\times\vec{x}' + \dot{\vec{x}}')_k = \frac{m}{2}(\vec{\omega}\times\vec{x}' + \dot{\vec{x}}')^2 = \\ = \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}}')^2 + m(\vec{\omega}\times\vec{x}')\dot{\vec{x}}' + \frac{m}{2}(\vec{\omega}\times\vec{x}')^2. \quad (2.4)\end{aligned}$$

Wiadomo, że w nieinercjalnym układzie odniesienia opisanym współrzędnymi (x'_j) na swobodny punkt materialny będą działać dwie siły pozorne: siła Coriolisa i siła odśrodkowa. W lagranżjanie (2.4) składnik $m(\vec{\omega}\times\vec{x}')\dot{\vec{x}}'$ jest uogólnionym potencjałem siły Coriolisa, a składnik $\frac{m}{2}(\vec{\omega}\times\vec{x}')^2$ potencjałem siły odśrodkowej. □

Zadanie 3. Na punkt materialny P o masie m działa jednorodna i stała w czasie siła ciężkości $\vec{F} = m\vec{g}$, a jego ruch jest ograniczony do krzywej Γ zawartej w pionowej płaszczyźnie. Na krzywej Γ istnieje współrzędna u taka, że równanie ruchu punktu P zapisane przy użyciu tej współrzędnej ma postać równania oscylatora harmonicznego

$$a\ddot{u} + bu = 0, \quad (3.1)$$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi. Znaleźć krzywą Γ (tzn. podać jej opis parametryczny).

Rozwiązanie. Wprowadźmy układ współrzędnych kartezjańskich tak, że jego oś OZ jest pionowa i zwrócona ku górze, a krzywa Γ zawiera się w płaszczyźnie XOZ. W tej sytuacji $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, ($g > 0$ jest stałą), a krzywa Γ może być sparametryzowana za pomocą współrzędnej u, o której mowa w treści zadania, w następujący sposób:

$$[u_1, u_2] \ni u \mapsto \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ h(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \tag{3.2}$$

gdzie f i h są nieznanymi funkcjami. Rozwiązanie zadania będzie równoznaczne ze znalezieniem jawnej postaci tych funkcji.

W celu znalezienia funkcji f i h wyrazimy za ich pomocą lagranżjan i równanie ruchu punktu materialnego P. Mamy

$$\dot{x} = \frac{df}{du}\frac{du}{dt} = f'\dot{u}, \qquad \dot{y} = 0, \qquad \dot{z} = \frac{dh}{du}\frac{du}{dt} = h'\dot{u},$$

gdzie prim oznacza pochodną po u. Zatem energia kinetyczna

$$T(u, \dot{u}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(f'^2(u) + h'^2(u))\dot{u}^2.$$

Z drugiej strony energia potencjalna punktu P w polu siły ciężkości to

$$V(u) = mgz = mgh(u).$$

Lagranżjan przyjmuje więc postać

$$L(u, \dot{u}) = \frac{m}{2}(f'^2 + h'^2)\dot{u}^2 - mgh.$$

Wypiszmy teraz równanie ruchu wynikające z tego lagranżjanu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} &= m(f'^2 + h'^2)\dot{u}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} &= m(f'^2 + h'^2)'\dot{u}^2 + m(f'^2 + h'^2)\ddot{u}, \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= \frac{m}{2}(f'^2 + h'^2)'\dot{u}^2 - mgh'. \end{aligned}$$

Mamy stąd

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = m(f'^2 + h'^2)\ddot{u} + \frac{m}{2}(f'^2 + h'^2)'\dot{u}^2 + mgh'. \tag{3.3}$$

Zgodnie z treścią zadania powyższe równanie ruchu powinno mieć postać (3.1). W szczególności w powyższym równaniu nie powinno być członu z pochodną $\dot{u}$. Jedynym sposobem na wyeliminowanie tego członu jest nałożenie warunku

$$(f'^2 + h'^2)' = 0, \tag{3.4}$$

co oznacza, że funkcja $f'^2 + h'^2$ jest stała. Stała ta jest nieujemna, bo jest sumą kwadratów i, co więcej, nie może być równa zeru, gdyż oznaczałoby to zerowanie się obu pochodnych f' i h', a to z kolei znaczyłoby, że u nie jest współrzędną na krzywej Γ. Zatem

$$f'^2 + h'^2 = C^2 \tag{3.5}$$

dla pewnej dodatniej stałej C.

Widać więc, że po nałożeniu warunku równanie (3.3) upraszcza się do postaci

$$mC^2\ddot{u} + mgh' = 0.$$

Aby ta postać była zgodna z (3.1) pozostaje jedynie zapewnić, że

$$mgh' = mg\frac{dh}{du} = bu,$$

gdzie b jest dowolną stałą dodatnią. Zatem

$$h(u) = \frac{b}{2mg}u^2 + D = \frac{B}{2}u^2 + D \tag{3.6}$$

— D jest tu stała całkowania, a $B \equiv b/mg$ dowolną stałą dodatnią.

Korzystając z właśnie otrzymanego wyniku i równania (3.5) znajdziemy teraz jawną postać funkcji f:

$$f' = \frac{df}{du} = \pm\sqrt{C^2 - B^2u^2} \tag{3.7}$$

Całkując obie strony po u otrzymujemy

$$f(u) = \pm\frac{1}{2B}\left(Bu\sqrt{C^2 - B^2u^2} + C^2 \arcsin\frac{Bu}{C}\right) + E, \tag{3.8}$$

gdzie E jest stałą całkowania.

Podsumowując, krzywa Γ jest opisana w sposób parametryczny wyrażeniem (3.2), w którym funkcje f i h mają postać (3.8) i (3.6), gdzie B, C to dodatnie stałe dowolne, a D i E to stałe dowolne. Dodajmy jeszcze, że z równania (3.7) wynika, że maksymalny zakres współrzędnej u to $[-C/B, C/B]$.

Na tym można by skończyć rozwiązanie zadania, wypadałoby jednak zidentyfikować krzywą Γ. Biorąc pod uwagę maksymalny zakres współrzędnej u wprowadźmy zmienną λ w następujący sposób:

$$u = \frac{C}{B}\sin(\lambda/2), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{3.9}$$

Podstawiając powyższy wzór do (3.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \pm\frac{1}{2B}\left(C\sin(\lambda/2)\sqrt{C^2 - C^2\sin^2(\lambda/2)} + C^2\arcsin(\sin(\lambda/2))\right) + E = \\ &= \pm\frac{C^2}{2B}(\sin(\lambda/2)|\cos(\lambda/2)| + \lambda/2) + E = \pm\frac{C^2}{4B}(\sin\lambda + \lambda) + E \end{aligned} \tag{3.10}$$

— w powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy (i) fakt, że funkcją odwrotną do funkcji sinus ograniczonej do przedziału $[-\pi/2, \pi/2]$ jest arcus sinus oraz (ii) dodatniość funkcji $\cos(\lambda/2)$ dla obowiązującego zakresu zmienności parametru λ.

Podstawiając (3.9) do (3.6) uzyskujemy

$$h(\lambda) = \frac{C^2}{2B}\sin^2(\lambda/2) + D = \frac{C^2}{4B}(1 - \cos\lambda) + D = -\frac{C^2}{4B}\cos\lambda + \frac{C^2}{4B} + D, \tag{3.11}$$

gdzie w drugim kroku wykorzystaliśmy tożsamość

$$\sin^2(\lambda/2) = \frac{1 - \cos\lambda}{2}.$$

Ponieważ D jest stałą dowolną, więc możemy ją zapisać w postaci $D = D' - C^2/(2B)$. Przy takim zapisie wyrażenie (3.11) wygląda następująco:

$$h(\lambda) = -\frac{C^2}{4B}(1 + \cos\lambda) + D', \tag{3.12}$$

gdzie D' jest stałą dowolną.

Ostatecznie na podstawie wzorów (3.9), (3.10) i (3.12) otrzymujemy następujący parametryczny opis krzywej Γ

$$[-\pi, \pi] \ni \lambda \mapsto \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\alpha(\lambda + \sin\lambda) + E \\ 0 \\ -\alpha(1 + \cos\lambda) + D' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\alpha \equiv C^2/(4B)$ jest dowolną stałą dodatnią, a D' i E są stałymi dowolnymi.

Widać stąd, że krzywa Γ to cykloida, o osi symetrii równoległej do osi OZ, zwrócona "garbem" ku dołowi (porównaj z zadaniem nr 1 z ćwiczeń wykładowych nr 5).

Można zatem powiedzieć, że cykloida jest jedyną krzywą, na której jednorodna, stała w czasie siła ciężkości oraz siła reakcji generują równanie ruchu oscylatora harmonicznego.

$\square$

Andrzej Okołów