Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 8
7 maja 2020

Zadanie 1. Koralik o masie m może poruszać się bez tarcia wzdłuż prostoliniowego pręta obracającego się ze stałą prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez pewien punkt pręta i doń prostopadłej. Znaleźć i rozwiązać równania kanoniczne Hamiltona opisujące ruch koralika wzdłuż pręta.

Rozwiązanie. Niech oś obrotu pręta pokrywa się z osią OZ kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y, z) i niech pręt obraca się w płaszczyźnie $z = 0$. Wprowadźmy kartezjańską współrzędną s wzdłuż pręta tak, że $s = 0$ pokrywa się z punktem przecięcia pręta z osią obrotu. Jeśli kąt φ jest kątem mierzonym od dodatniej półprostej osi OX do części pręta opisanej dodatnimi wartościami współrzędnej s, to

$$x = s\cos\varphi, \qquad y = s\sin\varphi.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\varphi = \omega t$, zatem

$$x = s\cos(\omega t), \qquad y = s\sin(\omega t).$$

W konsekwencji

$$\dot{x} = \dot{s}\cos(\omega t) - \omega s\sin(\omega t), \qquad \dot{y} = \dot{s}\sin(\omega t) + \omega s\cos(\omega t)$$

i

$$\vec{v}^2 = \dot{s}^2 + \omega^2 s^2.$$

Lagranżjan koralika ma postać jego energii kinetycznej opisanej przy pomocy współrzędnej s i pochodnej $\dot{s}$:

$$L(s,\dot{s}) = T(s,\dot{s}) = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \omega^2 s^2). \tag{1.1}$$

Pęd p kanonicznie sprzężony do położenia s wyraża się następująco:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}.$$

Zatem hamiltonian koralika

$$H(s,p) = p\dot{s}(p) - L(s,\dot{s}(p)) = p\frac{p}{m} - \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \omega^2 s^2\right] = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}\omega^2 s^2, \tag{1.2}$$

a równania Hamiltona przyjmują postać

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial s} = m\omega^2 s, \\ \dot{s} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Równania te rozwiążemy metodą nie najprostszą[1], ale przydatną z punktu widzenia kolejnego zadania. Zacznijmy od przepisania ich w postaci

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m\omega^2 \\ 1/m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} \equiv M\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}.$$

Z punktu widzenia teorii równań różniczkowych powyższy układ równań jest układem liniowych równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami — stałość współczynników odnosi się do stałości w czasie macierzy M. Ogólnym rozwiązaniem tego układu jest

$$\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} = \exp(Mt)\begin{pmatrix} p_0 \\ s_0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

W powyższym wzorze (p_0, s_0) są kanonicznym pędem i położeniem koralika w chwili $t = 0$, a

$$\exp(Mt) := \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Mt)^n}{n!}, \tag{1.5}$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową 2×2.

Zachodzi

$$\begin{aligned}
M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & m\omega^2 \\ 1/m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & m\omega^2 \\ 1/m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} = \omega^2\mathbf{1}, \\
M^3 &= M^2 M = \omega^2 M, \\
M^4 &= M^3 M = \omega^4\mathbf{1},
\end{aligned}$$

itd. W ogólności

$$M^{2k} = \omega^{2k}\mathbf{1}, \qquad M^{2k+1} = \omega^{2k}M = \omega^{2k+1}\frac{M}{\omega}.$$

Podstawmy teraz powyższe wartości do (1.5) oddzielnie sumując wyrazy z n parzystym i n nieparzystym:

$$\begin{aligned}
\exp(Mt) &= \mathbf{1} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!}\Big)\mathbf{1} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)\frac{M}{\omega} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!}\Big)\mathbf{1} + \sinh(\omega t)\frac{M}{\omega} = \\
&= \cosh(\omega t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sinh(\omega t)}{\omega}\begin{pmatrix} 0 & m\omega^2 \\ 1/m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & m\omega\sinh(\omega t) \\ \dfrac{\sinh(\omega t)}{m\omega} & \cosh(\omega t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wynik ten wraz ze wzorem (1.4) daje nam rozwiązanie równań Hamiltona (1.3) postaci

$$\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & m\omega\sinh(\omega t) \\ \dfrac{\sinh(\omega t)}{m\omega} & \cosh(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ s_0 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
p(t) &= \cosh(\omega t)p_0 + m\omega\sinh(\omega t)s_0, \\
s(t) &= \frac{\sinh(\omega t)}{m\omega}p_0 + \cosh(\omega t)s_0.
\end{aligned}$$

[1] Prostszą metodą rozwiązany jest analogiczny układ równań (32) i (33) w 8. serii zadań na ćwiczenia.

Na zakończenie warto zauważyć, że (i) hamiltonian (1.2) nie jest tu całkowitą energią koralika — jego całkowita energia to energia kinetyczna T równa lagranżjanowi (1.1) oraz że (ii) hamiltonian nie zależy w sposób jawny od czasu i dlatego jest wielkością zachowaną podczas ruchu. □

Zadanie 2. Rozważmy moment pędu

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$

pewnego punktu materialnego P. Załóżmy, że kartezjańskie składowe (p_i) pędu $\vec{p} = m\vec{v}$ są pędami kanonicznie sprzężonymi do odpowiednich kartezjańskich składowych (x_i) wektora wodzącego $\vec{x}$ tego punktu. Pokazać, że nawiasy Poissona kartezjańskich składowych (L_i) momentu pędu mają następującą postać

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k, \tag{2.1}$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem całkowicie antysymetrycznym. Przedyskutować związek momentu pędu z generatorami grupy obrotów.

Rozwiązanie. Kartezjańska składowa L_i momentu pędu przedstawia się następująco:

$$L_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j p_k,$$

gdzie ϵ_{ijk} jest symbolem całkowicie antysymetrycznym. Zatem

$$\begin{aligned}\{L_i, L_j\} &= \{\sum_{ab} \epsilon_{iab} x_a p_b, \sum_{mn} \epsilon_{jmn} x_m p_n\} = \sum_{abmn} \epsilon_{iab}\epsilon_{jmn}\{x_a p_b, x_m p_n\} = \\ &= \sum_{abmn} \epsilon_{iab}\epsilon_{jmn}(\{x_a, x_m p_n\}p_b + x_a\{p_b, x_m p_n\}) = \\ &= \sum_{abmn} \epsilon_{iab}\epsilon_{jmn}(x_m\{x_a, p_n\}p_b + \{x_a, x_m\}p_n p_b + x_a x_m\{p_b, p_n\} + x_a\{p_b, x_m\}p_n).\end{aligned}$$

Pamiętając o tym, że

$$\{x_a, p_b\} = \delta_{ab} = -\{p_b, x_a\}, \qquad \{x_a, x_b\} = 0 = -\{p_a, p_b\},$$

kontynuujemy obliczenia:

$$\begin{aligned}\{L_i, L_j\} &= \sum_{abmn} \epsilon_{iab}\epsilon_{jmn}(x_m\delta_{an}p_b - x_a\delta_{bm}p_n) = -\sum_{abm} \epsilon_{iba}\epsilon_{jma} x_m p_b + \sum_{abn} \epsilon_{iab}\epsilon_{jnb} x_a p_n = \\ &= -\sum_{bm}(\delta_{ij}\delta_{bm} - \delta_{im}\delta_{bj}) x_m p_b + \sum_{an}(\delta_{ij}\delta_{an} - \delta_{in}\delta_{aj}) x_a p_n = \\ &= -\delta_{ij}\sum_m x_m p_m + \sum_{bm} \delta_{im}\delta_{bj} x_m p_b + \delta_{ij}\sum_n x_n p_n - \sum_{an} \delta_{in}\delta_{aj} x_a p_n = \\ &= \sum_{bm} \delta_{im}\delta_{bj} x_m p_b - \sum_{mb} \delta_{ib}\delta_{mj} x_m p_b = \sum_{mb}(\delta_{im}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{jm}) x_m p_b = \sum_{mbk} \epsilon_{ijk}\epsilon_{mbk} x_m p_b = \\ &= \sum_{mbk} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmb} x_m p_b = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k.\end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do omówienia związku pomiędzy momentem pędu a generatorami grupy obrotów. Macierz O wymiaru 3×3 jest macierzą obrotu jeżeli

$$\sum_{ij} \delta_{kl} O_{ki} O_{lj} = \delta_{ij}, \qquad\qquad \det(O_{ij}) = 1. \tag{2.2}$$

Niech $\vec{n}$ będzie wektorem jednostkowym zdającym oś obrotu, a φ liczbą rzeczywistą. Oznaczmy $\vec{\varphi} = \varphi\vec{n}$. Macierz $O(\vec{\varphi})$ obrotu o kąt φ wokół osi $\vec{n}$ może być przedstawiona za pomocą wzoru

$$O(\vec{\varphi}) = \exp(\Phi) := \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^n}{n!}, \tag{2.3}$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową 3×3, a Φ jest *antysymetryczną* macierzą 3×3 o składowych

$$\Phi_{ij} = \sum_k \epsilon_{ikj} \varphi_k = \sum_k \epsilon_{ikj} \varphi n_k = -\Phi_{ji} \tag{2.4}$$

— w powyższym wzorze φ_k i n_k są składowymi wektorów, odpowiednio, $\vec{\varphi}$ i $\vec{n}$.

Zamiast dowodu powyższego faktu obliczymy $\exp(\Phi_z)$ dla macierzy Φ_z zadanej przez $\vec{n} = \vec{e}_z$. Z (2.4) mamy

$$\Phi_{zij} = \sum_k \epsilon_{ikj} \varphi \vec{e}_{zk} = \varphi \sum_k \epsilon_{ikj} \vec{e}_{zk} = \varphi \epsilon_{i3j} \equiv \varphi A_{zij},$$

skąd wynika, że jedynymi niezerowymi składowymi tej macierzy są składowe

$$\Phi_{z12} = \varphi \epsilon_{132} = -\varphi = -\Phi_{z21}.$$

Zatem

$$\Phi_z = \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varphi A_z. \tag{2.5}$$

Podstawiając powyższą macierz do wzoru (2.3) otrzymujemy

$$O(\varphi \vec{e}_z) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^n A_z^n}{n!}. \tag{2.6}$$

Wykorzystując (2.5) łatwo jest obliczyć, że

$$A_z^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv -\mathbf{1}_z, \qquad A_z^3 = -A_z, \qquad A_z^4 = \mathbf{1}_z, \qquad A_z^5 = A_z.$$

Płynie stąd następujący wniosek

$$A_z^{2k} = (-1)^k \mathbf{1}_z, \qquad\qquad A_z^{2k+1} = (-1)^k A_z.$$

Wstawiając te wyrażenia do (2.6) uzyskujemy

$$O(\varphi\vec{e}_z) = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} \mathbf{1}_z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} A_z =$$

$$= \mathbf{1} - \mathbf{1}_z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} \mathbf{1}_z + \sin\varphi\, A_z =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem rzeczywiście $O(\varphi\vec{e}_z)$ jest macierzą obrotu wokół osi $\vec{e}_z$ o kąt φ.

Ze względu na relację (2.3) macierze antysymetryczne 3×3 nazywamy *generatorami (grupy) obrotów*.

Wzór (2.3) pokazuje, jak z generatora otrzymać obrót. Z kolei przejście od obrotów do generatorów można opisać następująco: niech różniczkowalne odwzorowanie $\lambda \mapsto O(\lambda)$, gdzie λ jest liczbą rzeczywistą należącą do pewnego przedziału zawierającego 0, spełnia warunek $O(0) = \mathbf{1}$ (przykładem takiego odwzorowania jest $\lambda \mapsto \exp(\Phi\lambda)$, gdzie Φ jest dowolną macierzą antysymetryczną). Różniczkując po λ w $\lambda = 0$ obie strony równania (patrz (2.2))

$$\sum_{ij} \delta_{kl} O_{ki}(\lambda) O_{lj}(\lambda) = \delta_{ij}$$

otrzymujemy

$$\sum_{ij} \delta_{kl} O'_{ki} \delta_{lj} + \sum_{ij} \delta_{kl} \delta_{ki} O'_{lj} = 0,$$

gdzie prim oznacza pochodną po λ w $\lambda = 0$. W konsekwencji,

$$O'_{ji} + O'_{ij} = 0,$$

co oznacza, że pochodna O' rozważanego odwzorowania w $\lambda = 0$ jest macierzą antysymetryczną, czyli generatorem obrotów.

Zauważmy teraz, że kombinacja liniowa macierzy antysymetrycznych Φ, Ψ jest macierzą antysymetryczną:

$$(a\Phi + b\Psi)_{ij} = a\Phi_{ij} + b\Psi_{ij} = -a\Phi_{ji} - b\Psi_{ji} = -(a\Phi + b\Psi)_{ji},$$

co oznacza, że generatory obrotów tworzą przestrzeń liniową. Dowolna antysymetryczna macierz 3×3 ma postać

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= a\Big(\sum_k \epsilon_{ikj} \vec{e}_{xk} \Big) + b\Big(\sum_k \epsilon_{ikj} \vec{e}_{yk} \Big) + c\Big(\sum_k \epsilon_{ikj} \vec{e}_{zk} \Big) \equiv aA_x + bA_y + cA_z, \quad (2.7)$$

co oznacza, że generatory A_x, A_y i A_z obrotów wokół osi zadanych odpowiednio przez $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$ tworzą bazę przestrzeni liniowej generatorów grupy obrotów, która to przestrzeń ma tym samym wymiar 3.

Ze wzoru (2.7) wynika także, że składowe dowolnej antysymetrycznej macierzy 3×3 dają się przedstawić w postaci

$$\sum_k \epsilon_{ikj}(a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z)_k = \sum_k \epsilon_{ikj}\varphi_k,$$

gdzie oznaczyliśmy $\vec{\varphi} \equiv a\vec{e}_x+b\vec{e}_y+c\vec{e}_z$. Wnioskujemy stąd, że $\exp(\Phi)$ od dowolnej macierzy antysymetrycznej Φ jest obrotem, czyli dowolna taka macierz jest generatorem obrotów.

Wiadomo, że iloczyn O_1O_2 macierzy obrotów O_1 i O_2 jest obrotem — iloczyn ten jest binarną operacją, która przeprowadza parę obrotów w inny obrót. Można tu postawić pytanie, czy istnieje binarna operacja na generatorach obrotów, która parze generatorów przypisuje inny generator.

Niech Φ i Ψ będą generatorami obrotów. Rozważmy odwzorowania $\lambda \mapsto \exp(\Phi\lambda)$ i $\xi \mapsto \exp(\Psi\xi)$ z $\mathbb{R}$ w grupę obrotów. Dowodzi się, że (i) $\exp(-\Phi\lambda)$ jest macierzą odwrotną do $\exp(\Phi\lambda)$ oraz że (ii) pochodna $\exp(\Phi\lambda)$ po λ jest równa $\Phi\exp(\Phi\lambda) = \exp(\Phi\lambda)\Phi$. Wynika stąd, że dla każdego λ odwzorowanie

$$\xi \mapsto O(\xi) := \exp(\Phi\lambda)\exp(\Psi\xi)\exp(-\Phi\lambda)$$

spełnia warunek $O(0) = \mathbf{1}$ i w konsekwencji

$$\frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0} O(\xi) = \exp(\Phi\lambda)\Psi\exp(-\Phi\lambda)$$

jest dla każdego λ generatorem obrotów czyli macierzą antysymetryczną. A skoro tak, to pochodna po λ w $\lambda = 0$ prawej strony powyższego wzoru też jest macierzą antysymetryczną czyli generatorem obrotów:

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}(\exp(\Phi\lambda)\Psi\exp(-\Phi\lambda)) = \Phi\Psi - \Psi\Psi \equiv [\Phi, \Psi].$$

Widać z powyższego, że szukaną operacją binarną pomiędzy generatorami jest ich *komutator* $[\Phi, \Psi]$.

Przestrzeń liniowa generatorów grupy obrotów wraz z komutatorem tworzy strukturę zwaną *algebrą Liego (grupy obrotów)*.

Można pokazać, że

$$[A_i, A_j] = \sum_k \epsilon_{ijk}A_k, \tag{2.8}$$

gdzie oczywiście $A_x \equiv A_1$ itd.

Porównując wzór (2.1) z (2.8) dochodzimy do wniosku, że przestrzeń liniowa utworzona przez wszystkie kombinacje liniowe składowych momentu pędu

$$aL_1 + bL_2 + cL_3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

wraz z nawiasami Poissona tworzy algebrę Liego izomorficzną algebrze Liego grupy obrotów: izomorfizm ten zadany jest przyporządkowaniem

$$L_i \mapsto A_i.$$

Zauważmy, że kombinację liniową (2.9) możemy rozumieć jako iloczyn skalarny $\vec{L} \circ \vec{\varphi}$ momentu pędu $\vec{L}$ z wektorem $\vec{\varphi}$ o składowych $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (a, b, c)$. Obliczmy teraz nawias Poissona iloczynu $-\vec{L}\circ\vec{\varphi}$ ze składową x_l wektora wodzącego $\vec{x}$ punktu materialnego P:

$$\{-\vec{L}\circ\vec{\varphi}, x_l\} = -\sum_{ijk}\{\epsilon_{ijk}x_j p_k\varphi_i, x_l\} = -\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\varphi_i x_j\{p_k, x_l\} = \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\varphi_i x_j\delta_{kl} =$$
$$= \sum_{ij}\epsilon_{ijl}\varphi_i x_j = \sum_{ij}\epsilon_{lij}\varphi_i x_j = \sum_{j}\Big(\sum_{i}\epsilon_{lij}\varphi_i\Big)x_j = \sum_{j}\Phi_{lj}x_j.$$

Płynie stąd wniosek, że iloczyn skalarny $-\vec{L}\circ\vec{\varphi}$ działając przy pomocy nawiasów Poissona na składowe wektora $\vec{x}$ odtwarza wynik $\Phi\vec{x}$ działania generatora Φ na wektor $\vec{x}$.

$\square$