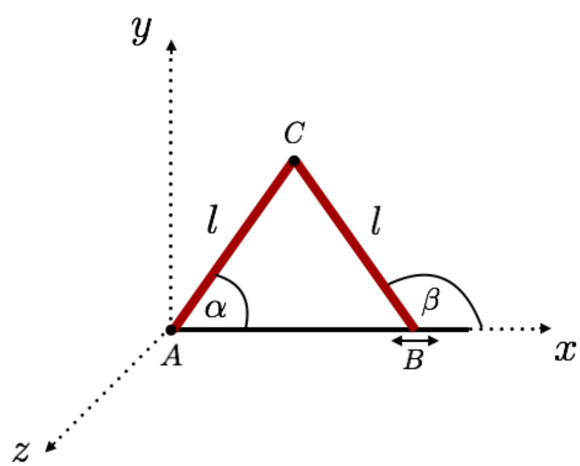
Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

Zadania na ćwiczenia - seria 8.
4 maja 2020 r.

Zadania przykładowe

Przykład 1.
Znaleźć energię kinetyczną układu dwóch połączonych przegubowo prętów o masie m i długości l każdy. Koniec lewego pręta jest unieruchomiony w punkcie A, a koniec B prawego pręta może tylko przesuwać się po ustalonej prostej przechodzącej przez punkt A (Rys 1).



Rysunek 1

Rozwiązanie
W zadaniu mamy do czynienia z układem składającym się z dwóch podukładów, z których każdy ma niezależny wkład do całkowitej energii kinetycznej, którą szukamy. Oznacza to, że:

$$T = T_{AC} + T_{CB}, \tag{1}$$

gdzie T_AC to wkład od energii pochodzący od pręta AC a T_CB od pręta CB. Trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym, a zatem relacja między kątami α i β jest natępująca:

$$\alpha = \pi - \beta, \tag{2}$$

wynika stąd, że układ ma jeden stopień swobody. Do opisu ruchu bryły sztywnej wygodnie posługiwać się dwoma układami współrzędnych 1) nieruchomy (zwykle inercjalny) związany z układem odniesienia używanym do opisu ruchu o początku $\mathcal{O}$ oraz 2) ruchomy związany z bryłą sztywną o początku $\mathcal{O}'$. Ogólny wzór na energię kinetyczną wynosi:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_0^2 + M\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}') + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{I}' \cdot \boldsymbol{\omega}), \tag{3}$$

gdzie: M jest masą bryły; $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$; $\boldsymbol{\omega}$ prędkością kątową, z jaką bryła obraca się wokół osi przechodzącej przez $\mathcal{O}'$; $\mathbf{R}'$ wektorem idącym od punktu $\mathcal{O}'$ do środka masy bryły, a I' tensorem momentu bezwładności bryły względem $\mathcal{O}'$. Aby dobrze zrozumieć powyższy wzór i wszystkie jego wyrazy rozwiążemy zadanie na dwa sposoby.
W pierwszym przypadku układ w punkcie $\mathcal{O}'$ będzie się pokrywał z układem w $\mathcal{O}$ pokazanym na Rys. 1. Zauważmy, że w takim przypadku dla pręta AC otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= 0 \\
\mathbf{v}_0 &= 0 \\
\boldsymbol{\omega} &= \dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_z \\
\mathbf{R}' &= \frac{l}{2}\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{l}{2}\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_y.
\end{aligned}$$

W poprzedniej serii zadań ćwiczeniowych policzyliśmy moment bezwładności pręta liczony względem osi przechodzącej przez jego kraniec, który wyniósł $I'_{zz} = \frac{1}{3}ml^2$. Jesteśmy już gotowi, aby policzyć energię kinetyczną pręta AC:

$$T_{AC} = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \cdot \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{\alpha}^2. \tag{4}$$

Druga możliwość to umieszczenie środka układu primowanego w punkcie układu środka masy pręta, co daje:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_{CM} = \frac{l}{2}\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{l}{2}\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_y \\
\mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_{CM} = -\frac{l}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{l}{2}\dot{\alpha}\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_y \\
\boldsymbol{\omega} &= \dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_z \\
\mathbf{R}' &= 0 \\
I_{zz} &= \frac{1}{12}ml^2.
\end{aligned}$$

a zatem energia kinetyczna pierwszego pręta liczona w tym układzie wyniesie:

$$\begin{aligned}
T_{AC} &= \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{4}l^2\dot{\alpha} + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \cdot \frac{1}{12}ml^2 \\
&= \frac{1}{6}ml^2\dot{\alpha}^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Zgodnie z oczekiwaniami otrzymane wyniki są takie same. Zajmijmy się teraz prętem CB, licząc, ponownie w dwóch układach odniesienia, jego energię kinetyczną. Pierwszy przypadek rozważymy ruch pręta jako złożenie ruchu postępowego punktu B i obrotu wokół tego punktu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= 2l\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_x \\
\mathbf{v}_0 &= -2l\dot{\alpha}\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_x \\
\boldsymbol{\omega} &= -\dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_z \\
\mathbf{R}' &= -\frac{l}{2}\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{l}{2}\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_y.
\end{aligned}$$

Energia kinetyczna pręta CB wynosi:

$$\begin{aligned}
T_{CB} &= 2ml^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha - ml^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \cdot \frac{1}{3}ml^2 \\
&= ml^2\dot{\alpha}^2\left(\sin^2\alpha + \frac{1}{6}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Jeśli natomiast środek układu primowanego $\mathcal{O}'$ umieścimy w punkcie środka masy pręta CB otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_{CM} = \frac{3}{2}l\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{2}l\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_y \\
\mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_{CM} = -\frac{3}{2}l\dot{\alpha}\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{2}l\dot{\alpha}\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_y \\
\boldsymbol{\omega} &= -\dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_z \\
\mathbf{R}' &= 0,
\end{aligned}$$

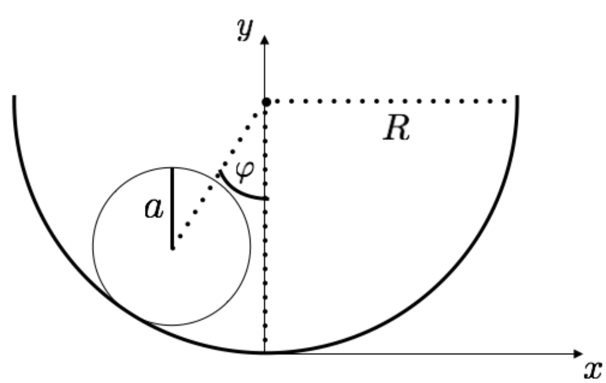
co daje:

$$\begin{aligned}
T_{CB} &= ml^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha + \frac{1}{8}ml^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\cdot\frac{1}{12}ml^2 \\
&= ml^2\dot{\alpha}^2\left(\sin^2\alpha + \frac{1}{6}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Ponownie otrzymane wyniki są ze sobą zgodne. Pozostaje nam dodać energie kinetyczne prętów, aby uzyskać całkowitą energię kinetyczną układu:

$$\begin{aligned}
T = T_{AC} + T_{CB} &= \frac{1}{6}ml^2\dot{\alpha}^2 + ml^2\dot{\alpha}^2\left(\sin^2\alpha + \frac{1}{6}\right) \\
&= ml^2\dot{\alpha}^2\left(\sin^2\alpha + \frac{1}{3}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Przykład 2.
Jednorodny walec o masie m i promieniu a toczy się w polu siły ciężkości wewnątrz walca o promieniu R. Znaleźć równanie ruchu walca wychylonego w chwili początkowej z położenia równowagi o kąt φ_0. Kiedy równanie można w prosty sposób rozwiązać?



Rysunek 2

Rozwiązanie
Układ ma jeden stopień swobody, a jako współrzędną uogólnioną wybierzemy kąt φ (Rys. 2). Położenie środka masy małego walca w układzie U wyraża się następująco:

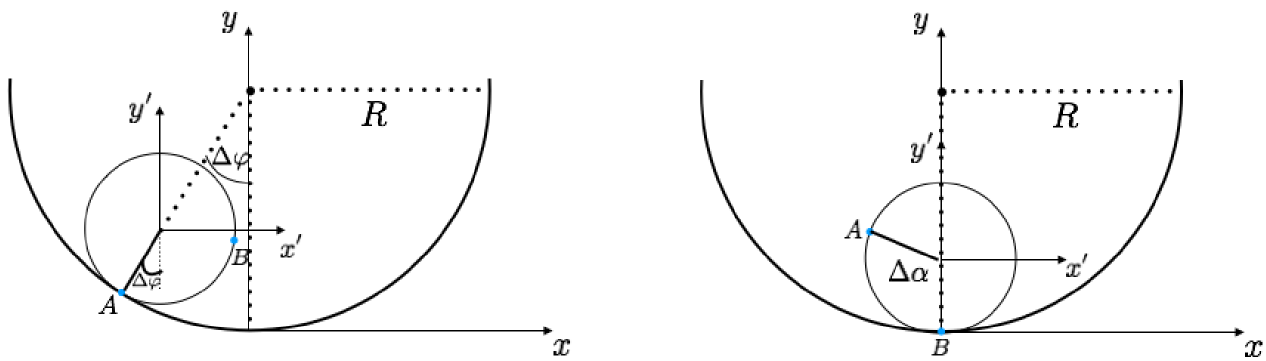
$$x_{CM} = -(R-a)\sin\varphi, \qquad y_{CM} = R - (R-a)\cos\varphi. \tag{9}$$

Biorąc pochodną po czasie obu stron powyższych równań, znajdujemy składowe prędkości środka masy w układzie nieprimowanym U:

$$\dot{x}_{CM} = -(R-a)\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad\qquad y_{CM} = (R-a)\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{10}$$

Zatem kwadrat prędkości środka masy wynosi:

$$\mathbf{v}_{CM}^2 = (R-a)^2\dot{\varphi}^2 \tag{11}$$



Rysunek 3

Aby policzyć energię kinetyczną musimy jeszcze znaleźć prędkość kątową małego walca. W tym celu rozważymy punkt styczności obu walców. Kiedy kąt φ zmieni się o $\Delta\varphi$ to punkt styczności przebędzie drogę $R\Delta\varphi$. Zwróćmy uwagę na to, że mały walec obróci się wtedy o kąt $\Delta\alpha$ **w stosunku do prostej, która łączyła jego środek i punkt styczności walców**. W związku z tym, że długości łuków opisanych przez kąty $\Delta\varphi$ i $\Delta\alpha$ są takie same, otrzymujemy następującą równość:

$$a\Delta\alpha = R\Delta\varphi. \tag{12}$$

W tym samym czasie układ odniesienia związany na sztywno z małym walcem dodatkowo obrócił się o kąt $\Delta\varphi$. Oznacza to, że w układzie środka masy w którym oś y_{CM} skierowana jest zawsze do góry (Rys. 3) mały walec obróci się o kąt $\Delta\alpha - \Delta\varphi$, co oznacza, że prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$ w tym układzie wyniesie:

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{\Delta\alpha - \Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{R-a}{a}\dot{\varphi}. \tag{13}$$

Wzór na energię kinetyczną w przypadku, kiedy środek układu U znajduje się w punkcie środka masy wynosi:

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{I}_{CM}\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\omega_z^2 I_{zz}, \tag{15}$$

gdzie moment bezwładności walca I_{zz} jest równy $\frac{1}{2}ma^2$ a składowa prędkości kątowej $\omega_z = -\frac{R-a}{a}\dot{\varphi}$. Otrzymujemy zatem:

$$T = \frac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\varphi}^2. \tag{16}$$

Energia potencjalna wynosi:

$$V = mgh = mg[R - (R-a)\cos\varphi]. \tag{17}$$

Lagranżjan przyjmuje postać:

$$L = T - V = \frac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\varphi}^2 - mg[R - (R-a)\cos\varphi]. \tag{18}$$

Przystąpimy teraz do wypisania równania Lagrange'a. W tym celu liczymy:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m(R-a)^2\dot{\varphi}, \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m(R-a)^2\ddot{\varphi}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(R-a)\sin\varphi. \tag{21}$$

Zatem równanie Lagrange'a ma postać:

$$0 = \frac{3}{2}m(R-a)^2\ddot{\varphi} + mg(R-a)\sin\varphi, \tag{22}$$

$$0 = \frac{3}{2}(R-a)\ddot{\varphi} + g\sin\varphi. \tag{23}$$

Równanie to możemy rozwiązać, kiedy amplituda drgań (φ_0) jest mała. Stosujemy wtedy przybliżenie $\sin\varphi \approx \varphi$ i w rezultacie otrzymujemy równanie oscylatora:

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-a)}\varphi, \tag{24}$$

a zatem częstość małych drgań wynosi $\sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$.

Przykład 3.
Bąk symetryczny swobodny. Znajdź ruch ciała, dla którego momenty bezwładności obliczone względem środka masy spełniają zależności: $I_x = I_y \neq I_z$, a ciało nie jest poddane działaniom żadnych sił.

Rozwiązanie
Ruch obrotowy odbywa się wokół nieruchomego punktu $\mathcal{O}'$, a zatem wybieramy układy współrzednych tak, że $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. Bąk ma trzy stopnie swobody, a zatem jako współrzędne uogólnione użyjemy kątów Eulera: θ, φ, ψ. Wypadkowy moment sił zewnętrznych względem początku $\mathcal{O}'$ układu odniesienia związanego z bąkiem wyraża się następująco (równania ruchu Eulera):

$$\mathbf{M}' = \mathbf{I}'\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}'\boldsymbol{\omega}, \tag{25}$$

ale w związku z tym, że na rozpatrywany układ nie działają siły zewnętrzne, lewa strona równania jest równa zeru: $\mathbf{M}' = 0$. Wybieramy osie układu primowanego wzdłuż osi głównych bezwładności, a zatem tensor momentu bezwładności będzie diagonalny. Równanie wektorowe [25] możemy zatem zapisać jako następujący układ trzech równań:

$$0 = I'_x\dot{\omega}'_x + \omega'_y\omega'_z(I'_z - I'_y), \tag{26}$$

$$0 = I'_y\dot{\omega}'_y + \omega'_x\omega'_z(I'_x - I'_z), \tag{27}$$

$$0 = I'_z\dot{\omega}'_z + \omega'_x\omega'_y(I'_y - I'_x). \tag{28}$$

Ze względu na symetrię $I'_x = I'_y$ ostatnie równanie sprowadza się do $I'_z \dot{\omega}'_z = 0$, skąd wynika, że $\omega'_z = \omega'_{z0} = \text{const}$. Pozostałe dwa równania możemy zapisać następująco:

$$0 = \dot{\omega}'_x - \frac{\omega'_{z0}(I'_x - I'_z)}{I'_x}\omega'_y, \tag{29}$$

$$0 = \dot{\omega}'_y + \frac{\omega'_{z0}(I'_x - I'_z)}{I'_x}\omega'_x. \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

W związku z tym, że czynnik stojący przy ω'_y (i ω'_x) jest stały, otrzymujemy:

$$0 = \dot{\omega}'_x - a\omega'_y, \tag{32}$$

$$0 = \dot{\omega}'_y + a\omega'_x, \tag{33}$$

gdzie wprowadziliśmy stałą a równą:

$$a = \frac{\omega'_{z0}(I'_x - I'_z)}{I'_x}. \tag{34}$$

Prędkość kątową w układzie primowanym wyrazić można przez kąty Eulera i ich pochodne w następujący sposób (notatki wykładowe):

$$\omega = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\hat{\mathbf{e}'}_x + (-\dot{\theta}\sin\Psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\hat{\mathbf{e}'}_y + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\mathbf{e}'}_z. \tag{35}$$

Różniczkując po czasie równanie [32] otrzymujemy:

$$0 = \ddot{\omega}'_x - a\dot{\omega}'_y, \tag{36}$$

$$0 = \dot{\omega}'_y + a\omega'_x, \tag{37}$$

Możemy teraz $\dot{\omega}'_y$ z drugiego równania podstawić do pierwszego co w rezultacie daje:

$$0 = \ddot{\omega}'_x + a^2\omega'_x. \tag{38}$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego jest nam dobrze znane:

$$\omega'_x = h\cos(at + \gamma), \tag{39}$$

gdzie h i γ są stałymi. Podstawiając otrzymany wynik do równania [32] uzyskujemy:

$$\omega'_y = -h\sin(at + \gamma). \tag{40}$$

Przyrównamy teraz wyrażenia na składowe prędkości kątowej, które uzyskaliśmy do tych wyrażonych przez kąty Eulera [35], w rezultacie:

$$\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi = h\cos(at + \gamma), \tag{41}$$

$$-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi = -h\sin(at + \gamma), \tag{42}$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \omega'_{z0}. \tag{43}$$

Korzystając zasady zachowania momentu pędu $\mathbf{L}$ możemy wybrać oś z tak, że $\mathbf{L} = L_z\hat{\mathbf{e}}_z$, gdzie $L_z = \text{const}$. W związku z tym, że $L'_z = \omega'_{z0}I'_z$ jest stała mamy:

$$\frac{L'_z}{L_z} = \cos\theta = \text{const}, \tag{44}$$

co oznacza, że θ nie zmienia się w czasie. W konsekwencji równania [41] i [42] uproszczą się i otrzymamy następujący układ równań:

$$\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi = h\cos(at+\gamma), \tag{45}$$

$$\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi = -h\sin(at+\gamma), \tag{46}$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \omega'_{z0}. \tag{47}$$

Dzieląc stronami równanie [45] przez [46] znajdujemy zależność kąta ψ od czasu:

$$\operatorname{tg}\psi = -\operatorname{ctg}(at+\gamma) \tag{48}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(at+\gamma-\frac{\pi}{2}) \tag{49}$$

$$\psi = at + \psi_0. \tag{50}$$

Otrzymany wynik podstawiamy do równania [47] i otrzymujemy:

$$\dot{\varphi} = \frac{w'_{z0} - a}{\cos\theta} \tag{51}$$

$$\varphi = \frac{w'_{z0} - a}{\cos\theta}t + \varphi_0 \tag{52}$$

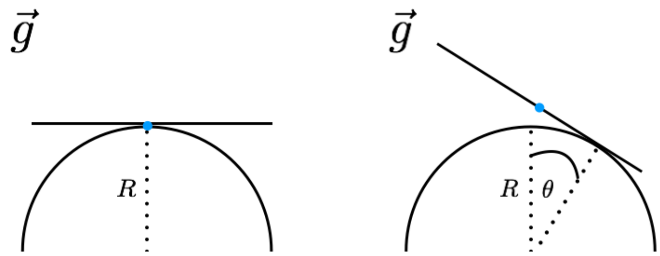
Widzimy zatem, że ruch swobodnego bąka symetrycznego względem nieprimowanego układu jest złożeniem dwóch ruchów obrotowych o stałych prędkościach kątowych:

$$\dot{\psi} = \frac{\omega'_{z0}(I'_x - I'_z)}{I'_x}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\omega'_{z0}I'_z}{I'_x\cos\theta}. \tag{53}$$

Ruch obrotowy o prędkości kątowa $\dot{\varphi}$ odbywa się wokół osi z zwróconej zgodnie z kierunkiem wektora $\mathbf{L}$, z kolei ruch o prędkość kątowej $\dot{\psi}$ wokół osi z' będącej osią symetrii bąka, która ma stały kierunek w układzie primowanym. Taki ruch bryły sztywnej nazywamy *precesją regularną*. Jest to ruch będący złożeniem dwóch ruchów obrotowych ze stałymi prędkościami kątowymi, z których jeden odbywa się wokół osi o stałym kierunku w układzie odniesienia, a drugi wokół osi o stałym kierunku w układzie bryły sztywnej.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Jednorodny pręt położono na półwalcowej podpórce w taki sposób, że gdy pręt leży poziomo, dotyka podpórki w połowie swojej długości l (Rys. 4). Wykazać, że położenie to jest położeniem równowagi trwałej i znaleźć częstość małych drgań wokół tego położenia równowagi.



Rysunek 4

Zadanie 2.
Jednorodny krążek o masie m i promieniu R toczy się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia α w jednorodnym polu grawitacyjnym Ziemi. Znaleźć lagranżjan układu i napisać równania Lagrange'a II rodzaju.

Zadanie 3.
Bąk symetryczny ciężki. Znajdź równania ruchu bąka o masie m i symetrii obrotowej ($I_x = I_y \neq I_z$), którego czubek jest przegubowo unieruchomiony w ustalonym punkcie płaszczyzny. Tym razem bąk znajduje się pod działaniem siły ciężkości. Zadanie rozwiązać zarówno posługując się równaniami Lagrange'a II rodzaju, jak i metodą "newtonowską".