Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

Zadania na ćwiczenia – seria 9.
11 maja 2020 r.

Zadania przykładowe

Przykład 1.
Zapisać Lagranżjan, Hamiltonian i równania Hamiltona we współrzędnych sferycznych (r, θ, φ) dla cząstki w polu siły centralnej.

Rozwiązanie.
Przypomnijmy na początku definicję współrzędnych sferycznych:

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta). \end{cases} \tag{P1.1}$$

Wzór na energię kinetyczną jest nam już znany; siła centralna jest w tym opisie funkcją jednej zmiennej r. Mamy zatem:

$$T = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\theta})^2}{2} + \frac{m(r\sin(\theta)\dot{\varphi})^2}{2}, \quad V = V(r) \tag{P1.2}$$

Korzystając definicji Lagranżjanu:

$$L = T - V \tag{P1.3}$$

wyznaczamy pędy uogólnione:

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi} \end{cases} \tag{P1.4}$$

Hamiltonian dany jest jako:

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L \overset{(*)}{=} 2T - L = T + V, \tag{P1.5}$$

gdzie równość $(*)$ zachodzi dlatego, że wszystkie wyrazy składające się na energię kinetyczną zawierają człon kwadratowy w prędkościach (nie zawsze tak będzie! – patrz przykład 3). Pisząc tego typu wyrażenia należy pamiętać, że Hamiltonian jest funkcją położeń, pędów (i ewentualnie czasu), więc musimy dokonać odpowiednich podstawień, aby wyrazić $H(r, p_r, \theta, p_\theta, \varphi, p_\varphi, t)$. Przekształcając równania (P1.4) wyrażamy odpowiednie prędkości jako:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2(\theta)}. \end{cases} \tag{P1.6}$$

Podstawiając powyższe do wzoru na energię kinetyczną otrzymujemy:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2(\theta)} + V(r). \tag{P1.7}$$

Dalej wypisujemy kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{cases} \tag{P1.8}$$

Można zauważyć, że trzy górne równania (na pochodne położeń) są dokładnie równoważne równaniom (P1.6). Trzy dolne równania musimy policzyć bezpośrednio. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2(\theta)} - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2 \cos(\theta)}{mr^2 \sin^3(\theta)} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2(\theta)} \\ \dot{p}_\varphi = 0 \end{cases} \tag{P1.9}$$

W ostatnim równaniu $\dot{p}_\varphi = 0$, po chwili zastanowienia, jesteśmy w stanie zobaczyć zasadę zachowania z-towej składowej wektora momentu pędu.

Przykład 2.
Używając nawiasów Poissona wykazać, że dla cząstki w polu siły centralnej długość wektora momentu pędu jest zachowana.

Rozwiązanie.
Na początku zwróćmy uwagę na pewien istotny aspekt dotyczący zachowania wartości wektorowych. Jeżeli dla jakiegoś układu wektor pędu $\vec{L}$ jest zachowany, możemy zapisać to następująco:

$$0 = \frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(L_x\hat{e}_x + L_y\hat{e}_y + L_z\hat{e}_z) = \dot{L}_x\hat{e}_x + \dot{L}_y\hat{e}_y + \dot{L}_z\hat{e}_z \Rightarrow \begin{cases} L_x = const. \\ L_y = const. \\ L_z = const. \end{cases} \tag{P2.10}$$

czyli każda składowa kartezjańska L_x, L_y, L_z jest z osobna zachowana. Sam wektor $\vec{L}$ możemy zapisać w dowolnych innych współrzędnych – np. sferycznych. Aczkolwiek wówczas sprawa wygląda nieco inaczej:

$$0 = \frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(L_r\hat{e}_r + L_\theta\hat{e}_\theta + L_\varphi\hat{e}_\varphi) = \dot{L}_r\hat{e}_r + L_r\dot{\hat{e}}_r + \dot{L}_\theta\hat{e}_\theta + L_\theta\dot{\hat{e}}_\theta + \dot{L}_\varphi\hat{e}_\varphi + L_\varphi\dot{\hat{e}}_\varphi. \tag{P2.11}$$

Widzimy, że w tym przypadku poszczególne składowe nie są zachowane (mimo, że cały wektor pozostaje stały), gdyż poza pochodnymi składowych pojawiają się również pochodne wersorów (wersor $\hat{e}_x$ zawsze pokazuje ten sam kierunek, niezależnie gdzie znajduje się dane ciało; z kolei kierunek wersora $\hat{e}_r$ zależy od aktualnego położenia, więc w ogólności zmienia się w czasie). W związku z tym przeprowadzanie tego typu rachunków wymagałoby jawnego rozpisania wyrazów $\dot{\hat{e}}_r, \dot{\hat{e}}_\theta, \dot{\hat{e}}_\varphi$ (czego wolelibyśmy uniknąć).

Z drugiej strony długość wektora momentu pędu jest **skalarem** ($L^2 = \vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_r^2 + L_\theta^2 + L_\varphi^2$). W związku z tym, rozważanie nie-kartezjańskich współrzędnych nie generuje tutaj tego typu trudności. W efekcie wygodnie będzie nam przeprowadzić rachunki właśnie we współrzędnych sferycznych. Wektory położenia i prędkości dane są jako:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r, \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi. \tag{P2.12}$$

Mamy zatem:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m \begin{bmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\sin(\theta)\dot{\varphi} \end{bmatrix} = -mr^2 \sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\hat{e}_\varphi. \tag{P2.13}$$

Czyli:

$$L^2 = \vec{L}^2 = m^2r^4(\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) \tag{P2.14}$$

Długość wektora (czyli L) jest równa pierwiastkowi z tego wyrażenia. Nam jednak wygodniej będzie operować na jej kwadracie L^2 – wszak jeśli wykażemy, że L^2 jest zachowane, oczywistym będzie, że również L pozostaje stałe.

Możemy w końcu przejść do formalizmu Hamiltonowskiego. Z poprzedniego zadania

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}. \end{cases} \tag{P2.15}$$

co pozwala nam zapisać L^2 jako funkcję odpowiednich współrzędnych:

$$L^2 = \left(\frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)} + p_\theta^2\right) \tag{P2.16}$$

Hamiltonian dany jest jako (również policzone w poprzednim zadaniu):

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2(\theta)} + V(r), \tag{P2.17}$$

Możemy teraz policzyć odpowiedni nawias Poissona:

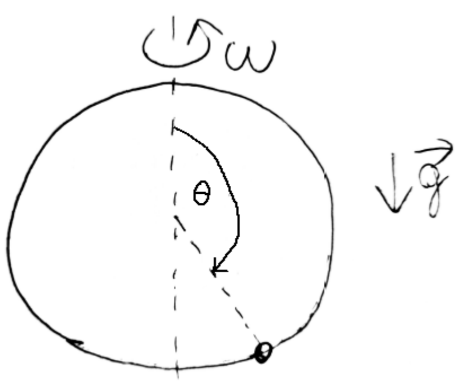
$$\{L^2, H\} = \frac{\partial L^2}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial L^2}{\partial p_r} + \frac{\partial L^2}{\partial \theta}\frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial L^2}{\partial p_\theta} + \frac{\partial L^2}{\partial \varphi}\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial H}{\partial \varphi}\frac{\partial L^2}{\partial p_\varphi} \tag{P2.18}$$

Ponieważ we wzorze na L^2 nie występują ani r ani p_r, możemy zignorować dwa pierwsze wyrazy. Obliczając bezpośrednim rachunkiem pozostałe cztery dochodzimy do wyniku:

$$\{L^2, H\} = 0, \tag{P2.19}$$

co potwierdza, że długość wektora momentu pędu jest zachowana.

Przykład 3.
Metalowa okrągła obręcz o promieniu R ustawiona pionowo obraca się wokół osi przechodzącej przez jej środek ze stałą prędkością kątową ω (tzn. wewnątrz koła oś pokrywa się z jego średnicą). Na obręcz nanizany jest koralik, który może swobodnie poruszać się wzdłuż obręczy. Całość dzieje się w polu grawitacyjnym $\vec{g}$. Zapisać Hamiltonian i równania Hamiltona dla tego układu.



Rozwiązanie.
Układ posiada jeden stopień swobody; sparametryzujmy go kątem θ wskazującym położenie koralika (mierzonym od góry). Prędkość koralika w dowolnym momencie posiada dwie składowe: wzdłuż obręczy $R\dot{\theta}$ oraz prostopadłą do niej (związaną z obrotem obręczy) $R\sin(\theta)\omega$. W związku z tym całkowita energia kinetyczna wynosi:

$$T = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mR^2\sin^2(\theta)\omega^2}{2} \tag{P3.20}$$

Lagranżjan:

$$L = T - V = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mR^2\sin^2(\theta)\omega^2}{2} - mgR\cos(\theta) \tag{P3.21}$$

Pęd uogólniony:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}. \tag{P3.22}$$

Hamiltonian:

$$\begin{aligned} H = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{mR^2\sin^2(\theta)\omega^2}{2} + mgR\cos(\theta) = \\ = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{mR^2\sin^2(\theta)\omega^2}{2} + mgR\cos(\theta) \end{aligned} \tag{P3.23}$$

(pamiętajmy, aby zawsze ostatecznie wyrazić Hamiltonian przez położenia i pędy, a nie prędkości!). Zauważmy, że w tym przypadku Hamiltonian **nie jest** postaci $T + V$ – przed członem odpowiedzialnym za energię kinetyczna związaną z ruchem obręczy widnieje minus. Jak ma się to do wiedzy przekazanej na wykładzie? Zauważmy, że warunek "koralik pozostaje całe czas na obręczy" jest równoważny z nałożeniem więzów, które we współrzędnych sferycznych przyjmują postać:

$$\begin{cases} r = R \\ \varphi = \varphi_0 + \omega t, \end{cases} \tag{P3.24}$$

a więc w ogólności są to więzy zależne jawnie od czasu (nie są skleronomiczne) – dla takiego przypadku równość $H = T + V$ nie zachodzi (gdyż nie wszystkie człony w wyrażeniu na energię kinetyczną są kwadratowymi funkcjami prędkości). Warto o tym pamiętać.

Pozostało nam wypisać jawnie równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \dot{p}_\theta = mR^2\sin(\theta)\cos(\theta)\omega^2 + mgR\sin(\theta) \end{cases} \tag{P3.25}$$

Zastanówmy się na koniec, czy otrzymane równania mają sens. Pochodna $\dot{\theta}$ jest proporcjonalna do pędu p_θ. Z kolei pochodna $\dot{p}_\theta$ jest sumą dwóch wyrazów: $mR^2\sin(\theta)\cos(\theta)\omega^2$ (w Newtonowskim rozumieniu odpowiadający sile odśrodkowej) oraz $mgR\sin(\theta)$ (związany z oddziaływaniem grawitacyjnym).

Pierwszy z nich ($mR^2\sin(\theta)\cos(\theta)\omega^2$) jest dodatni na przedziale $\theta \in]0, \pi/2]$ i ujemny na $]\pi/2, \pi[$. Ma to sens, gdyż dla $\theta \in]0, \pi/2]$ wzrost kąta θ wiążę się z oddalaniem od osi obrotu, natomiast dla $\theta \in]\pi/2, \pi[$ – ze zbliżaniem się do niej (analogicznie dla $]\pi, 3\pi/2[$ i $]3\pi/2, 2\pi[$).

Drugi wyraz $mgR\sin(\theta)$, związany z energią kinetyczną, ma znak dodatni dla $\theta \in]0, \pi[$ (tzn. dla zakresu, w którym zwiększanie kąta θ związane jest z obniżaniem się koralika) oraz ujemny dla $\theta \in]\pi, 2\pi[$. Można zatem powiedzieć, że wynik wygląda rozsądnie.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Zapisać Lagranżjan, Hamiltonian i równania Hamiltona we współrzędnych biegunowych (ρ, φ, z) dla cząstki poruszającej się w polu siły postaci $V(\rho)$ (odpowiada to np. ruchowi elektronu w polu nieskończenie długiego naładowanego pręta).

Rozwiązanie.
Przypomnijmy współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases} \tag{Z1.26}$$

Wartość energii kinetycznej wynosi:

$$T = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} \tag{Z1.27}$$

Intuicyjnie: składowe prędkości związane ze zmianą każdej ze współrzędnych z osobna – składowa radialna $\dot{\rho}$, składowa styczna do poziomego okręgu (o środku na osi z) $\rho\dot{\varphi}$ oraz składowa pionowa $\dot{z}$ – są wzajemnie prostopadłe, w związku z tym całkowita energia kinetyczna jest sumą trzech prostych wyrazów. Jeśli ta postać jest dla kogoś nieoczywista, zawsze można ją wyprowadzić podstawiając do $T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2}$ odpowiednie wyrażenia. Cały Lagranżjan przyjmuje postać:

$$L = T - V = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} - V(\rho) \tag{Z1.28}$$

Pędy uogólnione:

$$\begin{cases} p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \end{cases} \tag{Z1.29}$$

Hamiltonian:

$$H = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L \overset{(*)}{=} 2T - L = T + V, \tag{Z1.30}$$

gdzie ponownie przy przejściu $(*)$ korzystamy z faktu, że wszystkie wyrazy składające się na energię kinetyczną zawierają człon kwadratowy w prędkościach. Wyrażając wszystko przez położenia i pędy:

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} + V(\rho). \tag{Z1.31}$$

Kanoniczne równania Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} \\ \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} \end{cases} \tag{Z1.32}$$

przyjmują postać:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \\ \dot{p}_\rho = -\frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \\ \dot{p}_\varphi = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{z} = p_z \\ \dot{p}_z = 0 \end{cases} \tag{Z1.33}$$

Gorąco zachęcam do porównania tych wyników ze wzorami na wektor przyspieszenia zapisany we współrzędnych biegunowych (np. przykład 1 z "Zadania na ćwiczenia – seria 5"). Czy są Państwo w stanie zidentyfikować odpowiadające sobie wyrazy?

Zadanie 2.
Dowolną metodą policzyć nawias Poissona składowej x-owej momentu pędu z kwadratem jego długości $\{L^2, L_x\}$, np.:

- bezpośrednim rachunkiem.
- wykorzystując pokazaną na wykładzie zależność $\{L_x, L_y\} = L_z, \{L_y, L_z\} = L_x, \{L_z, L_x\} = L_y$ oraz ogólne własności nawiasów Poissona.

Wybór metody pozostawiam Państwu.

Rozwiązanie.

Przypomnijmy: nawias Poissona dwóch funkcji $f(q_1, q_2, ..q_d, p_1, p_2, ..., p_d, t)$, $g(q_1, q_2, ..q_d, p_1, p_2, ..., p_d, t)$ wyraża się jako:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}. \tag{Z2.34}$$

Wprost z tej definicji wynika (m.in.):

$$\begin{aligned} &(1) \quad \{f, g\} = -\{g, f\} \\ &(2) \quad \{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \\ &(3) \quad \{f_1 \cdot f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\} \end{aligned} \tag{Z2.35}$$

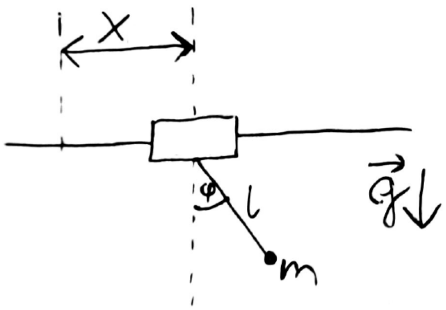
Korzystając z wiedzy, iż $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, możemy zatem zapisać:

$$\{L^2, L_x\} \overset{(2)}{=} \{L_x^2, L_x\} + \{L_y^2, L_x\} + \{L_z^2, L_x\} \overset{(3)}{=} 2L_x \underbrace{\{L_x, L_x\}}_{=0} + 2L_y \underbrace{\{L_y, L_x\}}_{=-L_z} + 2L_z \underbrace{\{L_z, L_x\}}_{=L_y} = 0, \tag{Z2.36}$$

gdzie "pod klamrami" wykorzystaliśmy cechę (1) oraz równości z treści zadania. Analogiczne rozumowanie można by przeprowadzić dla pozostałych składowych kartezjańskich.

Ten sam wynik można uzyskać bezpośrednim rachunkiem (przeprowadzonym np. we współrzędnych kartezjańskich albo sferycznych).

Zadanie 3.
Wzdłuż poziomej szyny porusza się klocek. Jego położenie dane jest wzorem $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ – jest ono "wymuszone" przez jakiś zewnętrzny mechanizm. Do klocka przyczepione jest sztywne wahadło o długości l i masie m (zatem układ posiada tylko jeden stopień swobody). Całość znajduje się w polu grawitacyjnym $\vec{g}$. Zapisać Hamiltonian i równania Hamiltona dla tego układu.



Rozwiązanie.
Układ posiada jeden stopień swobody, zatem ostatecznie do opisu wystarczy nam kąt φ. Jednak aby wyznaczyć wzór na energię kinetyczną, zacznijmy od wypisania współrzędnych kartezjańskich ciała m:

$$\begin{cases} x_m = x + l\sin(\varphi) = x_0\cos(\omega t) + l\sin(\varphi) \\ x_y = -l\cos(\varphi). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = -\omega x_0 \sin(\omega t) + l\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ \dot{x}_y = l\dot{\varphi}\sin(\varphi). \end{cases} \tag{Z3.37}$$

Stąd:

$$T = \frac{m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)}{2} = \frac{m}{2}(\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t) - 2\omega x_0 l\dot{\varphi}\sin(\omega t)\cos(\varphi) + l^2\dot{\varphi}^2) \tag{Z3.38}$$

Energia potencjalna grawitacji wyraża się jako $V = -mgl\cos(\varphi)$, zatem:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t) - 2\omega x_0 l\dot{\varphi}\sin(\omega t)\cos(\varphi) + l^2\dot{\varphi}^2) + mgl\cos(\varphi) \tag{Z3.39}$$

Ponieważ układ opisujemy jedną współrzędna uogólnioną, występuje tutaj tylko jeden pęd uogólniony:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -m\omega x_0 l \sin(\omega t)\cos(\varphi) + ml^2\dot{\varphi} \tag{Z3.40}$$

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{m}{2}(-\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t) + l^2\dot{\varphi}^2) - mgl\cos(\varphi). \tag{Z3.41}$$

Zauważmy, że w tym wypadku **nie zachodzi** równość $H = T + V$, gdyż mamy do czynienia z więzami nieskleronomicznymi (zależą jawnie od czasu). Dalej, wyrażając prędkość φ przez odpowiednie wyrażenie zależne od p_φ, dostajemy:

$$H = -\frac{m\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t)}{2} + \frac{(p_\varphi + m\omega x_0 l \sin(\omega t)\cos(\varphi))^2}{2ml^2} - mgl\cos(\varphi) \tag{Z3.42}$$

oraz kanoniczne równana Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi + m\omega x_0 l \sin(\omega t)\cos(\varphi)}{ml^2} \\ \dot{p}_\varphi = \frac{x_0}{l}\omega \sin(\omega t)\sin(\varphi)(p_\varphi + m\omega x_0 l \sin(\omega t)\cos(\varphi)) - mgl\sin(\varphi) \end{cases} \tag{Z3.43}$$

Warto na koniec sprawdzić, że dla przypadku $\omega = 0$ uzyskujemy standardowe równania statycznego wahadła.

Wojciech Górecki