Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 6
30 kwietnia 2020

Zadanie 1. Symetryczny bąk ciężki Bryła sztywna B obraca się wokół punktu O nieruchomego zarówno w układzie spoczynkowym bryły jak i w pewnym układzie inercjalnym U. Punkt O nie pokrywa się ze środkiem masy bryły. Na bryłę działa jednorodna stała w czasie siła ciężkości. Opisać ruch bryły zakładając, że bryła jest względem punktu O bąkiem symetrycznym.

Rozwiązanie. Bryła B jest[1] bąkiem symetrycznym względem punktu O, jeżeli (i) dwa główne momenty bezwładności są sobie równe i (ii) środek ciężkości bryły leży na osi głównej bryły o głównym momencie bezwładności różnym od dwóch pozostałych.

Wprowadźmy w układzie U kartezjański układ współrzędnych (x, y, z) tak, że punkt O pokrywa się z początkiem układu, a siła ciężkości ma postać $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, gdzie $g > 0$ jest stałą. W układzie spoczynkowym bryły B wprowadzamy kartezjański układ współrzędnych (x', y', z') w ten sposób, że punkt O pokrywa się z początkiem układu, jego osie pokrywają się z kierunkami głównymi bryły, a oś OZ' przebiega przez środek masy bryły. W konsekwencji tensor I momentu bezwładności bryły B ma w układzie (x', y', z') postać

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Z definicji

$$I_1 = \int_B (y'^2 + z'^2) dm = \int_B (x'^2 + z'^2) dm, \qquad I_3 = \int_B (x'^2 + y'^2) dm.$$

Zauważmy teraz, że wszystkie powyższe funkcje podcałkowe są nieujemne. Jeśli więc $I_1 = 0$, to w obszarze bryły B musi zachodzić $y'^2 + z'^2 = 0$ i $x'^2 + z'^2 = 0$, co oznacza, że bryła B redukuje się do punktu $(x', y', z') = (0, 0, 0) = O$. Z drugiej strony, jeśli $I_3 = 0$ to $x'^2 + y'^2 = 0$, co oznacza, że masa bryły jest rozłożona wzdłuż osi OZ' czyli że, bryła jest odcinkiem tej osi. Widać stąd, że w obu przypadkach $I_1 = 0$ oraz $I_3 = 0$ bryła B nie jest bryłą (tzn. figurą trójwymiarową) w pełnym tego słowa znaczeniu. Dlatego też będziemy zakładać, że oba główne momenty pędu są dodatnie (bo ujemne być nie mogą).

Równania ruchu dla bryły B znajdziemy przy użyciu lagranżjanu. Bryła B nie wykonuje ruchu postępowego, a jedynie obrotowy, w związku z czym posiada ona trzy stopnie swobody, do opisu których użyjemy kątów Eulera (φ, ψ, θ).

Przy braku ruchu postępowego energia kinetyczna bryły wyraża się wzorem

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} I \vec{\omega},$$

gdzie $\vec{\omega}$ jest prędkością kątową bryły, I tensorem momentu bezwładności, a symbol $\vec{\omega} I \vec{\omega}$ należy rozumieć jako iloczyn skalarny wektora $\vec{\omega}$ z wektorem $I\vec{\omega}$. Korzystając z (1.1) otrzymujemy

$$T = \frac{1}{2}\big(I_1(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + I_3\, \omega_{z'}^2\big).$$

[1] Rozwiązanie zadania opracowano w oparciu o podręcznik [1].

Z drugiej strony, składowe prędkości kątowej $\vec{\omega}$ w układzie primowanym wyrażają się przez kąty Eulera i ich czasowe pochodne w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \sin\psi \sin\theta\, \dot{\varphi} + \cos\psi\, \dot{\theta},\\ \omega_{y'} &= \cos\psi \sin\theta\, \dot{\varphi} - \sin\psi\, \dot{\theta},\\ \omega_{z'} &= \cos\theta\, \dot{\varphi} + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

W konsekwencji

$$T(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\big(I_1(\sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + I_3(\cos\theta\, \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2\big). \tag{1.2}$$

Energia potencjalna bryły jest energią potencjalną w polu siły ciężkości: wkład dV do tej energii od elementu bryły o masie dm i o współrzędnej z wynosi $gz\, dm$, zatem

$$V = \int_B gz\, dm = g \int_B z\, dm = Mg\, \frac{1}{M} \int_B z\, dm = Mgz_{SM},$$

gdzie M jest masą bryły, a z_{SM} wartością z-owej współrzędnej środka masy bryły. Z drugiej strony z założenia, że bryła jest bąkiem symetrycznym oraz z wyboru układu współrzędnych primowanych wynika, że środek masy bryły znajduje się na osi OZ'. Jeśli odległość pomiędzy środkiem masy a punktem O wynosi R, to

$$z_{SM} = R\cos\theta,$$

gdyż θ jest kątem pomiędzy osiami OZ i OZ'. Zatem

$$V(\varphi, \psi, \theta) = MgR\cos\theta.$$

Możemy teraz w sposób jawny wypisać lagranżjan bryły B

$$L(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\big(I_1(\sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + I_3(\cos\theta\, \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2\big) - MgR\cos\theta. \tag{1.3}$$

Do opisania ruchu nie będziemy jednak używać wynikających zeń równań Lagrange'a — równania Lagrange'a tworzą układ trzech równań różniczkowych stopnia drugiego, tymczasem z lagranżjanu (1.3) łatwo jest odczytać trzy wielkości zachowane, dzięki którym równania ruchu będzie można zapisać w postaci układu trzech równań stopnia pierwszego.

Otóż lagranżjan (1.3) nie zależy od współrzędnych φ oraz ψ, a ponadto nie zależy w sposób jawny od czasu t. W konsekwencji w czasie zachowane są pędy uogólnione

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} + I_3 \cos\theta(\cos\theta\, \dot{\varphi} + \dot{\psi}), \tag{1.4}$$

$$p_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\cos\theta\, \dot{\varphi} + \dot{\psi}). \tag{1.5}$$

oraz wielkość

$$\begin{aligned}E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - T + V = 2T - T + V = \\ = T + V = \frac{1}{2}\big(I_1(\sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + I_3(\cos\theta\, \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2\big) + MgR\cos\theta. \quad (1.6)\end{aligned}$$

czyli całkowita energia mechaniczna bryły. Drugie z powyższych przekształceń opiera się na następującej obserwacji: otóż dla energii kinetycznej (1.2) i dla dowolnej liczby λ zachodzi

$$T(\varphi, \psi, \theta, \lambda\dot{\varphi}, \lambda\dot{\psi}, \lambda\dot{\theta}) = \lambda^2 T(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$$

— o energii T mówimy, że jest jednorodną funkcją pochodnych $(\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$ stopnia 2. Zatem

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} T = 2T,$$

a z drugiej strony

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=1} T = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy równania ruchu w postaci układu utworzonego z równań (1.4), (1.5) i (1.6). Nie znajdziemy rozwiązania tych równań w postaci jawnej, jednakże sprowadzimy je do postaci, która umożliwi jakościowy opis ruchu bryły B.

Korzystając z równania (1.5) upraszczamy równanie (1.4):

$$p_\varphi = I_1 \sin^2\theta\,\dot{\varphi} + p_\psi \cos\theta,$$

skąd mamy

$$\frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} = \dot{\varphi}. \tag{1.7}$$

Wynik ten i równanie (1.5) pozwalają nam przedstawić równanie (1.6) w następującej postaci

$$E = \frac{1}{2}\Big(\frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{I_1\sin^2\theta} + I_1\dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2}{I_3}\Big) + MgR\cos\theta.$$

Zauważmy, że w powyższym równaniu nie występują współrzędne φ i ψ, ani ich pochodne po czasie — równanie to jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu na funkcję $t \mapsto \theta(t)$. Wynika z niego, że

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I_1}\Big(E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} - MgR\cos\theta\Big) - \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{I_1^2\sin^2\theta}. \tag{1.8}$$

Rozważmy teraz szczególną sytuację, w której $p_\varphi = 0 = p_\psi$. Wtedy z równań (1.4) i (1.5) wynika, że

$$0 = I_1\sin^2\theta\dot{\varphi}.$$

Ponieważ $I_1 \neq 0$, więc równanie to ma trzy rozwiązania: $\theta = 0$ lub $\theta = \pi$ lub $\dot{\varphi} = 0$. Jeśli jednak podczas całego ruchu $\theta = 0$ lub $\theta = \pi$ to kąty φ i ψ nie są zdefiniowane (i w konsekwencji nie są zdefiniowane pędy p_φ ip_ψ)— innymi słowy wybrane przez nas współrzędne w postaci katów Eulera nie opisują poprawnie tych dwóch przypadków i dlatego nie będziemy ich tu analizowali. W przypadku $\dot{\varphi} = 0$ (pamietajmy, że $I_3 \neq 0$) otrzymujemy z (1.5) $\dot{\psi} = 0$. Zatem przyjęcie zerowych pędów p_φ i p_ψ prowadzi do stałości w czasie współrzędnych φ i ψ. Ruch bryły B zachodzi wtedy w płaszczyźnie prostopadłej do stałego w czasie przecięcia płaszczyzny XOY i $X'OY'$. W tym przypadku równanie (1.8) upraszcza się do

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I_1}\Big(E - MgR\cos\theta\Big),$$

czyli do równania opisującego ruch wahadłowy bryły B.

Załóżmy teraz, że
$$p_\varphi^2 + p_\psi^2 \neq 0$$
i przekształćmy teraz równanie (1.8) dokonując zamiany zmiennych
$$\xi = \cos\theta, \tag{1.9}$$
skąd mamy
$$\dot{\xi}^2 = (-\sin\theta\,\dot{\theta})^2 = \sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 = (1-\xi^2)\dot{\theta}^2.$$
Podstawiając do powyższego równania $\dot{\theta}^2$ wyrażone za pomocą wzoru (1.8) otrzymujemy
$$\dot{\xi}^2 = \frac{2}{I_1}\Big(E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} - MgR\xi\Big)(1-\xi^2) - \frac{(p_\varphi - p_\psi\xi)^2}{I_1^2}. \tag{1.10}$$

Łatwo teraz zauważyć, że prawa strona uzyskanego równania jest wielomianem stopnia 3 od zmiennej ξ, który będziemy oznaczać symbolem $f(\xi)$. Zatem równanie (1.10) można przepisać w postaci
$$\dot{\xi}^2 = f(\xi) = \frac{2MgR}{I_1}\xi^3 + A\xi^2 + B\xi + \frac{2}{I_1}E - \frac{1}{I_1 I_3}p_\psi^2 - \frac{1}{I_1^2}p_\varphi^2. \tag{1.11}$$

Lewa strona powyższego równania jest nieujemna, co więcej z równania wynika, że (1.9), że $-1 \leq \xi \leq 1$. Zatem aby równania ruchu miały rozwiązanie wielomian $f(\xi)$ musi być nieujemny przynajmniej w jednym punkcie przedziału $[-1, 1]$. Dokładne zbadanie znaku wielomianu stopnia 3 jest rachunkowo dość trudnym zadaniem, szczególnie przy tak skomplikowanych współczynnikach jak w przypadku wielomianu $f(\xi)$, dlatego też ograniczymy się tu do częściowej analizy tego zagadnienia.

Jak wiadomo, wielomian stopnia 3 ma od jednego do trzech (różnych) pierwiastków. Ponieważ współczynnik $2MgR/I_1$ przy ξ^3 jest dodatni, więc
$$\lim_{\xi\to\infty} f(\xi) = \infty.$$
Z drugiej strony z (1.10) wynika natychmiast, że
$$f(1) = -\frac{(p_\varphi - p_\psi)^2}{I_1^2} \leq 0,$$
co w połączeniu z granicą obliczoną przed chwilą oznacza, że wielomian $f(\xi)$ zawsze posiada pierwiastek $\xi_3 \geq 1$.

Jeśli pierwiastek $\xi_3 > 1$ (co zawsze można osiągnąć wybierając $p_\varphi - p_\psi \neq 0$), to aby równanie (1.11) było spełnione muszą istnieć pierwiastki $-1 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq 1$ wielomianu $f(\xi)$. Pokażemy teraz, że zawsze można to osiągnąć dobierając odpowiednio stałe E, p_φ i p_ψ. Z równania (1.11) wynika, że
$$f(0) = \frac{2}{I_1}E - \frac{1}{I_1 I_3}p_\psi^2 - \frac{1}{I_1^2}p_\varphi^2.$$

Zauważmy, że ze względu na zależność energii kinetycznej (1.2) od pochodnej $\dot{\theta}$, wartość $E = T + V$ zawsze może być tak dobrana (bez zmiany stałych p_φ i p_ψ, które nie zależą od $\dot{\theta}$), że $f(0) > 0$, co przy $\xi_3 > 1$ oznacza istnienie pierwiastków $-1 \leq \xi_1 \leq \xi_2 < 1$ wielomianu $f(\xi)$.

Zatem w tej sytuacji zmienna ξ zmienia się okresowo pomiędzy pierwiastkami $\xi_1 \leq \xi_2$, co oznacza okresową zmienność kąta θ pomiędzy odpowiednimi wartościami $\theta_1 \leq \theta_2$ (w sytuacji $\theta_1 = \theta_2$ wartość θ nie zmienia się w czasie).

Zwróćmy jeszcze uwagę na równanie (1.7): otóż w zależności od wartości stałych p_φ, p_ψ i zmienności kąta θ znak $\dot{\varphi}$ może (i) być stały w czasie, (ii) być nieujemy lub niedodatni przyjmując w niektórych chwilach wartość 0 lub (iii) przyjmować wszystkie możliwe znaki.

Położenie osi OZ' w układzie U opisane jest w pełni przez kąty θ i φ, a ruch tej osi może być opisany poprzez opis ruchu punktu przecięcia tej osi ze sferą jednostkową o środku w punkcie O. Z powyższej analizy widać, że jeśli $\theta_1 \neq \theta_2$ to tor ruchu tego punktu przecięcia jest krzywą na tej sferze oscylującą pomiędzy wartościami θ_1 i θ_2 i w przypadku (i) podobną do sinusoidy, w przypadku (ii) podobną do cykloidy, a w przypadku (iii) tor będzie krzywą zapętlająca się (podobną do zrzutowanej na płaszczyznę linii śrubowej).

$\square$

Andrzej Okołów

Literatura

[1] Rubinowicz W, Królikowski W, 1995 *Mechanika teoretyczna.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.