Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 9
14 maja 2020

Zadanie 1. Krzywa geodezyjna jest punktem stacjonarnym funkcjonału długości. Znaleźć krzywe geodezyjne na sferze S o promieniu R. Pokazać, że poruszający się punkt materialny P przymuszony do pozostawania na sferze S i niepoddany działaniu innych sił, porusza się wzdłuż krzywej geodezyjnej z prędkością o stałej wartości.

Rozwiązanie. Rozważmy krzywą różniczkowalną χ

$$[a_1, a_2] \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Niech

$$\vec{\chi}(\lambda) = \frac{dx}{d\lambda}(\lambda)\vec{e}_x + \frac{dy}{d\lambda}(\lambda)\vec{e}_y + \frac{dz}{d\lambda}(\lambda)\vec{e}_z$$

będzie wektorem stycznym do krzywej χ w punkcie $\chi(\lambda)$. Będziemy zakładać, że w każdym punkcie krzywej wektor styczny jest niezerowy. Długość $|\chi|$ krzywej χ zdefiniowana jest wzorem

$$|\chi| := \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}\, d\lambda,$$

gdzie $\circ$ oznacza iloczyn skalarny.

Długość krzywej jest niezmiennicza względem reparametryzacji krzywej tzn. jeżeli

$$[b_1, b_2] \ni \tilde{\lambda} \mapsto \lambda = f(\tilde{\lambda}) \in [a_1, a_2]$$

jest różniczkowalną bijekcją o pochodnej wszędzie większej od zera to długość krzywej

$$[b_1, b_2] \ni \tilde{\lambda} \mapsto \tilde{\chi}(\tilde{\lambda}) := \chi(f(\tilde{\lambda})) = \begin{pmatrix} x(f(\tilde{\lambda})) \\ y(f(\tilde{\lambda})) \\ z(f(\tilde{\lambda})) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

jest równa długości krzywej χ (oczywiście obrazy krzywych $\tilde{\chi}$ i χ są identyczne tzn. obie krzywe wyznaczają ten sam podzbiór $\mathbb{R}^3$). Dla dowodu tego faktu zauważmy, że wektor styczny do $\tilde{\chi}$ w punkcie $\tilde{\chi}(\tilde{\lambda})$

$$\vec{\tilde{\chi}} = \frac{dx}{d\tilde{\lambda}}\vec{e}_x + \frac{dy}{d\tilde{\lambda}}\vec{e}_y + \frac{dz}{d\tilde{\lambda}}\vec{e}_z = \frac{dx}{d\lambda}\frac{df}{d\tilde{\lambda}}\vec{e}_x + \frac{dy}{d\lambda}\frac{df}{d\tilde{\lambda}}\vec{e}_y + \frac{dz}{d\lambda}\frac{df}{d\tilde{\lambda}}\vec{e}_z = \vec{\chi}\frac{df}{d\tilde{\lambda}}. \tag{1.1}$$

Korzystając z powyższego otrzymujemy

$$|\tilde{\chi}| = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{\vec{\tilde{\chi}} \circ \vec{\tilde{\chi}}}\, d\tilde{\lambda} = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}\, \frac{df}{d\tilde{\lambda}} d\tilde{\lambda}.$$

Zamiana zmiennych $\lambda = f(\tilde{\lambda})$ w ostatniej całce daje

$$|\tilde{\chi}| = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}\, d\lambda = |\chi|.$$

Istnieje naturalna parametryzacja krzywej χ — niech

$$[a_1, a_2] \ni \lambda \mapsto l := g(\lambda) = \int_{a_1}^{\lambda} \sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}\, d\lambda' \in [0, |\chi|]. \tag{1.2}$$

Powyższa funkcja jest bijekcją o dodatniej pochodnej

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}$$

w związku z czym funkcja

$$[0, |\chi|] \ni l \mapsto \lambda = f(l) = g^{-1}(l) \in [a_1, a_2]$$

zadaje poprawną reparametryzację krzywej χ do krzywej

$$[0, |\chi|] \ni l \mapsto \tilde{\chi}(l) := \chi(f(l)) \in \mathbb{R}^3.$$

Krzywa ta posiada następujące własności:

1. odległość pomiędzy punktem $\tilde{\chi}(0)$ a punktem $\tilde{\chi}(l)$ mierzona wzdłuż krzywej $\tilde{\chi}$ wynosi l;
2. dla każdego $l \in [0, |\chi|]$
$$\vec{\tilde{\chi}} \circ \vec{\tilde{\chi}} = 1.$$

W celu udowodnienia ostatniej własności zauważmy, że na mocy (1.1) dla każdego l zachodzi

$$\vec{\tilde{\chi}} = \vec{\chi}\frac{df}{dl} = \vec{\chi}\frac{1}{g'} = \frac{\vec{\chi}}{\sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}},$$

co automatycznie oznacza, że $\vec{\tilde{\chi}}$ jest wektorem unormowanym.

Wprowadzony wzorem (1.2) parametr l nazywamy *parametrem długości*.

Krzywa χ jest punktem stacjonarnym funkcjonału określonego na pewnym zbiorze krzywych zawierającym χ, jeżeli wariacja tego funkcjonału w χ jest równa 0. Funkcjonał długości D jest funkcjonałem zdefiniowanym na zbiorze krzywych określonych na ustalonym przedziale $[a_1, a_2]$ i łączących ustaloną parę punktów.

Możemy teraz przystąpić do rozwiązania zadania. W tym celu wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych (x, y, z) o początku w środku sfery S. Samą sferę sparametryzujemy za pomocą kątów (θ, φ) sferycznego układu współrzędnych

$$\begin{aligned} x &= R \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= R \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= R \cos\theta. \end{aligned}$$

Ustalmy teraz punkty p_1 i p_2 i rozważmy zbiór K krzywych na sferze o zaczynających się w p_1 i kończących się w p_2, czyli krzywych postaci

$$[a_1, a_2] \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda) = \begin{pmatrix} R\sin(\theta(\lambda))\cos(\varphi(\lambda)), \\ R\sin(\theta(\lambda))\sin(\varphi(\lambda)), \\ R\cos(\theta(\lambda)). \end{pmatrix} \in S, \quad \chi(a_i) = p_i. \tag{1.3}$$

i na tym zbiorze określmy funkcjonał długości

$$K \ni \chi \mapsto D[\chi] := \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}\, d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Dla krzywej (1.3)

$$\vec{\chi} = R(\theta' \cos\theta \cos\varphi - r\varphi' \sin\theta \sin\varphi)\vec{e}_x + R(\theta' \cos\theta \sin\varphi + r\varphi' \sin\theta \cos\varphi)\vec{e}_y - R\theta' \sin\theta \vec{e}_z,$$

gdzie prim oznacza pochodną po λ. Mamy stąd

$$\sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}} = R\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2} \equiv F(\theta, \varphi, \theta', \varphi'). \tag{1.4}$$

Zatem

$$D[\chi] = \int_{a_1}^{a_2} R\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}\, d\lambda = \int_{a_1}^{a_2} F(\theta, \varphi, \theta', \varphi')\, d\lambda.$$

Warunek stacjonarności funkcjonału

$$\delta D[\chi] = 0$$

jest równoważny równaniom Eulera-Lagrange'a (E-L)

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \theta'} - \frac{\partial F}{\partial \theta}, \qquad 0 = \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \varphi'} - \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \tag{1.5}$$

gdzie funkcja F dana jest wzorem (1.4). Równania te są równaniami różniczkowymi na funkcje

$$\lambda \mapsto \theta(\lambda), \qquad \lambda \mapsto \varphi(\lambda),$$

które w jednoznaczny sposób (patrz (1.3)) opisują krzywą na sferze S.

Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \theta'} &= R\frac{\theta'}{R\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}} = R\frac{\theta'}{F},\\
\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \theta'} &= R\frac{\theta''}{F} - R\frac{\theta' F'}{F^2},\\
\frac{\partial F}{\partial \theta} &= R\frac{\sin\theta \cos\theta \varphi'^2}{R\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}} = R\frac{\sin\theta\cos\theta\varphi'^2}{F}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \varphi'} &= R\frac{\sin^2\theta\, \varphi'}{R\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}} = R\frac{\sin^2\theta\, \varphi'}{F},\\
\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \varphi'} &= R\frac{2\sin\theta\cos\theta\, \theta'\varphi' + \sin^2\theta\, \varphi''}{F} - R\frac{\sin^2\theta\, \varphi' F'}{F^2},\\
\frac{\partial F}{\partial \varphi} &= 0.
\end{aligned}$$

Równania E-L (1.5) przyjmują więc postać

$$\begin{aligned} 0 &= R\frac{\theta''}{F} - R\frac{\theta' F'}{F^2} - R\frac{\sin\theta\cos\theta\varphi'^2}{F}, \\ 0 &= R\frac{2\sin\theta\cos\theta\,\theta'\varphi' + \sin^2\theta\,\varphi''}{F} - R\frac{\sin^2\theta\,\varphi' F'}{F^2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Otrzymaliśmy dość skomplikowane równania E-L i dlatego zanim powiemy cokolwiek o ich rozwiązaniach, dokonamy pewnego uproszczenia tych równań dokonując odpowiedniej reparametryzacji krzywej. W tym celu rozważmy krzywą $\chi \in K$ czyli krzywą postaci (1.3) i dokonajmy jej reparametryzacji za pomocą bijekcji $\lambda \mapsto \tilde{\lambda} = f(\lambda)$ z $[a_1, a_2]$ w siebie. W rezultacie otrzymamy krzywą $\tilde{\chi}$ będącą również elementem zbioru K. Co więcej, łatwo jest zauważyć, że odwzorowanie $\chi \mapsto \tilde{\chi}$ jest bijekcją z K w siebie. Ponieważ reparametryzacja nie zmienia długości krzywej, więc dla każdej krzywej $\chi \in K$

$$D[\chi] = D[\tilde{\chi}].$$

Jeśli rodzina $\epsilon \mapsto \chi_\epsilon$ jest rodziną krzywych w K użytą do zdefiniania wariacji funkcjonałów to

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} D[\chi_\epsilon] = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} D[\tilde{\chi}_\epsilon].$$

Wynika stąd, że warunki

$$\delta D[\chi] = 0, \qquad\qquad \delta D[\tilde{\chi}] = 0$$

są równoważne. Zatem krzywa χ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy geodezyjną jest krzywa $\tilde{\chi}$.

Przypuśćmy teraz, że krzywa $\chi \in K$ jest geodezyjną czyli, że spełnia równania (1.6). Sparametryzujmy krzywą χ za pomocą parametru

$$\tilde{\lambda} := \frac{a_2 - a_1}{|\chi|} l + a_1,$$

gdzie l jest parametrem długości wzdłuż χ. Otrzymana w rezultacie krzywa $\tilde{\chi}$ jest nadal elementem K. Co więcej, dla tej krzywej funkcja

$$F \equiv \sqrt{\vec{\tilde{\chi}} \circ \vec{\tilde{\chi}}} = \frac{|\chi|}{a_2 - a_1},$$

co oznacza, że F jest stała wzdłuż $\tilde{\chi}$ i w konsekwencji $F' = 0$. Widać więc, że dla krzywej $\tilde{\chi}$ równania (1.6) upraszczają się do równań

$$\begin{aligned} 0 &= \theta'' - \sin\theta\cos\theta\,\varphi'^2, \\ 0 &= 2\sin\theta\cos\theta\,\theta'\varphi' + \sin^2\theta\,\varphi''. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Podkreślmy, że dokonując tego uproszczenia nie tracimy wcale na ogólności, ponieważ odpowiedniej reparametryzacji możemy dokonać dla każdej krzywej geodezyjnej tak, aby otrzymać równania (1.7), a po ich rozwiązaniu przy tej szczególnej parametryzacji możemy dokonać dowolnej reparametryzacji wyniku.

Równania (1.7) są wciąż zbyt skomplikowane, aby w prosty sposób znaleźć ich ogólne rozwiązanie. Przypuśćmy jednak, że punkty p_1 i p_2 wyznaczające początek i koniec krzywych w K leżą na "równiku" sfery danym warunkiem $\theta = \pi/2$, a ich współrzędna φ

przyjmuje wartości, odpowiednio, φ_1 i φ_2. Wtedy szukana geodezyjna opisana jest funkcjami

$$\lambda \mapsto \theta(\lambda) = \frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \lambda \mapsto \varphi(\lambda) = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)\lambda + \varphi_1 a_2 - \varphi_2 a_1}{a_2 - a_1}.$$

Płynie stąd prosty wniosek, jeżeli punkty p_1 i p_2 mają współrzędną $\theta = \pi/2$ to geodezyjna je łącząca jest łukiem "równika" czyli koła wielkiego przechodzącego przez punkty p_1 i p_2. Oczywiście, każdy łuk "równika" jest geodezyjną.

Łatwo zauważyć, że powyższy wynik można uogólnić na przypadek dowolnej pary punktów $p_1 \neq p_2$: dla każdej takiej pary zawsze można tak wybrać układ współrzędnych (x, y, z), że oś OZ jest prostopadła do promieni sfery S wychodzących z punktów p_1 i p_2. Wtedy współrzędna θ zadana przez tak wybrany układ kartezjański ma wartość $\pi/2$ w obu punktach p_1 i p_2.

Tym samym udowodniliśmy następujący fakt: krzywa χ na sferze jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy jest łukiem koła wielkiego.

Rozważmy teraz punkt materialny P poruszający się po sferze S przy braku sił innych niż siły reakcji utrzymujące ten punkt na sferze. Lagranżjan tego punktu będzie zawierał tylko człon energii kinetycznej:

$$L(\theta, \varphi, \dot\theta, \dot\varphi) = \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{m}{2}(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\, \dot\varphi^2).$$

Wynikają zeń następujące równania ruchu:

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot\theta - m \sin\theta \cos\theta\, \dot\varphi^2, \\ 0 &= 2m \sin\theta \cos\theta\, \dot\theta \dot\varphi + m \sin^2\theta\, \ddot\varphi. \end{aligned}$$

Jak widać, równania ruchu punktu P są tożsame z równaniami (1.7) opisującymi krzywą geodezyjną na sferze. Torem ruchu tego punktu jest więc geodezyjna.

Energia całkowita punktu P, równa jego energii kinetycznej, jest stała w czasie, ponieważ siły reakcji sfery nie wykonują pracy. Zatem wartość prędkości punktu P nie zmienia się w czasie. $\square$