Mechanika i STW
Ćwiczenia nr 10
18 maja 2020

Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 1. Niech
$$S = \int_0^T L\,dt \tag{1.1}$$
będzie działaniem dla punktu materialnego P o masie m poruszającego się w polu jednorodnej stałej w czasie siły grawitacji $\vec{F}_G$. Niech (x, y, z) będzie kartezjańskim układem współrzędnych dobranym tak, że $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_z$, gdzie $g > 0$ jest stałą. Działanie to ograniczone do zbioru ruchów postaci
$$[0, T] \ni t \mapsto \vec{x}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_\alpha(t) \\ y_\alpha(t) \\ z_\alpha(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{2}T^2(t/T)^\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \tag{1.2}$$
gdzie $\alpha > 1$ parametryzuje zbiór ruchów, staje się funkcją od parametru α. Pokazać, że funkcja ta ma minimum w punkcie $\alpha = 2$, czyli dla wartości parametru opisującej ruch rzeczywisty.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że dla każdego α
$$\vec{x}_\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_\alpha(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{2}T^2. \end{pmatrix}$$
Zatem wszystkie ruchy (1.2) mają wspólny początek w chwili $t = 0$ i wspólny koniec w chwili $t = T$.

Lagranżjan punktu materialnego P ma postać
$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$
Dla ruchu postaci (1.2)
$$\dot{z}_\alpha = -\frac{g}{2}T^2\alpha(t/T)^{\alpha-1}\frac{1}{T} = -\frac{g}{2}T\alpha(t/T)^{\alpha-1}$$
i
$$L(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, \dot{x}_\alpha, \dot{y}_\alpha, \dot{z}_\alpha) = \frac{mg^2}{8}T^2\alpha^2(t/T)^{2(\alpha-1)} + \frac{mg^2}{2}T^2(t/T)^\alpha$$
Działanie (1.1) ograniczone do zbioru ruchów (1.2) będzie funkcją od parametru α postaci
$$S(\alpha) = \int_0^T \Big(\frac{mg^2}{8}T^2\alpha^2(t/T)^{2(\alpha-1)} + \frac{mg^2}{2}T^2(t/T)^\alpha\Big)\,dt = \left\{\begin{matrix} u = t/T \\ du = dt/T \end{matrix}\right\} =$$
$$= \int_0^1 \Big(\frac{mg^2}{8}T^2\alpha^2u^{2(\alpha-1)} + \frac{mg^2}{2}T^2u^\alpha\Big)T\,du =$$
$$= \frac{mg^2T^3}{2}\Big(\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{2\alpha-1}u^{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}\Big)\Big|_0^1 = \frac{mg^2T^3}{2}\Big(\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha+1}\Big).$$

Należy teraz pokazać, że funkcja $S(\alpha)$ ma minimum w $\alpha = 2$. Pochodna tej funkcji ma postać

$$S'(\alpha) = \frac{mg^2T^3}{2}\Big(\frac{1}{2}\frac{\alpha^2-\alpha}{(2\alpha-1)^2} - \frac{1}{(\alpha+1)^2}\Big) \overset{\alpha=2}{=} 0,$$

zaś druga pochodna

$$S''(\alpha) = \frac{mg^2T^3}{2}\Big(\frac{1}{2}\frac{(2\alpha-1)^2-4\alpha(\alpha-1)}{(2\alpha-1)^3} + \frac{2}{(\alpha+1)^3}\Big) \overset{\alpha=2}{=} \frac{mg^2T^3}{2}\frac{5}{54} > 0.$$

Skoro pierwsza pochodna funkcji $S(\alpha)$ zeruje się w $\alpha = 2$, a druga pochodna w tym punkcie jest dodatnia, to funkcja ta ma w punkcie $\alpha = 2$ (lokalne) minimum. □

Zadanie 2. Warstwa śniegu zalegająca na płaszczyźnie XOY ma grubość opisaną wszędzie dodatnią funkcją $h(x/a)$, gdzie a jest stałą dodatnią o wymiarze długości. Znaleźć funkcjonał, który ścieżce o bardzo małej szerokości ϵ ($\epsilon/a \ll 1$) łączącej ustalone punkty p_0 i p_1 przyporządkowuje objętość zalegającego nań śniegu. Jaki warunek musi spełniać funkcja h, aby odcinek prostej pomiędzy punktami p_0 i p_1 o tej samej wartości współrzędnej x, był punktem stacjonarnym wspomnianego funkcjonału? Czy w tej sytuacji odcinek ten jest zawsze globalnym minimum tego funkcjonału?

Rozwiązanie. Rozważmy zbiór K złożonych z krzywych postaci

$$[0,1] \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \chi(0) = p_0, \quad \chi(1) = p_1$$

opisujących kształt ścieżek łączących punkty p_0 i p_1. Objętość dV śniegu zalegającego na ścieżce o długości dl wynosi

$$dV = \epsilon h\, dl,$$

zaś

$$dl = \sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}\, d\lambda = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\lambda,$$

gdzie $\vec{\chi}$ jest wektorem stycznym do krzywej χ, a prim oznacza pochodną po λ. Zatem objętość śniegu leżącego na ścieżce biegnącej wzdłuż krzywej χ jest zadana funkcjonałem

$$K \ni \chi \mapsto V[\chi] = \int_0^1 \epsilon h(x/a)\sqrt{x'^2+y'^2}\, d\lambda \equiv \int_0^1 F(x,y,x',y')\, d\lambda \geq 0. \tag{2.1}$$

Warunek stacjonarności funkcjonału V jest równoważny równaniom Eulera-Lagrange'a

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \tag{2.2}$$

(z funkcją F daną wzorem (2.1)) na funkcje

$$\lambda \mapsto x(\lambda), \qquad \lambda \mapsto y(\lambda),$$

które w jednoznaczny sposób opisują krzywą χ. Mamy

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial x'} = \Big(\frac{\epsilon h x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\Big)', \qquad \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial y'} = \Big(\frac{\epsilon h y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\Big)', \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \epsilon\frac{dh}{dx}\sqrt{x'^2+y'^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{2.4}$$

Niech $p_0 = (x_0, y_0)$, a $p_1 = (x_0, y_1)$, gdzie $y_1 > y_0$. Znajdziemy teraz warunek na funkcję h, przy którym odcinek linii prostej $x = x_0$ łączącej punkty p_0 i p_1 jest punktem stacjonarnym funkcjonału V. Jeśli odcinek ten sparametryzujemy jak następuje:

$$[0,1] \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ (y_1 - y_0)\lambda + y_0 \end{pmatrix} =\in \mathbb{R}^2, \tag{2.5}$$

to

$$x' = 0, \qquad\qquad y' = \text{const.} \qquad\qquad h' = \frac{dh}{dx}\frac{x'}{a} = 0$$

i w konsekwencji zerują się wszystkie wyrazy (2.3) i drugi wyraz (2.4). Pierwszy wyraz (2.4) przyjmuje postać

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(\lambda), y(\lambda)) = \epsilon \frac{dh}{dx}\Big(\frac{x_0}{a}\Big)(y_1 - y_0).$$

Jedynym sposobem wyzerowania tego wyrazu jest wyzerowanie pochodnej funkcji h w punkcie x_0/a.

Rozważany tu odcinek prostej nie musi być jednak ścieżką łączącą ustalone powyżej punkty p_0 i p_1, na której zalega najmniejsza objętość śniegu. Może się bowiem zdarzyć, że mimo znikania pochodnej funkcji h w x_0/a funkcja ta jest w otoczeniu x_0/a malejąca — wystarczy przyjąć, że na pewnym otoczeniu punktu x_0 funkcja h ma postać

$$h(x/a) = h_0 - \Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^3, \quad h_0 > 0.$$

Co więcej, wybierając w powyższym wzorze dostatecznie małą wartość a można spowodować, że dla $0 < dx \ll y_1 - y_0$ będzie zachodzić

$$0 < h\big((x_0 + dx)/a\big) \ll h(x_0/a) = h_0.$$

Jeśli chcielibyśmy wykopać w śniegu korytarz łączący punkty p_0 i p_1, to zamiast usuwać grubszą warstwę śniegu z odcinka prostej $x = x_0$ bardziej opłacałoby się zrobić z punktu p_0 krótki przekop do prostej $x = x_0 + dx$ i odgarniając z niej cieńszą warstwę śniegu zbliżyć się do punktu p_1, po czym zrobić krótki przekop od tej prostej do p_1.

Widać stąd, że nawet jeśli odcinek prostej łączący punkty p_0 i p_1 jest lokalnym minimum funkcjonału $h(x/a)$ (czego nie udowodniliśmy), to może zdarzyć się, że na ścieżce niewiele różniącej się od niego zalega mniej śniegu.

□

Zadanie 3. Krzywa łańcuchowa Jaki kształt przyjmuje nierozciągliwa, jednorodna i doskonale wiotka lina zwisająca nieruchomo w polu jednorodnej stałej w czasie siły grawitacji? Przyjąć, że końce liny unieruchomione są w dwóch różnych punktach znajdujących się na tej samej wysokości.

Rozwiązanie. Wprowadźmy[1] kartezjański układ współrzędnych (x, y, z) tak, że przyspieszenie grawitacyjne ma postać $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, gdzie $g > 0$ jest stałą, a końce liny zamocowane

[1] Rozwiązanie pochodzi z wykładów z mechaniki klasycznej prof. A. Szymachy.

są w punktach $(\pm a, 0, 0)$, $(a > 0)$. W tej sytuacji nieruchoma lina będzie pozostawać w płaszczyźnie XOZ.

Kształt liny znajdziemy przyjmując, że energia potencjalna liny zwisającej nieruchomo w polu siły grawitacji jest minimalna. Kształt liny opiszemy funkcją

$$[-a, a] \ni x \mapsto \chi(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Energia potencjalna elementu długości dl liny o współrzędnej z wynosi $\rho gzdl$, gdzie ρ jest liniową gęstością (masy) liny. ρ jest tu wielkością stałą i równą M/L, gdzie M jest masą liny, a L jej długością. Ponieważ

$$dl = \sqrt{1 + z'^2}\, dx,$$

gdzie prim oznacza pochodną po x, więc energia potencjalna liny

$$V = \int_{-a}^{a} \rho g z(x) \sqrt{1 + z'^2}\, dx. \tag{3.1}$$

W celu rozwiązania problemu nie możemy jednak szukać kształtu liny minimalizującego powyższy funkcjonał, ponieważ lina jest nierozciągliwa i jej długość musi pozostawać stała, co oznacza, że krzywa χ musi spełniać dodatkowy warunek

$$D[\chi] := \int_{-a}^{a} \sqrt{\vec{\chi} \circ \vec{\chi}}\, d\lambda = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + z'^2}\, dx = L \geq 2a. \tag{3.2}$$

Musimy zatem znaleźć minimum funkcjonału (3.1) przy warunku (3.2).

W przypadku funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$, warunkiem koniecznym istnienia ekstremum warunkowego przy warunku $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ jest znikanie pochodnej funkcji $f - \lambda g$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest mnożnikiem Lagrange'a, w punkcie spełniającym warunek $g = 0$. Okazuje się, że analogiczna procedura działa również dla funkcjonałów. Zatem w naszym przypadku warunkiem koniecznym dla istnienia minimum funkcjonału (3.1) przy warunku (3.2) jest warunek stacjonarności funkcjonału $V - \lambda D$ przy spełnionym warunku (3.2), gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest mnożnikiem Lagrange'a.

Warunek stacjonarności funkcjonału

$$V - \lambda D = \rho g \int_{-a}^{a} (z(x) - \lambda) \sqrt{1 + z'^2}\, dx = \rho g \int_{-a}^{a} F(z, z')\, dx \tag{3.3}$$

ma postać równania Eulera-Lagrange'e

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial z} \tag{3.4}$$

nałożonego na funkcję $x \mapsto z(x)$. Nie będziemy jednakże korzystać bezpośrednio z tego równania, lecz posłużymy się pewną "wielkością zachowaną". Otóż funkcja F zdefiniowana wzorem (3.3) nie zależy jawnie od x, więc wielkość

$$\frac{\partial F}{\partial z'} z' - F = \frac{(z - \lambda)}{\sqrt{1 + z'^2}} z'^2 - (z - \lambda) \sqrt{1 + z'^2} = -C = \text{const.},$$

jest całką pierwszą równania (3.4) tzn. wielkość ta nie zależy od x (wielkość ta jest odpowiednikiem tzw. energii uogólnionej G, która jest zachowana, gdy lagranżjan nie zależy jawnie od czasu). Mamy stąd

$$(z-\lambda)\Big(\frac{z'^2}{\sqrt{1+z'^2}}-\sqrt{1+z'^2}\Big)=\frac{\lambda-z}{\sqrt{1+z'^2}}=-C.$$

Dla $C=0$ otrzymujemy $z(x)=\lambda=\text{const.}$. Zauważmy, że jedyna krzywa postaci $z=\text{const.}$ łącząca punkty zawieszenia liny to $z=0$. Rozwiązanie to jest dopuszczalne jedynie w przypadku gdy $L=2a$.

Jeśli $C\neq 0$ to

$$\frac{z-\lambda}{C}=\sqrt{1+z'^2}\geq 1 \tag{3.5}$$

i

$$\Big(\frac{z-\lambda}{C}\Big)^2-1=z'^2\geq 0.$$

Mamy tu dwie kolejne możliwości: $z'=0$ lub $z'\neq 0$. W pierwszym przypadku otrzymujemy $z(x)=C+\lambda=0$ (znów dla $L=2a$), a w drugim

$$\pm 1=\frac{z'}{\sqrt{(z-\lambda)^2/C^2-1}}.$$

Odcałkowując obie strony tego równania po x otrzymujemy

$$\pm(x-D)=\int\frac{dz}{\sqrt{(z-\lambda)^2/C^2-1}}=\left\{\begin{matrix}u=(z-\lambda)/C\\ C\,du=dz\end{matrix}\right\}=C\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=$$
$$=C\operatorname{ar\,cosh}(u)=C\operatorname{ar\,cosh}\Big(\frac{z-\lambda}{C}\Big),$$

gdzie $u\geq 1$ na mocy (3.5), a D jest stałą całkowania. Zatem

$$z(x)=\lambda+C\cosh\Big(\frac{x-D}{C}\Big)$$

(znak $-$ w argumencie cosinusa hiperbolicznego opuściliśmy, bo cosinus jest funkcją parzystą.) Uwzględniając punkty zaczepienia liny musi zachodzić

$$0=z(\pm a)=\lambda+C\cosh\Big(\frac{\pm a-D}{C}\Big).$$

Mamy stąd

$$\cosh\Big(\frac{a-D}{C}\Big)=\cosh\Big(\frac{-a-D}{C}\Big),$$

co może być spełnione jeśli $a-D=-a-D$ lub $a-D=-(-a-D)$. Pierwszy warunek oznacza $a=0$ wbrew założeniom, wobec czego musimy przyjąć drugi warunek, z którego wynika, że $D=0$. Wtedy

$$\lambda=-C\cosh\Big(\frac{a}{C}\Big)$$

i w konsekwencji

$$z(x)=C\Big(\cosh\Big(\frac{x}{C}\Big)-\cosh\Big(\frac{a}{C}\Big)\Big). \tag{3.6}$$

Warunek na nieokreśloną do tej pory stałą C wynika z równania (3.2):

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\sinh^2(x/C)}\,dx = \int_{-a}^{a} \cosh(x/C)\,dx = C\sinh(x/C)\Big|_{-a}^{a} = 2C\sinh(a/C). \tag{3.7}$$

Niestety, równania tego nie da się rozwiązać analitycznie. Tym niemniej należy sprawdzić, czy istnieją rozwiązania tego równania i w jakiej liczbie.

Natychmiast widać, że jeśli C jest rozwiązaniem (3.7) to rozwiązaniem jest również $-C$. Ale z postaci funkcji (3.6) wynika, że ujemna wartość C oznaczałaby, że lina pozostaje powyżej punktów zamocowania jej końców (cosinus hiperboliczny "garbem do góry"), a takie ustawienie z pewnością nie minimalizuje energii potencjalnej liny. Musimy zatem zażądać, aby $C > 0$. Wprowadźmy oznaczenie $\gamma = 1/C$. Wtedy równanie (3.7) przyjmuje postać

$$f(\gamma) \equiv L\gamma - 2\sinh(a\gamma) = 0.$$

Pozostaje więc sprawdzić, ile miejsc zerowych ma funkcja f na dodatniej półosi.

W oczywisty sposób, $\lim_{\gamma\to 0} f(\gamma) = 0$. Z drugiej strony,

$$\lim_{\gamma\to\infty} f(\gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} \Big[-2\sinh(a\gamma)\Big(1 - \frac{L\gamma}{2\sinh(a\gamma)}\Big)\Big] = -\infty,$$

ponieważ czynnik $L\gamma/(2\sinh(a\gamma))$ zbiega w nieskończoności do zera. Pochodna

$$f'(\gamma) = L - 2a\cosh(a\gamma)$$

ma jedno miejsce zerowe — ponieważ $L > 2a$ (przypadek $L = 2a$ ma miejsce wyłącznie dla rozwiązania $z(x) = 0$), więc jedynym rozwiązaniem równania $f'(\gamma) = 0$ na dodatniej półosi jest

$$\gamma_0 = \frac{1}{a}\operatorname{ar\,cosh}(L/2a).$$

Ponieważ $\lim_{\gamma\to 0} f'(\gamma) = L - 2a > 0$, więc funkcja f rośnie na przedziale $]0, \gamma_0[$ od zera w granicy $\gamma \to 0$ do maksymalnej dodatniej wartości w punkcie γ_0, a następnie maleje do "minus" nieskończoności. Oznacza to, że na osi dodatniej istnieje dokładnie jedno miejsce zerowe funkcji f.

Zatem istnieje dokładnie jedna para niezerowych liczb $\pm C$ będących rozwiązaniem równania (3.7).

Trzeba tu podkreślić, że rozwiązaliśmy wyłącznie warunek stacjonarności funkcjonału $V - \lambda D$. Pozostaje więc pytanie, które z rozwiązań (3.6) ze stałą C spełniającą warunek (3.7) opisuje kształt liny, dla którego jej energia potencjalna jest minimalna. Ponieważ warunek (3.7) ma dwa niezerowe rozwiązania różniące się znakiem, więc jest raczej oczywiste z fizycznego punktu widzenia, że

1. funkcja (3.6) z dodatnim rozwiązaniem warunku (3.7) opisuje linę zwisającą poniżej punktów zaczepienia, a zatem opisuje rozwiązanie minimalizujące energię potencjalną liny.

2. funkcja (3.6) z ujemnym rozwiązaniem warunku (3.7) opisuje linę ustawioną powyżej punktów zaczepienia, a zatem opisuje rozwiązanie maksymalizujące energię potencjalną liny.

□

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie S1. Niech

$$S = \int_{-T}^{T} L\,dt \tag{S1.1}$$

będzie działaniem dla punktu materialnego P o masie m i poddanego sile elastycznej postaci $\vec{F} = -k\vec{x}$, gdzie $k > 0$ jest stałą, a $\vec{x}$ jest wektorem wodzącym punktu P zaczepionym w początku kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y, z). W działaniu tym $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Działanie (S1.1) ograniczone do zbioru ruchów postaci

$$[-T, T] \ni t \mapsto \vec{x}_\omega(t) = \begin{pmatrix} x_\omega(t) \\ y_\omega(t) \\ z_\omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\cos(\omega t) - \cos(\omega T) + \cos(\sqrt{k/m}\,T)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\omega > 0$ parametryzuje zbiór ruchów, a A jest stałą, staje się funkcją od parametru ω. Sprawdzić, czy funkcja ta ma minimum w punkcie $\omega = \sqrt{k/m}$, czyli dla wartości parametru opisującej ruch rzeczywisty.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \omega_0.$$

Zachodzi

$$\omega_0 T = \sqrt{\frac{k}{m}} T = 2\pi$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} x_\omega(t) &= A(\cos(\omega t) - \cos(\omega T) + 1) \equiv A(\cos(\omega t) + f(\omega)), \\ \dot{x}_\omega(t) &= -A\omega\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{S1.2}$$

Mamy stąd następującą wartość lagranżjanu

$$\begin{aligned} L = \frac{m}{2}(\dot{x}_\omega^2 + \dot{y}_\omega^2 + \dot{z}_\omega^2) - \frac{k}{2}(x_\omega^2 + y_\omega^2 + z_\omega^2) = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t) - \frac{kA^2}{2}(\cos(\omega t) + f)^2 = \\ = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t) - \frac{kA^2}{2}(\cos^2(\omega t) + 2\cos(\omega t)f + f^2). \end{aligned}$$

Możemy teraz obliczyć działanie

$$\begin{aligned} S(\omega) = \int_{-T}^{T} L\,dt = \Big[\frac{mA^2\omega^2}{2}\Big(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\Big) - \\ - \frac{kA^2}{2}\Big(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t) + \frac{2}{\omega}\sin(\omega t)f + f^2 t\Big)\Big]\Big|_{-T}^{T} = \\ = \frac{A^2}{2}\Big[m\omega^2\Big(T - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T)\Big) - k\Big(T + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T) + \frac{1}{\omega}\sin(\omega T)f + 2f^2 T\Big)\Big] = \\ = \frac{A^2}{2}\Big[m\omega^2 T - \frac{m\omega}{2}\sin(2\omega T) - k\Big(\frac{1}{\omega}\Big(\frac{1}{2}\sin(2\omega T) + \sin(\omega T)f\Big) + 2f^2 T + T\Big)\Big] \end{aligned}$$

oraz jego pochodną po parametrze ω :

$$\frac{dS}{d\omega} = \frac{A^2}{2}\Big[2m\omega T - \frac{m}{2}\sin(2\omega T) - m\omega T\cos(2\omega T) - k\Big(- \frac{1}{\omega^2}\Big(\frac{1}{2}\sin(2\omega T) + \sin(\omega T)f\Big) + \\ + \frac{1}{\omega}\Big(T\cos(2\omega T) + T\cos(\omega T)f + \sin(\omega T)f'\Big) + 4ff'T\Big)\Big]$$

Dla funkcji f danej wzorem (S1.2) zachodzi:

$$f(\omega_0) = 0, \qquad f' \equiv \frac{df}{d\omega} = T\sin(\omega T), \qquad f'(\omega_0) = 0.$$

Wzory te pozwalają nam policzyć wartość pochodnej działania w $\omega = \omega_0$:

$$\frac{dS}{d\omega}(\omega_0) = \frac{A^2}{2}\Big[4\pi m - 2\pi m - \frac{k}{\omega_0}T\Big] = \frac{A^2}{2}\Big[2\pi m - \frac{k}{\omega_0^2}\omega_0 T\Big] = \frac{A^2}{2}\Big[2\pi m - 2\pi\frac{k}{k/m}\Big] = 0.$$

Druga pochodna działania po parametrze ω:

$$\frac{d^2S}{d\omega^2} = \frac{A^2}{2}\Big[2mT - 2mT\cos(2\omega T) + 2m\omega T^2\sin(2\omega T) - k\Big(\frac{2}{\omega^3}\Big(\frac{1}{2}\sin(2\omega T) + \sin(\omega T)f\Big) + \\ - \frac{2}{\omega^2}\Big(T\cos(2\omega T) + T\cos(\omega T)f + \sin(\omega T)f'\Big) + \\ + \frac{1}{\omega}\Big(- 2T^2\sin(2\omega T) - T^2\sin(\omega T)f + 2T\cos(\omega t)f' + \sin(\omega T)f''\Big) + 4(f')^2T + 4ff''T\Big)\Big], \tag{S1.3}$$

gdzie

$$f'' \equiv \frac{d^2f}{d\omega^2}.$$

Po podstawieniu do (S1.3) $\omega = \omega_0$ większość składników po prawej stronie tego wzoru zeruje się i

$$\frac{d^2S}{d\omega^2}(\omega_0) = \frac{A^2}{2}\Big[2mT - 2mT - k\Big(- \frac{2}{\omega_0^2}T\Big)\Big] = \frac{A^2kT}{\omega_0^2} > 0.$$

Pokazaliśmy, że pierwsza pochodna funkcji $\omega \mapsto S(\omega)$ znika w ω_0 oraz, że druga pochodna tej funkcji w tym punkcie jest dodatnia. Oznacza to, że funkcja $S(\omega)$ ma w punkcie ω_0 minimum. □

Zadanie S2. Warstwa śniegu zalegająca na płaszczyźnie XOY dla $x > 0$ ma grubość opisaną funkcją $h(x) = a\sqrt{x}$, gdzie a jest stałą dodatnią. Skonstruować funkcjonał przypisujący krzywej $x \mapsto y(x)$ łączącej ustalone punkty $p_0 = (x_0, y_0)$ i $p_1 = (x_1, y_1)$, $0 < x_0 < x_1$, objętość śniegu zalegającego na ścieżce o bardzo małej szerokości ϵ ($\epsilon/a^2 \ll 1$) biegnącej wzdłuż tej krzywej. Znaleźć punkty stacjonarne tego funkcjonału.

Szkic rozwiązania. Funkcjonał przypisujący krzywej $x \mapsto y(x)$ objętość śniegu zalegającego na ścieżce biegnącej wzdłuż tej krzywej ma postać

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \epsilon a\sqrt{x}\sqrt{1 + y'^2}\,dx \equiv \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x)\,dx,$$

gdzie y' jest pochodną funkcji $x \mapsto y(x)$. Warunek stacjonarności funkcjonału:

$$0 = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\epsilon a\sqrt{x}y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Mamy stąd

$$\frac{\sqrt{x}y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha = \text{const.}.$$

Z powyższego otrzymujemy

$$\operatorname{sgn} y' = \operatorname{sgn} \alpha \tag{S2.1}$$

oraz

$$(x-\alpha^2)y'^2 = \alpha^2,$$

skąd wynika (wobec zakresu $[x_1, x_0]$ współrzędnej x), że

$$x_0 - \alpha^2 \geq 0. \tag{S2.2}$$

Wtedy

$$y' = \frac{\alpha}{\sqrt{x-\alpha^2}}.$$

Odcałkowując obie strony powyższego równania po x otrzymujemy

$$y(x) = \int \frac{\alpha}{\sqrt{x-\alpha^2}}\, dx = 2\alpha\sqrt{x-\alpha^2} + \beta,$$

gdzie β jest stałą całkowania.

Pozostaje teraz dobrać stałe α i β, tak aby

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1. \tag{S2.3}$$

W tym celu ustalmy $x_1 > x_0 > 0$. Mamy z (S2.3)

$$y_0 = 2\alpha\sqrt{x_0-\alpha^2} + \beta, \qquad y_1 = 2\alpha\sqrt{x_1-\alpha^2} + \beta. \tag{S2.4}$$

Odejmując od siebie stronami powyższe równania otrzymujemy

$$y_1 - y_0 = 2\alpha\big(\sqrt{x_1-\alpha^2} - \sqrt{x_0-\alpha^2}\big) \equiv f(\alpha). \tag{S2.5}$$

Z założenia $x_1 > x_0$ wynika, że

$$\sqrt{x_1-\alpha^2} - \sqrt{x_0-\alpha^2} > 0$$

i w konsekwencji

$$\operatorname{sgn}(y_1 - y_0) = \operatorname{sgn} \alpha. \tag{S2.6}$$

Mnożąc stronami równanie (S2.5) przez $\big(\sqrt{x_1-\alpha^2} + \sqrt{x_0-\alpha^2}\big)$ otrzymujemy

$$2\alpha(x_1 - x_0) = (y_1 - y_0)\big(\sqrt{x_1-\alpha^2} + \sqrt{x_0-\alpha^2}\big).$$

Podnieśmy teraz do kwadratu obie strony powyższego równania i pomnóżmy je przez $4\alpha^2$. Podobnie, podnieśmy do kwadratu obie strony równania (S2.5) i pomnóżmy je przez $(y_1 - y_0)^2$. Dodanie stronami tak otrzymanych równań daje

$$16\alpha^4(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^4 = 4\alpha^2(y_1-y_0)^2(2x_1 + 2x_0 - 4\alpha^2),$$

skąd mamy następujące równanie kwadratowe na α^2:

$$16[(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2]\alpha^4 - 8(y_1 - y_0)^2(x_1 + x_0)\alpha^2 + (y_1 - y_0)^4 = 0. \tag{S2.7}$$

Wyróżnik tego równania to

$$\begin{aligned}\Delta = 64(y_1 - y_0)^4(x_1 + x_0)^2 - 64[(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2](y_1 - y_0)^4 = \\ = 64(y_1 - y_0)^4(4x_1x_0 - (y_1 - y_0)^2)\end{aligned} \tag{S2.8}$$

Wyróżnik ten jest nieujemny, jeśli

$$(y_1 - y_0)^2 < 4x_1x_0. \tag{S2.9}$$

Mamy wtedy następujące rozwiązania na α^2:

$$\alpha_\pm^2 = \frac{\pm\sqrt{4x_1x_0 - (y_1 - y_0)^2} + (x_1 + x_0)}{4[(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2]}(y_1 - y_0)^2 \tag{S2.10}$$

— z (S2.8) wynika, że dla obu znaków $\pm$ prawa strona powyższego równania jest dodatnia.

Zatem cztery liczby

$$\Big\{ \pm\sqrt{\alpha_+^2}, \pm\sqrt{\alpha_-^2}\Big\}$$

są rozwiązaniami równania (S2.7). Jednakże nie każde z tych rozwiązań musi być rozwiązaniem wyjściowego równania (S2.5), ponieważ przy przejściu od równania (S2.5) do równania (S2.7) (i) podnosiliśmy stronami równania do kwadratu (co zazwyczaj skutkuje pojawieniem się dodatkowych rozwiązań nie spełniających równania wyjściowego) oraz (ii) usunęliśmy pierwiastki $\sqrt{x_1 - \alpha^2}$ i $\sqrt{x_0 - \alpha^2}$, w skutek czego lewa strona równania (S2.7) jest dobrze określona dla każdej $\alpha \in \mathbb{R}$, co oznacza, że rozwiązanie tego równania nie musi spełniać warunku (S2.2).

W celu znalezienia rozwiązań równania (S2.5) wśród znalezionych rozwiązań równania (S2.7) zbadamy przebieg funkcji $f(\alpha)$ tworzącej prawą stronę równania (S2.5). Funkcja ta określona jest dla $\alpha \in [-\sqrt{x_0}, \sqrt{x_0}]$ — zakres ten wynika z (S2.2). Mamy następujące wartości funkcji f na krańcach dziedziny:

$$f(\pm\sqrt{x_0}) = \pm 2\sqrt{x_0(x_1 - x_0)}. \tag{S2.11}$$

Pochodna

$$f'(\alpha) = 2\Big(\frac{x_1 - 2\alpha^2}{\sqrt{x_1 - \alpha^2}} - \frac{x_0 - 2\alpha^2}{\sqrt{x_0 - \alpha^2}}\Big).$$

Posiada ona miejsce zerowe, jeżeli

$$\frac{x_1 - 2\alpha^2}{\sqrt{x_1 - \alpha^2}} = \frac{x_0 - 2\alpha^2}{\sqrt{x_0 - \alpha^2}}. \tag{S2.12}$$

Podnosząc obie strony tego równania do kwadratu i wymnażając otrzymany wynik przez wyrażenia w mianownikach uzyskujemy

$$(x_1 - 2\alpha^2)^2(x_0 - \alpha^2) = (x_0 - 2\alpha^2)^2(x_1 - \alpha^2). \tag{S2.13}$$

Po wymnożeniu obu stron i redukcji identycznych składników po obu stronach równanie to upraszcza się znacząco do

$$x_0^2(x_1 - \alpha^2) = x_1^2(x_0 - \alpha^2),$$

co daje

$$\alpha^2 = \frac{x_0 x_1}{x_0 + x_1}. \tag{S2.14}$$

Jednakże to rozwiązanie równania (S2.13) nie jest rozwiązaniem równania wyjściowego (S2.12), o czym łatwo przekonać[2] się podstawiając (S2.14) do (S2.12).

Wynik ten oznacza, że pochodna funkcji f nie ma miejsc zerowych i w konsekwencji funkcja ta jest ściśle monotoniczna na całej dziedzinie. Biorąc pod uwagę (S2.11) wnioskujemy, że f jest funkcją ściśle rosnącą. Przy ustalonych $x_1 > x_0 > 0$ funkcja f jest zatem bijekcją z przedziału $[-\sqrt{x_0}, \sqrt{x_0}]$ na $[-2\sqrt{x_0(x_1 - x_0)}, 2\sqrt{x_0(x_1 - x_0)}]$. Płynie stąd wniosek, że równanie (S2.5) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(y_1 - y_0)^2 \leq (2\sqrt{x_0(x_1 - x_0)})^2 = 4x_0x_1 - 4x_0^2 \tag{S2.15}$$

— warunek ten nie jest silniejszy od warunku (S2.9) (tak jak powinno być). Co więcej, jeśli ten warunek jest spełniony, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (S2.5) — fakt ten wynika z bijektywności funkcji f.

Z bijektywności funkcji f wynika ponadto, że (przy ustalonych $x_1 > x_0 > 0$) zagadnienie rozwiązania równania (S2.5) jest równoważne zagadnieniu znalezienia funkcji odwrotnej do f — jest tak dlatego, ponieważ rozwiązanie równania (S2.5) daje się zapisać w postaci

$$\alpha = f^{-1}(y_1 - y_0).$$

Wnioskujemy stąd, że wartość rozwiązania czyli α zależy w sposób ciągły od różnicy $y_1 - y_0$. Rozwiązanie równania (S2.5) otrzymamy więc w oparciu o wartość α_+^2 albo w oparciu o wartość α_-^2 — są to jedyne możliwości otrzymania ciągłej zależności rozwiązania α od różnicy $y_1 - y_0$.

Z równania (S2.11) wynika, że jeżeli $(y_1 - y_0)^2 = 4x_0(x_1 - x_0)$, to kwadrat rozwiązania równania (S2.5) jest równy x_0. Podstawiając tą wartość $(y_1 - y_0)^2$ do (S2.10) otrzymujemy

$$\alpha_+^2 = x_0, \qquad \alpha_-^2 = \frac{x_1 - x_0}{3x_0 + x_1} x_0 < x_0.$$

Wynik ten oznacza, że rodzina rozwiązań równania (S2.7) postaci $\pm\sqrt{\alpha_-^2}$ nie zawiera rozwiązań równania (S2.5).

Zatem rozwiązaniem równania (S2.5) jest

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{sgn}(y_1 - y_0)\left(\frac{\sqrt{4x_1x_0 - (y_1 - y_0)^2} + (x_1 + x_0)}{4[(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2]}(y_1 - y_0)^2\right)^{1/2} = \\ &= (y_1 - y_0)\left(\frac{\sqrt{4x_1x_0 - (y_1 - y_0)^2} + (x_1 + x_0)}{4[(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2]}\right)^{1/2} = f^{-1}(y_1 - y_0)\end{aligned}$$

(czynnik $\operatorname{sgn}(y_1 - y_0)$ wynika tu z (S2.6)) przy dodatkowym warunku (S2.15).

Stałą β łatwo teraz wyznaczyć z któregokolwiek z równań (S2.4).

□

[2] Liczba (S2.14) jest rozwiązaniem równania

$$\frac{x_1 - 2\alpha^2}{\sqrt{x_1 - \alpha^2}} = -\frac{x_0 - 2\alpha^2}{\sqrt{x_0 - \alpha^2}},$$

które po podniesieniu stronami do kwadratu również daje równanie (S2.13).

Zadanie S3. Rozważmy powierzchnię walcową W zadaną warunkiem

$$x^2 + y^2 = r^2$$

($r > 0$ jest stałą) w pewnym kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y, z). Pokazać, że dla każdych stałych A i B krzywa

$$[a_1, a_2] \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\lambda, \\ r\sin\lambda \\ A\lambda + B \end{pmatrix} \in W \subset \mathbb{R}^3 \tag{S3.1}$$

jest krzywą geodezyjną na powierzchni W.

Szkic rozwiązania. Niech (ρ, φ, z) będzie układem współrzędnych walcowych powiązanym z układem (x, y, z) w standardowy sposób. Powierzchnia W w tym układzie zadana jest warunkiem $\rho = r$, a współrzędne (φ, z) tworzą układ współrzędnych na tej powierzchni.

Niech p_1, p_2 będą ustalonymi punktami powierzchni W. Zbiór K definiujemy jako zbiór wszystkich (dwukrotnie różniczkowalnych) krzywych postaci

$$[a_1, a_2] \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi(\lambda)), \\ r\sin(\varphi(\lambda)) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} \in W \subset \mathbb{R}^3, \quad \chi(a_i) = p_i,\ i = 1, 2.$$

Funkcjonał długości określony na zbiorze K ma postać

$$K \ni \chi \mapsto D[\chi] = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\lambda = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{r^2\varphi'^2 + z'^2}\, d\lambda \equiv$$
$$\equiv \int_{a_1}^{a_2} F(\varphi, z, \varphi', z', \lambda)\, d\lambda,$$

gdzie prim oznacza pochodną po λ.

Krzywa geodezyjna to punkt stacjonarny funkcjonału długości. Warunek stacjonarności ma postać równań Eulera-Lagrange'a nałożonych na funkcje $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ i $\lambda \mapsto z(\lambda)$:

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \varphi'} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{d}{d\lambda}\frac{r^2\varphi'}{\sqrt{r^2\varphi'^2 + z'^2}},$$
$$0 = \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{d}{d\lambda}\frac{z'}{\sqrt{r^2\varphi'^2 + z'^2}}.$$

Dla krzywej (S3.1)

$$\varphi(\lambda) = \lambda, \qquad z(\lambda) = A\lambda + B$$

i w konsekwencji

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{r^2\varphi'}{\sqrt{r^2\varphi'^2 + z'^2}} = \frac{d}{d\lambda}\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + A^2}} = 0,$$
$$\frac{d}{d\lambda}\frac{z'}{\sqrt{r^2\varphi'^2 + z'^2}} = \frac{d}{d\lambda}\frac{A}{\sqrt{r^2 + A^2}} = 0.$$

□