# Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

Zadania na ćwiczenia – seria 7. (z rozwiązaniami)
27 kwietnia 2020 r.

### Wprowadzenie

Zanim przejdziemy do przykładów, zgromadzimy najważniejsze wzory i podstawowe wiadomości, które będą nam potrzebne. Przedstawione tu informacje mogą na początku wydawać się niejasne, rozwiązania przykładowych zadań powinny jednak uczynić je bardziej przystępnymi. Dokładniejsze omówienie tych zagadnień znaleźć można w notatkach z wykładu.

Zakładamy, że mamy do czynienia z bryłami sztywnymi o ciągłym rozkładzie masy. Symbolem $\int_B$ oznaczać będziemy całkowanie po całym obszarze bryły $B$. W przypadku brył o dyskretnym rozkładzie masy (np. układ mas punktowych sztywno połączonych nieważkimi prętami) należałoby użyć innych wzorów, w których całki zostałyby zastąpione przez sumy; nie będziemy się tu jednak zajmować takimi bryłami.

***Środek masy*** bryły sztywnej $B$ to – jak wiemy z wykładu – pewien wyróżniony punkt, odgrywający kluczową rolę w opisie ruchu bryły. Jest on zdefiniowany jako punkt, którego wektor wodzący $\mathbf{r}_{\mathrm{SM}}$ (względem dowolnego, arbitralnie wybranego układu współrzędnych) dany jest wzorem

$$\mathbf{r}_{\mathrm{SM}} = \frac{1}{m}\int_B \mathbf{r}\,\mathrm{d}m. \tag{W1}$$

$m$ jest tu całkowitą masą bryły, $\mathrm{d}m$ – elementem masy bryły, zaś $\mathbf{r}$ – wektorem wodzącym wskazującym położenie danego elementu masy. Element masy $\mathrm{d}m$ obliczamy na różne sposoby w zależności od tego, z bryłą jakiego wymiaru mamy do czynienia. Dla przykładu, w przypadku trójwymiarowym można go przedstawić w postaci $\mathrm{d}m = \varrho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V$, gdzie $\varrho(\mathbf{r})$ jest funkcją opisującą gęstość bryły $B$, zaś $\mathrm{d}V$ – elementem objętości bryły; całka po prawej stronie (W1) jest wówczas całką potrójną. We współrzędnych kartezjańskich $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho(x,\,y,\,z)$ oraz $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Równanie wektorowe (W1) we współrzędnych kartezjańskich równoważne jest układowi trzech równań skalarnych

$$\begin{cases} x_{\mathrm{SM}} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_B x\,\mathrm{d}m, \\ y_{\mathrm{SM}} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_B y\,\mathrm{d}m, \\ z_{\mathrm{SM}} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_B z\,\mathrm{d}m. \end{cases} \tag{W2}$$

Wyznaczaniem środka masy zajmiemy się w przykładzie 3.

***Moment bezwładności*** bryły $B$ względem ustalonej osi $k$ dany jest wzorem

$$I = \int_B \rho^2\,\mathrm{d}m, \tag{W3}$$

w którym $\mathrm{d}m$ oznacza, jak poprzednio, element masy bryły, zaś $\rho$ – jego odległość od osi $k$. Należy uważać, by nie pomylić wielkości $\varrho$, czyli gęstości trójwymiarowej bryły, z oznaczaną tu podobnym symbolem odległością $\rho$. Obliczaniu momentu bezwładności poświęcony jest przykład 1.

***Twierdzenie Steinera*** wiąże ze sobą wartości momentów bezwładności bryły względem dwóch różnych osi, spełniających określone warunki. Niech $I_0$ będzie momentem bezwładności bryły $B$ względem dowolnej osi $k$ przechodzącej przez środek masy tej bryły, zaś $I$ – momentem bezwładności bryły $B$ względem innej osi, równoległej do $k$. Wówczas

$$I = I_0 + md^2, \tag{W4}$$

gdzie $m$ jest masą bryły, $d$ natomiast – odległością między osiami. Należy tu zwrócić uwagę na dwa ważne założenia: osie muszą być równoległe, a jedna z nich, związana z momentem bezwładności $I_0$, musi przechodzić przez środek masy bryły. Jeśli choć jeden z tych warunków nie zachodzi, równość (W4) nie jest spełniona. Dowód twierdzenia Steinera podany zostanie na wykładzie, a z jego wykorzystaniem zetkniemy się w przykładzie 1.

***Tensor momentu bezwładności*** bryły $B$ w ustalonym układzie współrzędnych można zapisać w postaci macierzy

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \tag{W5}$$

której elementy macierzowe dane są wzorem

$$I_{ij} = \int_B \left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right) \mathrm{d}m, \qquad i, j = x, y, z. \tag{W6}$$

W wyrażeniu tym, jak zwykle, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ jest długością wektora wodzącego, natomiast $r_x \equiv x$, $r_y \equiv y$ i $r_z \equiv z$ to jego współrzędne. Symbolem $\delta_{ij}$ oznaczamy tzw. *deltę Kroneckera*, zdefiniowaną wzorem

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ 0, & \text{gdy } i \neq j. \end{cases} \tag{W7}$$

Wzór (W6) wygląda na dosyć skomplikowany, jednak w istocie pozwala bardzo łatwo obliczyć poszczególne elementy macierzowe (W5). Oto one:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \textstyle\int_B \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m, & I_{xy} &= -\textstyle\int_B xy\,\mathrm{d}m, & I_{xz} &= -\textstyle\int_B xz\,\mathrm{d}m, \\ I_{yx} &= -\textstyle\int_B yx\,\mathrm{d}m, & I_{yy} &= \textstyle\int_B \left(x^2 + z^2\right) \mathrm{d}m, & I_{yz} &= -\textstyle\int_B yz\,\mathrm{d}m, \\ I_{zx} &= -\textstyle\int_B zx\,\mathrm{d}m, & I_{zy} &= -\textstyle\int_B zy\,\mathrm{d}m, & I_{zz} &= \textstyle\int_B \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m. \end{aligned} \tag{W8}$$

Jak wynika z (W8) (oraz oczywiście z (W6)), tensor momentu bezwładności jest symetryczny: $I_{ij} = I_{ji}$.

Tensor jest obiektem geometrycznym, czyli niezależnym od układu współrzędnych, macierz natomiast jest „przedstawieniem” tensora w konkretnym układzie współrzędnych. Sytuacja jest tu analogiczna jak w przypadku wektorów: wektor to abstrakcyjny, niezależny od układu współrzędnych obiekt, możemy jednak po wybraniu pewnego konkretnego układu współrzędnych zapisać składowe wektora w tym układzie; gdy przejdziemy do innego układu (np. obracając osie wyjściowego układu), składowe wektora zmienią się, choć pozostanie on tym samym wektorem. Wzory (W8) zadają składowe tensora momentu bezwładności (W5) w pewnym układzie współrzędnych, który musimy wybrać na samym początku, zanim przystąpimy do obliczania całek. Przejście do innego układu współrzędnych spowoduje, że będziemy zmuszeni skorzystać ze wzorów (W8) jeszcze raz, by policzyć składowe tensora w tym nowym układzie współrzędnych (zamiast liczyć składowe od nowa, możemy też poddać macierz tensora w starym układzie odpowiedniej transformacji).

Na wykładzie udowodniono, że dla dowolnej bryły sztywnej $B$ wirującej wokół ustalonego punktu $O$ istnieje pewien szczególny, wyróżniony układ współrzędnych, w którym tensor momentu bezwładności ma wyjątkowo prostą postać – jest diagonalny:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}. \tag{W9}$$

Osie tego wyróżnionego układu nazywamy *osiami głównymi* bryły $B$ względem punktu $O$, zaś wielkości $I_x$, $I_y$ i $I_z$ – *głównymi momentami bezwładności*. Znalezienie osi i momentów głównych wymaga zatem zdiagonalizowania macierzy tensora momentu bezwładności $\mathbb{I}$, wyznaczonej dla dowolnego układu współrzędnych. Diagonalizacja tej macierzy przebiega w dwóch krokach:

a) wyznaczenie wartości własnych macierzy $\mathbb{I}$

Szukamy rozwiązań *równania charakterystycznego* macierzy $\mathbb{I}$, czyli równania

$$\det\left(\mathbb{I} - \lambda \mathbb{1}\right) = 0, \tag{W10}$$

w którym det oznacza wyznacznik, $\mathbb{1}$ – macierz jednostkową $3 \times 3$, $\lambda$ zaś jest liczbą. Lewa strona równania (W10) jest wielomianem trzeciego stopnia w $\lambda$, w ogólnym przypadku równanie to będzie więc miało trzy rozwiązania $\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$, nazywane *wartościami własnymi* macierzy $\mathbb{I}$. Liczby te są właśnie szukanymi głównymi momentami bezwładności.

b) wyznaczenie wektorów własnych macierzy $\mathbb{I}$

Dla każdej ze znalezionych w poprzednim punkcie wartości własnych $\lambda_i$ zapisujemy równanie

$$\left(\mathbb{I} - \lambda_i \mathbb{1}\right) \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \tag{W11}$$

i rozwiązujemy je, wyznaczając wektor $\mathbf{w}_i$, nazywany *wektorem własnym* macierzy $\mathbb{I}$ związanym z wartością własną $\lambda_i$. Otrzymane w ten sposób trzy wektory $\mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, 3$, zadają osie główne bryły.

W przypadku, gdy dwie lub trzy spośród wartości własnych $\lambda_i$ są sobie równe, równania (W11) nie wyznaczają osi głównych jednoznacznie i mamy wtedy pewną dowolność w ich wyborze. Nauczymy się radzić sobie z takimi sytuacjami w przykładzie 2.

Znajdowanie tensora momentu bezwładności oraz osi i momentów głównych bryły sztywnej jest tematem przykładów 2. i 3.

Momenty bezwładności i tensor momentu bezwładności mają ogromne znaczenie dla opisu ruchu obrotowego bryły sztywnej. Odgrywają one w tym opisie rolę analogiczną do roli masy w opisie ruchu postępowego. Zagadnienia związane z dynamiką ruchu obrotowego będą jednak poruszane na następnych zajęciach. Tym razem skupimy się na ćwiczeniu obliczania momentów bezwładności i tensora momentu bezwładności.

## Zadania przykładowe

**Przykład 1.**
Znaleźć moment bezwładności

a) jednorodnego cienkiego pręta o masie $m$ i długości $l$ względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek oraz względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jeden z jego końców,

b) jednorodnego trójkąta równoramiennego o masie $m$, ramieniu $b$ i kącie pomiędzy ramionami $2\beta$ względem osi prostopadłej do płaszczyzny trójkąta i przechodzącej przez wierzchołek pomiędzy ramionami,

c) jednorodnego $n$-kąta foremnego o masie $m$ i promieniu $r$ względem osi prostopadłej do płaszczyzny wielokąta i przechodzącej przez jego środek.

**Rozwiązanie.**

a) Pręt jest cienki, zaniedbamy zatem zupełnie jego wymiary poprzeczne i potraktujemy go jak obiekt jednowymiarowy – odcinek o długości $l$. Jednorodność pręta oznacza, że jego gęstość liniowa $\lambda$, czyli masa przypadająca na jednostkę długości pręta, jest stała i równa

$$\lambda = \frac{m}{l}. \tag{P1.1}$$

Pręt to odcinek prostej, zatem najprościej będzie wykonywać obliczenia w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Zacznijmy od znalezienia momentu bezwładności pręta względem osi obrotu przechodzącej przez jeden z jego końców. Umieśćmy pręt w kartezjańskim układzie współrzędnych, wzdłuż dodatniej półosi $Ox$, tak, by koniec pręta, przez który przechodzi oś obrotu, znajdował się w początku układu. Oś obrotu leży wówczas w płaszczyźnie $Oyz$. Odległość punktu pręta o współrzędnej $x$ od osi obrotu jest więc równa $\rho = x$, element masy pręta możemy zaś przestawić jako $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x$. Zmienna $x$ ma przebiegać cały pręt, musi zatem zmieniać się w przedziale $0 \leqslant x \leqslant l$. Moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego koniec, zgodnie ze wzorem (W3), wynosi więc

$$I_{\mathrm{koniec}} = \int_0^l \rho^2\,\mathrm{d}m = \int_0^l x^2\,\mathrm{d}m = \lambda \int_0^l x^2\,\mathrm{d}x = \lambda\,\frac{x^3}{3}\bigg|_0^l = \frac{1}{3}\lambda l^3 = \frac{1}{3}\frac{m}{l}l^3 = \frac{1}{3}ml^2. \tag{P1.2}$$

W przedostatnim kroku wykorzystaliśmy definicję gęstości liniowej pręta, podstawiając $\lambda = m/l$.

Zajmijmy się teraz osią przechodzącą przez środek pręta. Ponownie umieśćmy pręt w kartezjańskim układzie współrzędnych, wzdłuż osi $Ox$, tym razem jednak w początku układu znajdować się będzie środek pręta – dzięki temu oś obrotu leżeć będzie, jak poprzednio, w płaszczyźnie $Oyz$. Odległość punktu pręta o współrzędnej $x$ od osi obrotu wynosi $\rho = |x|$, element masy pręta jest ponownie równy $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x$. Zmienna $x$ tym razem będzie się zmieniać w przedziale $-l/2 \leqslant x \leqslant l/2$. Szukany moment bezwładności wynosi zatem

$$I_{\mathrm{SM}} = \int_{-l/2}^{l/2} \rho^2\,\mathrm{d}m = \int_{-l/2}^{l/2} x^2\,\mathrm{d}m = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} x^2\,\mathrm{d}x = \lambda\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}\lambda l^3 = \frac{1}{12}\frac{m}{l}l^3 = \frac{1}{12}ml^2. \tag{P1.3}$$

Zauważmy, że znając jeden z wyników: (P1.2) lub (P1.3), moglibyśmy znaleźć drugi, korzystając z twierdzenia Steinera. Skoro jednak mamy już je oba, wykorzystamy je, by potwierdzić prawdziwość tego twierdzenia. Odległość pomiędzy osiami, które rozważaliśmy, wynosi $l/2$. Podstawiając w (W4) $I = I_{\mathrm{koniec}}$, $I_0 = I_{\mathrm{SM}}$ oraz $d = l/2$, dostajemy

$$I_{\mathrm{koniec}} = I_{\mathrm{SM}} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2. \tag{P1.4}$$

Wstawiając teraz wartości $I_{\mathrm{koniec}}$ i $I_{\mathrm{SM}}$ z (P1.2) i (P1.3), przekonamy się, że równość (P1.4) rzeczywiście zachodzi.

Warto jeszcze raz podkreślić, że moment bezwładności $I_0$ we wzorze (W4) musi odnosić się do osi przechodzącej przez środek masy bryły. Jeśli, wracając do naszego pręta, wprowadzimy jeszcze jedną oś obrotu, odległą o np. $l/6$ od końca pręta, moment bezwładności względem tej osi nie będzie się różnił od $I_{\mathrm{koniec}}$ o $m\,(l/6)^2$. Możemy jednak w takiej sytuacji zastosować twierdzenie Steinera dwukrotnie: nowa oś jest odległa od osi przechodzącej przez środek masy o $l/3$, zaś oś przechodząca przez koniec pręta, jak już wspomnieliśmy, o $l/2$, zatem moment bezwładności względem nowej osi różni się od $I_{\mathrm{koniec}}$ o $m\left((l/2)^2 - (l/3)^2\right) = 5ml^2/36$.

b) Niech $h$ będzie wysokością trójkąta opuszczoną na podstawę, wówczas $h = b\cos\beta$ (wzór ten wynika z prostych rozważań geometrycznych). Z jednorodności trójkąta wynika, że jego gęstość powierzchniowa $\sigma$, czyli masa przypadająca na jednostkę powierzchni, jest stała w każdym jego punkcie i równa

$$\sigma = \frac{m}{h^2\,\mathrm{tg}\beta}. \tag{P1.5}$$

W mianowniku wykorzystaliśmy znany z geometrii wzór na pole trójkąta równoramiennego.

Spójrzmy teraz na trójkąt jak na sumę nieskończenie wielu odcinków równoległych do podstawy, o długościach rosnących od 0 (wierzchołek) aż do długości podstawy. Dzieląc trójkąt na takie odcinki, będziemy mogli każdy z nich potraktować jak pręt, którym zajmowaliśmy się w punkcie a). Niech

$x$ będzie odległością danego odcinka od wierzchołka trójkąta, długość tego odcinka jest wówczas równa $l = 2x\,\mathrm{tg}\beta$ (ponownie jest to wniosek z prostej analizy geometrycznej). Odcinek traktować możemy jak nieskończenie cienki prostokąt, przypiszmy zatem każdemu z odcinków taką samą nieskończenie małą szerokość $\mathrm{d}x$. Masa takiego nieskończenie cienkiego prostokąta jest oczywiście iloczynem gęstości powierzchniowej i pola jego powierzchni, wynosi więc $\mathrm{d}m = \sigma\, l\, \mathrm{d}x = 2\sigma x\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{d}x$.

Niech $\mathrm{d}I(x)$ będzie momentem bezwładności odcinka w odległości $x$ od wierzchołka trójkąta względem interesującej nas osi obrotu (czyli osi prostopadłej do płaszczyzny trójkąta i przechodzącej przez jego wierzchołek). W punkcie a) znaleźliśmy moment bezwładności cienkiego pręta względem osi do niego prostopadłej i przechodzącej przez jego środek masy – wzór (P1.3). Oś obrotu trójkąta jest, co łatwo sobie wyobrazić, dla każdego z odcinków równoległa do osi, dla której wyprowadziliśmy wzór (P1.3), jest jednak względem niej przesunięta o $x$. Korzystając z twierdzenia Steinera, możemy zatem zapisać

$$\mathrm{d}I(x) = \left(\frac{1}{12}l^2 + x^2\right)\mathrm{d}m = \left(\frac{1}{12}\left(2x\,\mathrm{tg}\beta\right)^2 + x^2\right)\mathrm{d}m = \left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\beta + 1\right)x^2\,\mathrm{d}m. \tag{P1.6}$$

Moment bezwładności jest addytywny – oznacza to, że gdy podzielimy bryłę na części, jej moment bezwładności względem pewnej ustalonej osi jest sumą momentów bezwładności wszystkich części względem tej osi. Tak więc, szukany moment bezwładności trójkąta obliczymy, dodając do siebie momenty (P1.6) poszczególnych odcinków, na które trójkąt podzieliliśmy. Odcinków tych jest nieskończenie wiele i są one numerowane ciągłą zmienną $x$, sumowanie w tym przypadku będzie zatem całkowaniem względem zmiennej $x$ w przedziale od 0 do $h$ (dla $x = 0$ otrzymujemy bowiem pierwszy skrajny odcinek, czyli wierzchołek trójkąta, zaś dla $x = h$ – drugi skrajny odcinek, czyli podstawę trójkąta). Ostatecznie, moment bezwładności trójkąta wynosi

$$\begin{aligned}
I &= \int_B \mathrm{d}I(x) \;=\; \int_B \left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\beta + 1\right)x^2\,\mathrm{d}m \\
&= \int_0^h \left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\beta + 1\right)x^2\;(2\sigma x\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{d}x) \;=\; 2\sigma\,\mathrm{tg}\beta\,\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\beta + 1\right)\int_0^h x^3\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sigma\,\mathrm{tg}\beta\,\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\beta + 1\right)\frac{h^4}{4} \;=\; 2\frac{m}{h^2\,\mathrm{tg}\beta}\,\mathrm{tg}\beta\,\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\beta + 1\right)\frac{h^4}{4} \\
&= \frac{mh^2}{2}\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\beta + 1\right) \;=\; \frac{m\,(b\,\cos\beta)^2}{2}\left(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\beta + 1\right) \\
&= \frac{mb^2}{2}\left(\frac{1}{3}\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) \;=\; \frac{1}{2}mb^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\beta\right).
\end{aligned} \tag{P1.7}$$

W tym dosyć długim rachunku wykorzystaliśmy wyprowadzone wcześniej wzory na $\mathrm{d}m$, $\sigma$ i $h$ oraz tożsamości trygonometryczne.

c) Geometria uczy, że na $n$-kąt foremny można patrzeć jak na sumę $n$ identycznych trójkątów równoramiennych. Trójkąty te mają wspólny wierzchołek w środku wielokąta, oś obrotu przebiega zatem przez wierzchołek każdego z trójkątów. Najprostszym sposobem obliczenia szukanego momentu bezwładności wielokąta będzie zatem podzielenie go na takie identyczne trójkąty równoramienne, obliczenie momentu bezwładności każdego z nich za pomocą wyrażenia (P1.7), a następnie dodanie tak otrzymanych wyników.

W przypadku każdego z trójkątów ramię ma długość $r$, kąt pomiędzy ramionami jest równy $2\beta = 2\pi/n$, masa zaś wynosi $m/n$. Trójkąty są identyczne, więc sumowanie ich momentów bezwładności polega po prostu na pomnożeniu momentu bezwładności jednego z nich przez liczbę trójkątów, czyli $n$. Tak więc, na mocy wzoru (P1.7) moment bezwładności $n$-kąta wynosi

$$I \;=\; n\frac{1}{2}\frac{m}{n}r^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{n}\right) \;=\; \frac{1}{2}mr^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{n}\right). \tag{P1.8}$$

Na koniec zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że $n$-kąt foremny w granicy $n \to \infty$ dąży do koła. Moment bezwładności jednorodnego dysku o masie $m$ i promieniu $r$ wynosi zatem

$$I_{\text{dysk}} = \lim_{n\to\infty} I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}mr^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}mr^2. \tag{P1.9}$$

Ten sam wynik został otrzymany na wykładzie bardziej bezpośrednim sposobem.

**Przykład 2.**
Rozważmy jednorodny sześcian o masie $m$ i boku $a$, obracający się wokół jednego ze swoich wierzchołków. Znaleźć

a) tensor momentu bezwładności sześcianu w układzie współrzędnych, którego osie są równoległe do krawędzi sześcianu,

b) osie główne sześcianu i odpowiadające im główne momenty bezwładności oraz tensor momentu bezwładności w układzie osi głównych.

**Rozwiązanie.**

a) Sześcian jest jednorodny, jego gęstość $\varrho$ jest więc stała w całym jego obszarze i równa ilorazowi masy sześcianu przez jego objętość:

$$\varrho = \frac{m}{a^3}. \tag{P2.1}$$

Element masy sześcianu ma postać $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$.

Umieśćmy sześcian w kartezjańskim układzie współrzędnych w taki sposób, by wierzchołek, wokół którego sześcian się obraca, znajdował się w początku układu, zaś krawędzie sześcianu były równoległe do osi układu. Obszar sześcianu jest wówczas opisany nierównościami

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 \leqslant y \leqslant a, \\ 0 \leqslant z \leqslant a. \end{cases} \tag{P2.2}$$

Całki po obszarze sześcianu będą zatem miały postać

$$\int_B \mathrm{d}V = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z. \tag{P2.3}$$

Poszczególne składowe tensora momentu bezwładności $\mathbb{I}$ sześcianu znajdziemy, korzystając ze wzorów (W8). Zacznijmy od składowej $I_{xx}$; jest ona dana przez

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_B \left(y^2 + z^2\right)\,\mathrm{d}m = \varrho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z \left(y^2 + z^2\right) \\ &= \varrho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z\, y^2 + \varrho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z\, z^2 \end{aligned} \tag{P2.4}$$

Jest to suma dwóch całek potrójnych, z których każdą można przedstawić jako iloczyn trzech całek pojedynczych. Pierwsza z całek w (P2.4) daje

$$\varrho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z\, y^2 = \varrho \left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a y^2 \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^a \mathrm{d}z\right) = \frac{1}{3}\varrho a^5 = \frac{1}{3}\frac{m}{a^3}a^5 = \frac{1}{3}ma^2. \tag{P2.5}$$

Druga całka po prawej stronie (P2.4) ma taką samą wartość na mocy symetrii: ze względu na szczególnie prostą postać (P2.3), zastępując w wyrażeniu podcałkowym po lewej stronie (P2.5) $y^2$ przez $z^2$

otrzymamy taki sam iloczyn trzech całek pojedynczych z tą jedynie różnicą, że rolę całki po $\mathrm{d}y$ będzie teraz odgrywała całka po $\mathrm{d}z$ i *vice versa*; wynik obliczeń nie zmieni się jednak. Tak więc

$$I_{xx} = \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{3}ma^2 = \frac{2}{3}ma^2. \tag{P2.6}$$

Na mocy symetrii pozostałe dwie składowe diagonalne, $I_{yy}$ i $I_{zz}$, muszą mieć taką samą postać. Najłatwiej się o tym przekonać, stosując ten sam argument, którym posłużyliśmy się przed chwilą: dzięki symetrii (P2.3), zamieniając rolami zmienne $x$, $y$ i $z$ w funkcjach podcałkowych wzorów na $I_{xx}$, $I_{yy}$ i $I_{zz}$ (W8), nie zmienimy postaci całek, wszystkie muszą zatem mieć taką samą wartość. Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}ma^2. \tag{P2.7}$$

Czytelnik mający problem ze zrozumieniem przytoczonego tu argumentu opartego na symetrii powinien obliczyć składowe $I_{xx}$ i $I_{yy}$ bezpośrednio, korzystając ze wzorów (W8), i porównać kolejne kroki obliczeń z rachunkami (P2.4) i (P2.5).

Przejdźmy teraz do składowych pozadiagonalnych. Pierwsza z nich ma wartość

$$\begin{aligned} I_{xy} &= -\int_B xy\,\mathrm{d}m = -\varrho\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a \mathrm{d}z\,xy = -\varrho\left(\int_0^a x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a y\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^a \mathrm{d}z\right) \\ &= -\frac{1}{4}\varrho a^5 = -\frac{1}{4}\frac{m}{a^3}a^5 = -\frac{1}{4}ma^2. \end{aligned} \tag{P2.8}$$

Wszystkie pozostałe elementy pozadiagonalne mają, na mocy symetrii, taką samą wartość – argumentacja jest tu podobna, jak poprzednio.

Mamy już wszystkie składowe szukanego tensora momentu bezwładności. Zbierając otrzymane wyniki, możemy przedstawić ten tensor w wybranym przez nas układzie współrzędnych jako macierz

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}ma^2\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}. \tag{P2.9}$$

Zwróćmy uwagę, że – zgodnie z oczekiwaniami – macierz ta jest symetryczna.

b) Na początku wprowadźmy pomocnicze oznaczenie

$$\mu = \frac{1}{12}ma^2. \tag{P2.10}$$

Wyznaczona przez nas przed chwilą macierz (P2.9), reprezentująca tensor momentu bezwładności sześcianu w układzie współrzędnych, którego osie są równoległe do krawędzi sześcianu, nie jest diagonalna. Wynika stąd, że osie równoległe do krawędzi sześcianu nie są jego osiami głównymi. Gdy mamy już (P2.9), znalezienie osi głównych i głównych momentów bezwładności sześcianu jest jednak bardzo proste – wystarczy zdiagonalizować tę macierz.

Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy we wprowadzeniu, w pierwszym kroku musimy znaleźć wartości własne macierzy (P2.9), rozwiązując równanie (W10). Mamy

$$\mathbb{I} - \lambda\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 8\mu & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\mu-\lambda & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu-\lambda & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu-\lambda \end{bmatrix}, \tag{P2.11}$$

zatem

$$\det\left(\mathbb{I} - \lambda\mathbb{1}\right) = (2\mu-\lambda)\,(11\mu-\lambda)^2\,. \tag{P2.12}$$

Równanie charakterystyczne (W10) przyjmuje zatem postać

$$(2\mu - \lambda)\,(11\mu - \lambda)^2 \;=\; 0 \tag{P2.13}$$

i ma pierwiastki

$$\lambda_1 = 2\mu, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu. \tag{P2.14}$$

Te trzy liczby są właśnie wartościami własnymi macierzy (P2.9), czyli głównymi momentami bezwładności sześcianu. Zwróćmy uwagę, że dwa z nich są sobie równe.

Kolejny krok to znalezienie wektorów własnych macierzy (P2.9), ponieważ – zgodnie z tym, co powiedzieliśmy we wprowadzeniu – to one określają kierunki osi głównych sześcianu. Wektory własne wyznaczone są przez równanie (W11), które musimy rozwiązać niezależnie dla każdej z wartości własnych (P2.14).

Zacznijmy od $\lambda_1$. Dla $\lambda = \lambda_1 = 2\mu$ otrzymujemy

$$\mathbb{I} - \lambda\mathbb{1} \;=\; \begin{bmatrix} 8\mu - 2\mu & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu - 2\mu & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu - 2\mu \end{bmatrix} \;=\; \mu \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \tag{P2.15}$$

równanie (W11) przyjmuje więc postać

$$\mu \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1x} \\ w_{1y} \\ w_{1z} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{P2.16}$$

i jest równoważne układowi trzech równań

$$\begin{cases} 2w_{1x} - w_{1y} - w_{1z} = 0, \\ -w_{1x} + 2w_{1y} - w_{1z} = 0, \\ -w_{1x} - w_{1y} + w_{1z} = 0. \end{cases} \tag{P2.17}$$

Odejmując od pierwszego z tych równań drugie, dostajemy $w_{1x} = w_{1y}$, co z kolei, w połączeniu z pierwszym równaniem, prowadzi do wniosku $w_{1x} = w_{1z}$. Tak więc, na mocy (P2.17) składowe pierwszego wektora własnego $\mathbf{w}_1$ spełniają

$$w_{1x} = w_{1y} = w_{1z}. \tag{P2.18}$$

Związek ten wyznacza jednoznacznie kierunek wektora $\mathbf{w}_1$, nie określa jednak jego zwrotu i długości. Zależności (P2.18) są spełniane przez nieskończenie wiele wektorów, np. (2, 2, 2), (−3, −3, −3); wektory te różnią się długością i zwrotem, wszystkie mają jednak wspólny kierunek. Nie jest to jednak problem – interesują nas przecież kierunki osi głównych, które są równoległe do kierunków wektorów własnych; zwroty i długości tych wektorów nie mają znaczenia i możemy je wybrać dowolnie. Zgodnie z powszechnie stosowaną i wygodną konwencją przyjmiemy, że wektor $\mathbf{w}_1$ jest wersorem (czyli wektorem o długości 1) o dodatnich składowych, czyli

$$\mathbf{w}_1 \;=\; \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,\, 1,\, 1)\,. \tag{P2.19}$$

Wersor ten wyznacza pierwszą z osi głównych – jak widzimy, pokrywa się ona z przekątną sześcianu przechodzącą przez wierzchołek, wokół którego sześcian się obraca. Moment główny bezwładności związany z tą osią jest równy

$$I_x = \lambda_1 = 2\mu = \frac{1}{6}ma^2. \tag{P2.20}$$

Tyle też wynosi moment bezwładności sześcianu względem tej osi.

Pójdźmy teraz dalej i wyznaczmy pozostałe osie główne. Dwie wartości własne z (P2.14), które nam pozostały, są równe: $\lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu$, mamy zatem do przeanalizowania tylko jeden przypadek. Dla $\lambda = \lambda_2 = 11\mu$ dostajemy

$$\mathbb{I} - \lambda \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 8\mu - 11\mu & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu - 11\mu & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu - 11\mu \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \tag{P2.21}$$

równanie (W11) ma więc postać

$$\mu \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{2x} \\ w_{2y} \\ w_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{P2.22}$$

Formalnie jest to – jak poprzednio – układ trzech równań na składowe wektora $\mathbf{w}_2$, tym razem jednak wszystkie trzy równania są identyczne:

$$w_{2x} + w_{2y} + w_{2z} = 0. \tag{P2.23}$$

Równanie (P2.23) nie wyznacza kierunku wektora $\mathbf{w}_2$ w sposób jednoznaczny. Zauważmy, że z równania tego wynika, iż iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ znika:

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0. \tag{P2.24}$$

Istotnie, iloczyn ten wynosi

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} w_{2x} + \frac{1}{\sqrt{3}} w_{2y} + \frac{1}{\sqrt{3}} w_{2z} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( w_{2x} + w_{2y} + w_{2z} \right), \tag{P2.25}$$

zatem na mocy (P2.23) jest równy 0. Jak wiemy, dwa wektory, których iloczyn skalarny znika, są do siebie prostopadłe. Tak więc, równanie (P2.23) mówi, że wektorem własnym $\mathbf{w}_2$ może być dowolny wektor prostopadły do wektora $\mathbf{w}_1$. Ze względu na równość wartości własnych $\lambda_2 = \lambda_3$, w przypadku trzeciego wektora własnego $\mathbf{w}_3$ otrzymamy takie same równania i dojdziemy do takich samych wniosków. Ostatecznie więc, rolę dwóch pozostałych osi głównych mogą pełnić dowolne dwie wzajemnie prostopadłe proste, które są prostopadłe do pierwszej osi głównej, określonej przez wektor (P2.19); odpowiadające tym osiom główne momenty bezwładności mają wartość

$$I_y = I_z = 11\mu = \frac{11}{12} m a^2. \tag{P2.26}$$

Gdy znamy już osie główne i odpowiadające im główne momenty bezwładności, możemy znaleźć postać tensora momentu bezwładności w układzie osi głównych, czyli w układzie współrzędnych określonym przez wektory bazowe ($\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$). Nie wymaga to żadnych obliczeń – zgodnie z tym, co mówiliśmy we wprowadzeniu, w tym układzie tensor momentu bezwładności dany jest macierzą

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} = \frac{1}{12} m a^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}. \tag{P2.27}$$

Sytuacja, z którą zetknęliśmy się w tym przykładzie, jest ogólna: zawsze, gdy dwa spośród momentów głównych są sobie równe, za odpowiadające im osie główne możemy przyjąć dwie dowolne osie prostopadłe do trzeciej osi głównej. Możemy sformułować ogólniejsze twierdzenie, obejmujące wszystkie możliwe przypadki:

- wszystkie momenty główne są różne: $I_x \neq I_y \neq I_z$
  Wszystkie osie główne są jednoznacznie określone (i automatycznie wzajemnie prostopadłe). Znajdujemy je tak, jak w tym przykładzie w przypadku osi określonej przez wektor $\mathbf{w}_1$.
- dwa momenty główne są równe: $I_x = I_y \neq I_z$
  Dwie osie główne związane z równymi momentami głównymi są dowolnymi osiami prostopadłymi do trzeciej osi głównej, która jest jednoznacznie wyznaczona. Z tą sytuacją mieliśmy do czynienia w tym przykładzie; spotykamy się z nią również wtedy, gdy bryła ma symetrię obrotową względem osi przechodzącej przez punkt, wokół którego bryła się obraca.
- wszystkie momenty główne są równe: $I_x = I_y = I_z$
  Osią główną może być dowolna oś. Jest tak na przykład w przypadku kuli i sześcianu obracających się wokół swojego środka masy.

Nie będziemy tu dowodzić tego twierdzenia.

**Przykład 3.**
Rozważmy jednorodny bąk o masie $m$ w kształcie stożka o wysokości $h$ i promieniu podstawy $r$, obracający się wokół swojego wierzchołka. Znaleźć

a) położenie środka masy bąka,

b) tensor momentu bezwładności bąka w układzie współrzędnych, w którym oś $Oz$ pokrywa się z osią stożka,

c) osie główne bąka i odpowiadające im główne momenty bezwładności oraz tensor momentu bezwładności w układzie osi głównych.

**Rozwiązanie.**

a) Umieśćmy stożek w kartezjańskim układzie współrzędnych w taki sposób, by jego wierzchołek znajdował się w początku układu, oś symetrii pokrywała się z osią $Oz$ oraz by stożek znajdował się w górnej półprzestrzeni (tzn. by wypełniał obszar, w którym $0 \leqslant z \leqslant h$, nie zaś $-h \leqslant z \leqslant 0$). Położenie środka masy stożka w tym układzie, $\mathbf{r}_{\mathrm{SM}} = (x_{\mathrm{SM}},\, y_{\mathrm{SM}},\, z_{\mathrm{SM}})$, znajdziemy, posługując się wzorami (W2).

Stożek jest jednorodny, ma zatem stałą gęstość, równą ilorazowi jego masy i objętości:

$$\varrho = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3m}{\pi r^2 h}. \tag{P3.1}$$

Jednorodność stożka prowadzi również do wniosku, że jego masa rozłożona jest symetrycznie względem jego osi symetrii. Wynika stąd, że środek masy stożka leży na jego osi symetrii, czyli na osi $Oz$. Stąd

$$x_{\mathrm{SM}} = y_{\mathrm{SM}} = 0. \tag{P3.2}$$

Do tego samego wniosku można również dojść, po prostu obliczając $x_{\mathrm{SM}}$ i $y_{\mathrm{SM}}$ za pomocą wzorów (W2).

Zajmijmy się teraz składową $z_{\mathrm{SM}}$. Na mocy trzeciego ze wzorów (W2)

$$z_{\mathrm{SM}} = \frac{1}{m}\int_B z\,\mathrm{d}m = \frac{\varrho}{m}\int_B z\,\mathrm{d}V = \frac{\varrho}{m}\int_B z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{P3.3}$$

Zauważmy, że dla dowolnego ustalonego $z \in [0,\, h]$ przekrój stożka płaszczyzną prostopadłą do osi $Oz$ i przecinającą tę oś w punkcie o współrzędnej $z$ jest kołem o promieniu

$$R(z) = \frac{rz}{h} \tag{P3.4}$$

(wzór ten wynika z dosyć prostej analizy geometrycznej; warto zwrócić uwagę, że dla $z = 0$, czyli w wierzchołku stożka, otrzymujemy $R(0) = 0$, zaś dla $z = h$, czyli dla podstawy stożka, dostajemy $R(h) = r$, zgodnie z oczekiwaniami). Oznaczając to koło przez $K(z)$, możemy więc napisać

$$z_{\mathrm{SM}} = \frac{\varrho}{m} \int_0^h \mathrm{d}z\, z \int_{K(z)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{P3.5}$$

Ostatnia całka w tym wyrażeniu jest całką powierzchniową po obszarze koła $K(z)$ ze stałej funkcji $f(x,\, y) = 1$, daje więc w wyniku pole koła $K(z)$:

$$\int_{K(z)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \pi R^2(z) = \frac{\pi r^2 z^2}{h^2}. \tag{P3.6}$$

Otrzymujemy zatem

$$z_{\mathrm{SM}} = \frac{\varrho}{m} \int_0^h z \frac{\pi r^2 z^2}{h^2}\, \mathrm{d}z = \frac{\varrho \pi r^2}{m h^2} \int_0^h z^3\, \mathrm{d}z = \frac{\varrho \pi r^2}{m h^2} \frac{h^4}{4} = \frac{3}{4} h. \tag{P3.7}$$

W ostatnim kroku skorzystaliśmy z (P3.1).

Tak więc, abstrahując od układu współrzędnych, w którym wykonywaliśmy obliczenia, możemy powiedzieć, że środek masy jednorodnego stożka o wysokości $h$ leży na jego osi symetrii w odległości $3h/4$ od jego wierzchołka.

b) Umieśćmy ponownie stożek w kartezjańskim układzie współrzędnych w sposób opisany w punkcie a). Składowe tensora momentu bezwładności wyznaczymy, korzystając jak zwykle ze wzorów (W8).

Zacznijmy od składowej $I_{zz}$. Wyraża się ona całką

$$I_{zz} = \int_B \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}m = \varrho \int_B \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}V. \tag{P3.8}$$

Całkę tę najprościej jest obliczyć we współrzędnych walcowych $(\rho,\, \phi,\, z)$, zdefiniowanych równościami

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi, \\ y = \rho \sin\phi, \\ z \text{ jak we współrzędnych kartezjańskich} \end{cases} \tag{P3.9}$$

(należy uważać, by nie pomylić symbolu $\varrho$, oznaczającego gęstość stożka, z symbolem $\rho$, oznaczającym jedną ze współrzędnych walcowych). W tych współrzędnych

$$\begin{aligned} \text{funkcja podcałkowa:} \quad & x^2 + y^2 = \rho^2, \\ \text{element objętości:} \quad & \mathrm{d}V = \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{P3.10}$$

Całkowanie ma odbywać się po całym obszarze stożka, całka po $\mathrm{d}z$ ma więc granice $0 \leqslant z \leqslant h$; dla ustalonego $z$ całkujemy, jak w punkcie a), po kole w płaszczyźnie prostopadłej do osi $Oz$ o promieniu $R(z)$, zdefiniowanym równością (P3.4), dlatego pozostałe granice całkowania to $0 \leqslant \rho \leqslant R(z)$ oraz $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$. Otrzymujemy zatem

$$I_{zz} = \varrho \int_B \rho^2\, \mathrm{d}V = \varrho \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{R(z)} \mathrm{d}\rho\, \rho^3 = \frac{3}{10} m r^2. \tag{P3.11}$$

Zajmiemy się teraz składowymi $I_{xx}$ i $I_{yy}$. Składowe te muszą być sobie równe – wynika to z symetrii: gdy obrócimy układ współrzędnych wokół osi $Oz$ o $90^o$ w prawo, przeprowadzimy oś $Ox$ w oś $Oy$, nie zmieniając jednak sytuacji fizycznej ze względu na symetrię obrotową stożka wokół osi $Oz$. Składowe $I_{xx}$ i $I_{yy}$ mają interpretację momentów bezwładności względem osi, odpowiednio, $Ox$ i $Oy$, zatem ze względu na równoważność tych osi, którą przed chwilą wykazaliśmy, musi zachodzić $I_{xx} = I_{yy}$.

Składowa $I_{xx}$ dana jest wzorem

$$I_{xx} = \int_B \left(y^2 + z^2\right)\, \mathrm{d}m = \varrho \int_B \left(y^2 + z^2\right)\, \mathrm{d}V = \varrho \int_B y^2\, \mathrm{d}V + \varrho \int_B z^2\, \mathrm{d}V. \tag{P3.12}$$

Pierwszą z całek po prawej stronie tego wyrażenia obliczymy, posługując się pewną sztuczką. Zauważmy, że całkę po prawej stronie wzoru na $I_{zz}$, (P3.8), również możemy zapisać jako sumę dwóch całek, a jedna z nich będzie równa całce, którą się teraz zajmujemy. Ze względu na symetrię obrotową stożka obie całki składowe (P3.8) będą równe, obracając układ współrzędnych możemy bowiem zamienić zmienne $x$ i $y$ rolami, nie zmieniając bryły. Wynika stąd, że

$$\varrho \int_B x^2\, \mathrm{d}V = \varrho \int_B y^2\, \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\varrho \int_B \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} I_{zz} = \frac{3}{20} m r^2. \tag{P3.13}$$

Drugą całkę we wzorze (P3.12) możemy obliczyć bezpośrednio we współrzędnych walcowych:

$$\varrho \int_B z^2\, \mathrm{d}V = \varrho \int_0^h z^2\, \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{R(z)} \mathrm{d}\rho\, \rho = \frac{3}{5} m h^2. \tag{P3.14}$$

Ostatecznie

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{20} m r^2 + \frac{3}{5} m h^2 = \frac{3}{20} m \left(r^2 + 4h^2\right). \tag{P3.15}$$

Pozostały nam jeszcze do wyznaczenia pozadiagonalne składowe tensora momentu bezwładności stożka. Sprawa będzie prosta – dzięki symetrii wszystkie te składowe są równe zeru. Stożek ma symetrię obrotową względem osi $Oz$, jest on więc w szczególności symetryczny względem płaszczyzn $x = 0$ oraz $y = 0$. Symetria względem płaszczyzny $x = 0$ prowadzi do wniosku, że $I_{xy} = I_{xz} = 0$, ponieważ w całkach występujących po prawych stronach wzorów na te składowe (W8) przyczynki pochodzące od części stożka, dla której $x > 0$, zniosą się z przyczynkami od tej części stożka, dla której $x < 0$ (przyczynki te będą miały taką samą wartość bezwzględną, będą się jednak różniły znakiem). Analogicznie, z symetrii stożka względem płaszczyzny $y = 0$ wynika, że $I_{yx} = I_{yz} = 0$. Wszystkie składowe pozadiagonalne znikają zatem.

Zbierając otrzymane wyniki, stwierdzamy, że tensor momentu bezwładności stożka względem jego wierzchołka w wybranym układzie współrzędnych dany jest macierzą

$$\mathbb{I} = \frac{3}{20} m \begin{bmatrix} r^2 + 4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 \end{bmatrix}. \tag{P3.16}$$

c) Ta część zadania jest już rozwiązana. Okazało się, że w układzie współrzędnych, którym posługiwaliśmy się w punkcie b), tensor momentu bezwładności (P3.16) jest diagonalny. Osiami głównymi są zatem oś symetrii stożka oraz dwie dowolne osie do niej prostopadłe. Odpowiednie momenty główne znajdują się na diagonali macierzy (P3.16); równość dwóch z nich jest właśnie przyczyną dowolności wyboru dwóch osi głównych, zgodnie z tym, co mówiliśmy w przykładzie 2.

Ten i poprzedni przykład dowodzą, że symetria bryły, której tensora momentu bezwładności szukamy, może znacznie uprościć obliczenia.

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

**Zadanie 1.**
Znaleźć moment bezwładności

a) jednorodnego, płaskiego dysku o masie $m$ i promieniu $r$ względem osi prostopadłej do płaszczyzny dysku i przechodzącej przez punkt na jego brzegu,

b) jednorodnego prostokąta o masie $m$ i bokach $a$ oraz $b$ względem osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez jego geometryczny środek.

**Rozwiązanie.**

a) Moment bezwładności jednorodnego, płaskiego dysku o masie $m$ i promieniu $r$ względem osi $k$ prostopadłej do płaszczyzny dysku i przechodzącej przez jego środek został znaleziony na wykładzie – wynosi on

$$I_0 = \frac{1}{2}mr^2. \tag{Z1.1}$$

Oś z treści zadania jest równoległa do osi $k$ i odległa od niej o $r$, zatem na mocy twierdzenia Steinera szukany moment bezwładności jest równy

$$I = I_0 + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2. \tag{Z1.2}$$

b) Umieśćmy prostokąt w kartezjańskim układzie współrzędnych, w płaszczyźnie $Oxy$, tak, by jego boki o długości $a$ były równoległe do osi $Ox$, boki o długości $b$ – równoległe do osi $Oy$, zaś jego geometryczny środek pokrywał się z początkiem układu. Oś obrotu jest wówczas tożsama z osią $Oz$. Na mocy jednorodności prostokąta jego gęstość powierzchniowa $\sigma$, czyli masa przypadająca na jednostkę powierzchni, jest stała w każdym jego punkcie i równa

$$\sigma = \frac{m}{ab}. \tag{Z1.3}$$

Rozumując podobnie, jak w przykładzie 1. pkt. b), spójrzmy na prostokąt jak na sumę nieskończenie wielu odcinków równoległych do osi $Oy$ – dzieląc prostokąt na takie odcinki, będziemy mogli każdy z nich potraktować jak pręt. Długość każdego z odcinków to $b$. Odcinek uważać możemy za nieskończenie cienki prostokąt, przypiszmy zatem każdemu z odcinków taką samą nieskończenie małą szerokość $\mathrm{d}x$. Masa tego nieskończenie cienkiego prostokąta jest iloczynem gęstości powierzchniowej i pola jego powierzchni, wynosi więc $\mathrm{d}m = \sigma\, b\, \mathrm{d}x$.

Niech $\mathrm{d}I(x)$ będzie momentem bezwładności odcinka o współrzędnej $x$ względem osi obrotu (czyli osi $Oz$). Moment bezwładności cienkiego pręta względem osi do niego prostopadłej i przechodzącej przez jego środek masy wynosi (P1.3). Oś obrotu prostokąta jest dla każdego z odcinków równoległa do osi, dla której wyprowadziliśmy wzór (P1.3), jest jednak względem niej przesunięta o $|x|$. Na mocy twierdzenia Steinera mamy zatem

$$\mathrm{d}I(x) = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\mathrm{d}m. \tag{Z1.4}$$

Szukany moment bezwładności prostokąta obliczymy, sumując momenty (Z1.4) poszczególnych odcinków, na które go podzieliliśmy. Odcinków tych jest nieskończenie wiele i są one numerowane ciągłą zmienną $x$, sumowanie będzie zatem całkowaniem względem zmiennej $x$ w przedziale od $-a/2$ do $a/2$.

Moment bezwładności prostokąta wynosi więc

$$\begin{aligned}
I = \int_B \mathrm{d}I(x) \, &= \, \int_B \left( \frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \mathrm{d}m \, = \, \int_{-a/2}^{a/2} \left( \frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \sigma \, b \, \mathrm{d}x \\
&= \, \frac{1}{12} \sigma b^3 \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \, + \, \sigma b \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \, \mathrm{d}x \, = \, \frac{1}{12} \sigma a b^3 \, + \, \frac{1}{12} \sigma a^3 b \\
&= \, \frac{1}{12} \sigma a b \left( a^2 + b^2 \right) \, = \, \frac{1}{12} \frac{m}{ab} a b \left( a^2 + b^2 \right) \, = \, \frac{1}{12} m \left( a^2 + b^2 \right). \qquad \text{(Z1.5)}
\end{aligned}$$

**Zadanie 2.**

Rozważmy jednorodny prostopadłościan o masie $m$ i bokach $a$, $b$ oraz $c$, obracający się wokół jednego ze swoich wierzchołków. Znaleźć

a) tensor momentu bezwładności prostopadłościanu w układzie współrzędnych, którego osie są równoległe do krawędzi sześcianu,

b) osie główne prostopadłościanu i odpowiadające im główne momenty bezwładności oraz tensor momentu bezwładności w układzie osi głównych.

**Rozwiązanie.**

a) Prostopadłościan jest jednorodny, jego gęstość $\varrho$ jest zatem stała w całym jego obszarze i równa ilorazowi jego masy i objętości:

$$\varrho = \frac{m}{abc}. \qquad \text{(Z2.1)}$$

Element masy prostopadłościanu ma postać $\mathrm{d}m = \varrho \, \mathrm{d}V$.

Umieśćmy prostopadłościan w kartezjańskim układzie współrzędnych w taki sposób, by wierzchołek, wokół którego bryła się obraca, znajdował się w początku układu, krawędzie prostopadłościanu o długości $a$ były równoległe do osi $Ox$, krawędzie o długości $b$ – do osi $Oy$, zaś krawędzie o długości $c$ – do osi $Oz$. Obszar prostopadłościanu jest wówczas opisany nierównościami

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & a, \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & b, \\ 0 & \leqslant & z & \leqslant & c. \end{array} \right. \qquad \text{(Z2.2)}$$

Całki po tym obszarze mają postać

$$\int_B \mathrm{d}V \, = \, \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c \mathrm{d}z. \qquad \text{(Z2.3)}$$

Składowe tensora momentu bezwładności $\mathbb{I}$ prostopadłościanu obliczymy, korzystając ze wzorów (W8). Pierwsza spośród składowych diagonalnych wynosi

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_B \left( y^2 + z^2 \right) \, \mathrm{d}m = \varrho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c \mathrm{d}z \left( y^2 + z^2 \right) \\
&= \varrho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b y^2 \mathrm{d}y \int_0^c \mathrm{d}z + \varrho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c z^2 \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{3} \rho a b^3 c + \frac{1}{3} \rho a b c^3 = \frac{1}{3} \rho a b c \left( b^2 + c^2 \right) = \frac{1}{3} m \left( b^2 + c^2 \right). \qquad \text{(Z2.4)}
\end{aligned}$$

Pozostałe składowe diagonalne możemy łatwo wyznaczyć, odwołując się do symetrii. Rachunki mające na celu obliczenie $I_{yy}$ i $I_{zz}$ przebiegają podobnie do (Z2.4), poszczególne zmienne odgrywają w nich jednak inne role. Ze względu różne granice całkowania w (Z2.3) nie otrzymamy wyników identycznych jak dla $I_{xx}$, jak to było w przypadku sześcianu, lecz wyniki o takiej samej strukturze z kwadratami długości odpowiednich boków:

$$I_{yy} = \frac{1}{3}m\left(a^2 + c^2\right), \qquad I_{zz} = \frac{1}{3}m\left(a^2 + b^2\right). \tag{Z2.5}$$

W przypadku składowych pozadiagonalnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= -\int_B xy\,\mathrm{d}m = -\varrho\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c \mathrm{d}z\, xy \\ &= -\varrho\int_0^a x\,\mathrm{d}x \int_0^b y\,\mathrm{d}y \int_0^c \mathrm{d}z = -\frac{1}{4}\varrho a^2b^2c = -\frac{1}{4}mab \end{aligned} \tag{Z2.6}$$

oraz na mocy symetrii

$$I_{xz} = I_{zx} = -\frac{1}{4}mac, \qquad I_{yz} = I_{zy} = -\frac{1}{4}mbc. \tag{Z2.7}$$

Tensor momentu bezwładności w układzie współrzędnych, który wybraliśmy, ma więc postać

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m\left(b^2+c^2\right) & -\frac{1}{4}mab & -\frac{1}{4}mac \\ -\frac{1}{4}mab & \frac{1}{3}m\left(a^2+c^2\right) & -\frac{1}{4}mbc \\ -\frac{1}{4}mac & -\frac{1}{4}mbc & \frac{1}{3}m\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{12}m \begin{bmatrix} 4\left(b^2+c^2\right) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4\left(a^2+c^2\right) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4\left(a^2+b^2\right) \end{bmatrix}. \tag{Z2.8}$$

b) Wprowadźmy pomocnicze oznaczenie

$$\mu = \frac{1}{12}m. \tag{Z2.9}$$

Macierz (Z2.8) nie jest diagonalna, zastosowany do jej wyznaczenia układ współrzędnych nie jest zatem układem osi głównych prostopadłościanu. W celu znalezienia osi głównych i głównych momentów bezwładności zdiagonalizujemy (Z2.8).

Wartości własne macierzy kwadratowej są, jak wiemy, rozwiązaniami równania (W10), które dla (Z2.8) przyjmuje postać

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r \;=\; 0 \tag{Z2.10}$$

ze współczynnikami

$$\begin{aligned} p &= -8\mu\left(a^2+b^2+c^2\right), \\ q &= 16\mu^2\left(a^4+b^4+c^4\right) + 39\mu^2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right), \\ r &= -28\mu^3\left(a^4b^2+a^4c^2+a^2b^4+a^2c^4+b^4c^2+b^2c^4\right) - 74\mu^3a^2b^2c^2. \end{aligned} \tag{Z2.11}$$

Algebra zna różne sposoby rozwiązywania takich równań – najpopularniejszym z nich jest tzw. metoda Cardano. Posługując się nią, możemy łatwo dojść do wniosku, że równanie (Z2.10) ma trzy pierwiastki rzeczywiste dane wzorami

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= S + T - \frac{p}{3}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(S+T) + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(S-T) - \frac{p}{3}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(S-T) - \frac{p}{3}, \end{aligned} \tag{Z2.12}$$

gdzie

$$S = \sqrt[3]{V + \sqrt{U^3 + V^2}}, \qquad T = \sqrt[3]{V - \sqrt{U^3 + V^2}}, \qquad U = \frac{3q - p^2}{9}, \qquad V = \frac{9pq - 27r - 2p^3}{54}. \tag{Z2.13}$$

Wielkości (Z2.12) są więc głównymi momentami bezwładności prostopadłościanu. W ogólnym przypadku, gdy $a \neq b \neq c$, momenty te są różne: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$.

Osie główne prostopadłościanu określone są przez wektory własne macierzy (Z2.8). Wektory te spełniają równanie (W11), które należy rozwiązać niezależnie dla każdej z wartości własnych (Z2.12). Wartości własne w ogólności są, jak przed chwilą zauważyliśmy, różne, zatem kierunki wektorów własnych określone są przez (W11) jednoznacznie, a ich wyznaczenie przebiega podobnie, jak w przypadku kierunku wektora (P2.19) w przykładzie 2.

Równanie (W11) dla $i$-tego wektora własnego $\mathbf{w}_i = (w_{ix}, w_{iy}, w_{iz})$, $i = 1, 2, 3$, przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 4\mu\left(b^2 + c^2\right) - \lambda_i & -3\mu ab & -3\mu ac \\ -3\mu ab & 4\mu\left(a^2 + c^2\right) - \lambda_i & -3\mu bc \\ -3\mu ac & -3\mu bc & 4\mu\left(a^2 + b^2\right) - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{ix} \\ w_{iy} \\ w_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{Z2.14}$$

i jest równoważne układowi trzech równań skalarnych. Układ ten można dosyć łatwo rozwiązać jedną ze znanych z algebry metod. Otrzymane wzory będą dosyć długie, dlatego ich tu nie przytaczamy.

Tensor momentu bezwładności w układzie osi głównych, czyli w układzie współrzędnych określonym przez wektory bazowe $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, dany jest – jak zwykle – macierzą

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{Z2.15}$$

**Zadanie 3.**
Jednorodna elipsoida o masie $m$ i półosiach $a$, $b$ oraz $c$ obraca się wokół swojego geometrycznego środka. Wprowadźmy układ współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem elipsoidy, zaś jego osie – z osiami elipsoidy. Nierówność opisująca elipsoidę przyjmuje wówczas postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

Znaleźć

a) położenie środka masy elipsoidy,

b) tensor momentu bezwładności elipsoidy w tym układzie współrzędnych,

c) osie główne elipsoidy i odpowiadające im główne momenty bezwładności oraz tensor momentu bezwładności w układzie osi głównych.

*Wskazówka.* Wygodnie jest wprowadzić uogólnione współrzędne sferyczne $(r, \theta, \phi)$, zdefiniowane przez

$$x = a\,r\,\sin\theta\,\cos\phi, \qquad y = b\,r\,\sin\theta\,\sin\phi, \qquad z = c\,r\,\cos\theta.$$

Elipsoida z treści zadania opisana jest w nich nierównościami

$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Element objętości w tych współrzędnych to $\mathrm{d}V = a\,b\,c\,r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$.

**Rozwiązanie.**

a) Z jednorodności elipsoidy wynika, że jej masa rozłożona jest symetrycznie względem płaszczyzny $x = 0$, zatem $x_{\mathrm{SM}} = 0$. To samo możemy powiedzieć o rozkładzie masy elipsoidy względem płaszczyzn $y = 0$ i $z = 0$, tak więc

$$x_{\mathrm{SM}} = y_{\mathrm{SM}} = z_{\mathrm{SM}} = 0. \tag{Z3.1}$$

Do tego samego wniosku można również dojść, po prostu obliczając $x_{\mathrm{SM}}$, $y_{\mathrm{SM}}$ i $z_{\mathrm{SM}}$ za pomocą wzorów (W2). Abstrahując od układu współrzędnych, w którym wykonywaliśmy obliczenia, możemy powiedzieć, że środek masy jednorodnej elipsoidy pokrywa się z jej środkiem geometrycznym.

b) Jednorodność elipsoidy pozwala łatwo obliczyć jej gęstość, stałą w całym jej obszarze:

$$\varrho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi abc} = \frac{3m}{4\pi abc}. \tag{Z3.2}$$

Składowe tensora momentu bezwładności elipsoidy w układzie opisanym w treści zadania wyznaczymy, korzystając – jak zwykle – ze wzorów (W8). Na początek zajmiemy się składową $I_{zz}$:

$$I_{zz} = \int_B \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}m = \varrho \int_B \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}V. \tag{Z3.3}$$

Wykorzystamy wspomniane we wskazówce do zadania uogólnione współrzędne sferyczne ($r$, $\theta$, $\phi$). Całka (Z3.3) daje się w nich łatwo obliczyć:

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \varrho \int_B \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}V \\
&= \varrho abc \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,\left(a^2 r^2 \sin^2\theta\cos^2\phi + b^2 r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi\right) r^2 \sin\theta \\
&= \varrho abc \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,\left(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi\right) r^4 \sin^3\theta \\
&= \frac{4}{15}\pi\varrho abc\left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{5}m\left(a^2 + b^2\right).
\end{aligned} \tag{Z3.4}$$

Wartości składowych $I_{xx}$ i $I_{yy}$ ponownie najłatwiej jest wyznaczyć, odwołując się do argumentów związanych z symetrią elipsoidy. Składowe te wynoszą

$$I_{xx} = \frac{1}{5}m\left(b^2 + c^2\right), \qquad I_{yy} = \frac{1}{5}m\left(a^2 + c^2\right); \tag{Z3.5}$$

w razie wątpliwości wyniki te można oczywiście łatwo potwierdzić, korzystając z odpowiednich wzorów z (W8).

Pozadiagonalne składowe tensora momentu bezwładności elipsoidy znikają na mocy symetrii. Argumentacja jest tu podobna jak w przypadku stożka z przykładu 3.: z symetrii elipsoidy względem płaszczyzny $x = 0$ wynika, że $I_{xy} = I_{xz} = 0$, zaś z jej symetrii względem płaszczyzny $y = 0$ – że $I_{yx} = I_{yz} = 0$. Wszystkie składowe pozadiagonalne są zatem równe zeru. (W przypadku elipsoidy – inaczej niż dla stożka – moglibyśmy zamiast którejś z użytych tu symetrii wykorzystać symetrię względem płaszczyzny $z = 0$, dzięki której $I_{zx} = I_{zy} = 0$).

Tensor momentu bezwładności elipsoidy względem jej geometrycznego środka w wybranym układzie współrzędnych dany jest więc macierzą

$$\mathbb{I} = \frac{1}{5}m\begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}. \tag{Z3.6}$$

c) Macierz (Z3.6) jest diagonalna, nie musimy więc już nic robić, macierz ta przedstawia bowiem tensor momentu bezwładności w układzie osi głównych. Osiami głównymi są zatem osie układu współrzędnych, którym posługiwaliśmy się w punkcie b), czyli osie elipsy; odpowiadające tym osiom główne momenty bezwładności znajdują się na diagonali macierzy (Z3.6).

*Bartłomiej Zglinicki*

## Bibliografia.


[1] Królikowski W., Rubinowicz W., *Mechanika teoretyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.

[2] Taylor J.R., *Mechanika klasyczna*, t. I, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.

[3] Morin D., *Introduction to Classical Mechanics with problems and solutions*, Cambridge University Press, Nowy Jork 2007.