Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 10
21 maja 2020

Zadanie 1. Czy w szczególnej teorii względności (STW) wymiary poruszającego się ciała prostopadłe do kierunku jego ruchu ulegają zmianie?

Rozwiązanie. W celu odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu przyprowadzimy pewien eksperyment myślowy. Wyobraźmy sobie dwa identyczne samochody S_1 i S_2 prowadzone przez kierowców, odpowiednio, K_1 i K_2, które zbliżają się do siebie poruszając się ze stałymi prędkościami po prostoliniowej drodze i mijają się na przysłowiową odległość lusterka.

Przypuśćmy, że w STW wymiary poruszającego się ciała prostopadłe do kierunku ruchu ulegają wydłużeniu. Oznaczało by to, że z punktu widzenia kierowcy K_1, wysokość poruszającego się względem niego samochodu S_2 wzrasta (wysokość jest wymiarem prostopadłym do kierunku ruchu S_2). W szczególności wzrasta też wysokość, na której znajduje się lusterko L_2 tego samochodu. Możemy teraz przyjąć, że lusterka obu aut są na tyle wąskie w pionie, że podczas mijania się samochodów lusterko L_2 znajduje się nad lusterkiem L_1 auta S_1. Ale lusterko L_2 ulega także wydłużeniu w poziomie (kierunek poziomy też jest prostopadły do kierunku ruchu S_2), a że samochody mijają się na odległość lusterka to najbardziej wystający punkt lusterka L_2 zarysowuje lakier samochodu S_1 wzdłuż linii przebiegającej powyżej lusterka L_1, podczas gdy lusterko L_1 o niezmienionej długości auta S_2 nie dotyka.

Zatem z punktu widzenia kierowcy K_1 na skutek bliskiego mijania się aut bok jego samochodu S_1 zostanie zarysowany, zaś bok samochód S_2 nie (choć być może jakieś zarysowania pojawią się na lusterku L_2).

Ale w STW układy inercjalne są równoważne, więc z punktu widzenia kierowcy K_2 to lusterko L_1 znajduje się wyżej niż jego lusterko L_2 i ulega wydłużeniu w poziomie. W konsekwencji lusterko L_1 zarysowuje lakier samochodu S_2 powyżej lusterka L_2, a lusterko L_2 auta S_1 nie dotyka.

Widać stąd, że zakładając wydłużanie się wymiarów ciał prostopadłych do kierunku ruchu otrzymujemy sytuację, w której uszkodzenia aut zależą od tego, który kierowca je obserwuje. Ale uszkodzenia tego rodzaju (i ich brak) są rzeczą trwałą, auta mogą się zatrzymać i można dokonać ich oględzin, które dadzą jednoznaczny opis ewentualnych uszkodzeń. Musimy zatem odrzucić możliwość wydłużania się wymiarów prostopadłych do kierunku ruchu.

Przeprowadzając podobne rozumowanie, odrzucamy możliwość skracania się wymiarów prostopadłych do kierunku ruchu.

□

Zadanie 2. Dylatacja czasu W układzie inercjalnym $\mathcal{U}$ STW błysk światła emitowany przez źródło spoczywające w $\mathcal{U}$ odbija się od zwierciadła umieszczonego w odległości D od źródła i powraca do źródła. Niech układ inercjalny $\mathcal{U}'$ porusza się względem $\mathcal{U}$ z prędkością o wartości v w kierunku prostopadłym do toru, wzdłuż którego w układzie $\mathcal{U}$

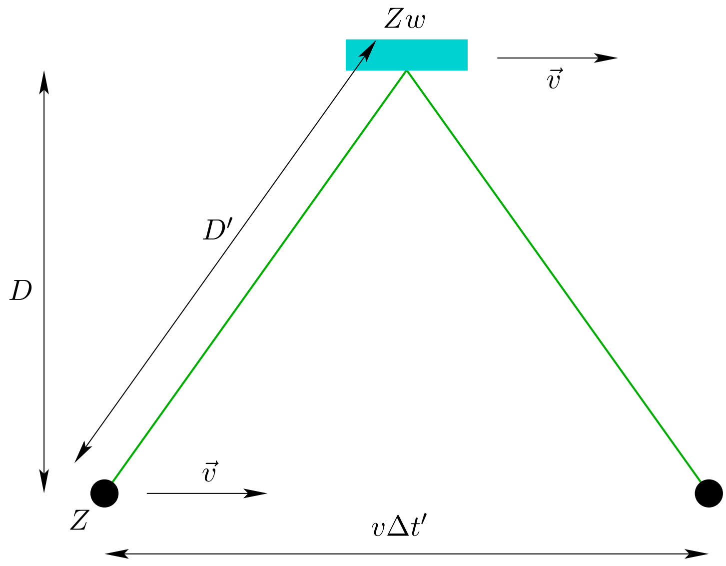
porusza się błysk światła. Oznaczmy symbolem Δt upływ czasu w układzie $\mathcal{U}$ pomiędzy wyemitowaniem błysku a jego powrotem do źródła, a symbolem $\Delta t'$ upływ czasu w układzie $\mathcal{U}'$ pomiędzy tymi samymi zdarzeniami. Pokazać, że

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\Delta t \equiv \gamma \Delta t. \tag{2.1}$$

Rozwiązanie. W układzie $\mathcal{U}$ błysk światła ma do pokonania z prędkością o wartości c drogę od źródła do zwierciadła i z powrotem czyli drogę długości $2D$. Zatem

$$\Delta t = \frac{2D}{c}. \tag{2.2}$$

Z kolei w układzie $\mathcal{U}'$ zarówno źródło jak i zwierciadło poruszają się z tą samą stałą



Rys. 1: Źródło Z, zwierciadło Zw i błysk światła widziane z układu $\mathcal{U}'$.

prędkością $\vec{v}$ o wartości v. Ze stałości tej prędkości wynika (patrz rys. 1), że droga od źródła do zwierciadła i droga powrotna mają tą samą długość D'. Zatem w układzie $\mathcal{U}'$ błysk światła ma do pokonania drogę długości $2D'$ z prędkością o wartości c — jest to ta sama wartość co w $\mathcal{U}$, bo w STW wartość prędkości światła jest taka sama we wszystkich układach inercjalnych. Wobec tego

$$\Delta t' = \frac{2D'}{c}. \tag{2.3}$$

W celu obliczenia wielkości D' zauważmy, że w $\mathcal{U}'$ tor ruchu błysku światła wraz z torem ruchu źródła tworzą trójkąt równoramienny, którego ramię ma długość D', a podstawa długość $v\Delta t'$. Wysokość tego trójkąta to widziana z $\mathcal{U}'$ odległość między źródłem i zwierciadłem — odległość ta jest równa odległości D mierzonej w $\mathcal{U}$, ponieważ w STW wymiary prostopadłe do kierunku ruchu nie ulegają zmianie (patrz zadanie 1). Mamy stąd

$$(D')^2 = D^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2.$$

Podstawiając do powyższego równania D i D' wyliczone ze wzorów (2.2) i (2.3) otrzymujemy

$$\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2.$$

Wynika stąd następujący wzór

$$\frac{c^2 - v^2}{c^2}(\Delta t')^2 = (\Delta t)^2.$$

Biorąc po uwagę, że Δt i $\Delta t'$ są dodatnie otrzymujemy z powyższego

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\Delta t$$

czyli wzór (2.1). □

Zadanie 3. Relatywistyczne składanie prędkości Układ inercjalny $\mathcal{U}'$ STW porusza się względem innego układu inercjalnego $\mathcal{U}$. Znaleźć wzory wiążące prędkość punktu materialnego P w układzie $\mathcal{U}$ z prędkością tego samego punktu w układzie $\mathcal{U}'$.

Rozwiązanie. Niech (x^1, x^2, x^3) będą współrzędnymi przestrzennymi w układzie odniesienia $\mathcal{U}$, a t czasem mierzonym przez zegary tego układu. Analogicznie, niech (x'^1, x'^2, x'^3) będą współrzędnymi przestrzennymi w układzie odniesienia $\mathcal{U}'$, a t' czasem mierzonym przez zegary tego układu. Ruch tego samego ciała jest opisany w obu układach funkcjami, odpowiednio,

$$t \mapsto \big(x^i(t)\big), \qquad t' \mapsto \big(x'^i(t')\big), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

a i-te składowe prędkości tego ciała w układach, odpowiednio, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ określone są przez pochodne:

$$u^i = \frac{dx^i}{dt}, \qquad u'^i = \frac{dx'^i}{dt'}.$$

Aby znaleźć relację między składowymi (u^i) i (u'^j) wykorzystuje się transformacje pomiędzy współrzędnymi czasoprzestrzennymi (t, x^1, x^2, x^3) układu $\mathcal{U}$ a współrzędnymi czasoprzestrzennymi (t', x'^1, x'^2, x'^3) układu $\mathcal{U}'$:

$$\begin{aligned} t' &= t'(t, x^i), \\ x'^j &= x'^j(t, x^i). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ustalmy chwilę t w układzie $\mathcal{U}$. W tej chwili rozważane ciało znajduje się w położeniu $(x^j(t))$. Tej chwili i temu położeniu ciała w $\mathcal{U}$ odpowiada chwila t' i położenie ciała $(x'^i(t'))$ w układzie $\mathcal{U}'$. Na mocy transformacji (3.2) zachodzi następujący związek:

$$\begin{aligned} t' &= t'(t, x^i(t)), \\ x'^j(t') &= x'^j(t, x^i(t)). \end{aligned}$$

Podstawiając pierwsze z powyższych równań do drugiego otrzymujemy

$$x'^j(t'(t, x^i(t))) = x'^j(t, x^i(t)).$$

Zróżniczkowanie obu stron tego równania po t daje

$$u'^j\Big(\frac{\partial t'}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial t'}{\partial x^i}u^i\Big)=\Big(\frac{\partial x'^j}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}u^i\Big).$$

Jeśli tylko nawias po lewej stronie właśnie otrzymanego równania jest różny od zera to obowiązuje następujące prawo wiążące składowe (u'^j) ze składowymi (u^i):

$$u'^j=\Big(\frac{\partial x'^j}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}u^i\Big)\Big(\frac{\partial t'}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial t'}{\partial x^k}u^k\Big)^{-1}. \tag{3.3}$$

Przyjmijmy teraz, że (i) osie przestrzennych układów współrzędnych w układach odniesienia $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ są parami równoległe i zgodnie zorientowane oraz że (ii) układ $\mathcal{U}'$ porusza się względem układu $\mathcal{U}$ z prędkością $\vec{v}=v\vec{e}_x$. Wtedy po dokonaniu zmiany oznaczeń $(x^1,x^2,x^3)\equiv(x,y,z)$ i analogicznej zmiany dla współrzędnych primowanych, transformacje (3.2) przybierają standardową postać

$$t'=\gamma(t-\frac{v}{c^2}x)+t_0, \qquad x'=\gamma(x-vt)+x_0,$$
$$y'=y+y_0, \qquad z'=z+z_0,$$

gdzie (t_0,x_0,y_0,z_0) są stałymi, a γ zdefiniowana jest wzorem (2.1).

Podstawiając te transformacje do wzorów (3.3) i oznaczając $(u^1,u^2,u^3)\equiv(u_x,u_y,u_z)$ i analogicznie dla składowych prędkości w układzie $\mathcal{U}'$ uzyskujemy:

$$\Big(\frac{\partial t'}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial t'}{\partial x^k}u^k\Big)=\gamma-\gamma\frac{v}{c^2}u_x=\gamma(1-\frac{v}{c^2}u_x)$$

(dla $|v|<c$ i $|u_x|\leq c$ powyższe wyrażenie jest niezerowe) oraz

$$\begin{aligned}
u'_x&=\frac{-\gamma v+\gamma u_x}{\gamma-\gamma\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{u_x-v}{1-vu_x/c^2},\\
u'_y&=\frac{u_y}{\gamma-\gamma\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{u_y}{\gamma(1-vu_x/c^2)},\\
u'_z&=\frac{u_z}{\gamma-\gamma\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{u_z}{\gamma(1-vu_x/c^2)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

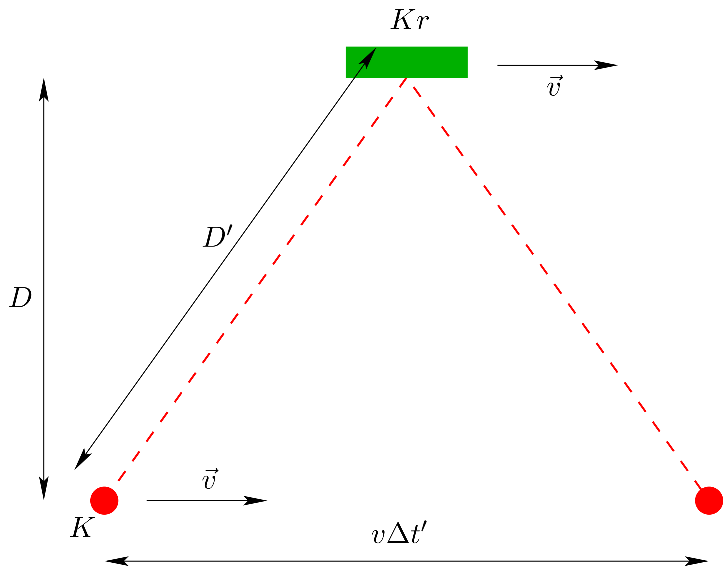
Powyższe wzory opisują tzw. relatywistyczne prawo składania prędkości.

$\square$

Zadanie 4. Dylatacja czasu Kula bilardowa odbija się prostopadle od krawędzi stołu bilardowego i powraca do miejsca, z którego (po uderzeniu kijem przez gracza) rozpoczęła ruch. Wartość prędkości kuli względem stołu pozostaje stała podczas całego ruchu. Niech układ inercjalny $\mathcal{U}'$ porusza się względem układu $\mathcal{U}$, w którym spoczywa stół bilardowy, z prędkością o wartości v w kierunku prostopadłym do toru, wzdłuż którego w układzie $\mathcal{U}$ porusza się kula. Oznaczmy symbolem Δt upływ czasu w układzie $\mathcal{U}$ pomiędzy uderzeniem kuli przez gracza a jej powrotem do miejsca na stole, w którym kula rozpoczęła ruch, a symbolem $\Delta t'$ upływ czasu w układzie $\mathcal{U}'$ pomiędzy tymi samymi zdarzeniami. Używając wzorów na składanie prędkości (patrz zadanie 3) wykazać, że zachodzi wzór (2.1).

Rozwiązanie. Załóżmy, że osie układu współrzędnych w układzie $\mathcal{U}$ zorientowane są tak, że:

1. kula bilardowa porusza się wzdłuż osi OY;
2. prędkość układu $\mathcal{U}'$ względem $\mathcal{U}$ ma postać $\vec{v} = -v\vec{e}_x$, $v > 0$.



Rys. 2: Kula bilardowa K odbijająca się od krawędzi Kr stołu widziana z układu $\mathcal{U}'$.

Oznacza to, że składowe prędkości $\vec{u}$ kuli bilardowej względem układu $\mathcal{U}$ mają postać

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = (0, \pm u, 0), \tag{4.1}$$

gdzie wartość $u > 0$ tej prędkości jest stała w czasie.

Przyjmując następnie, że transformacja pomiędzy współrzędnymi czasoprzestrzennymi obu układów ma standardową postać otrzymujemy następujące transformacje składowych (u_x, u_y, u_z) prędkości $\vec{u}$:

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + u_x v/c^2}, \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 + u_x v/c^2)}, \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 + u_x v/c^2)},$$

— wzory te biorą się ze wzorów (3.4) w skutek zamiany $v \mapsto -v$. Podstawiając do powyższych wzorów wartości składowych prędkości $\vec{u}$ opisane równaniem (4.1) otrzymujemy prędkość $\vec{u}'$ kuli względem układu $\mathcal{U}'$:

$$\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = (v, \pm u/\gamma, 0).$$

W rezultacie kwadrat wartości u' prędkości $\vec{u}'$ wynosi

$$u'^2 = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 = v^2 + u^2/\gamma^2. \tag{4.2}$$

Skoro znamy już wartość prędkości kuli w układzie $\mathcal{U}'$ możemy rozwiązać niniejsze zadanie w analogiczny sposób do zadania 2.

W układzie $\mathcal{U}$ kula ma do pokonania z prędkością o wartości u drogę od miejsca rozpoczęcia ruchu do zwierciadła i z powrotem — długość tej drogi oznaczmy $2D$. Zatem

$$\Delta t = \frac{2D}{u}. \tag{4.3}$$

Z kolei w układzie $\mathcal{U}'$ zarówno cały stół bilardowy poruszają się ze stałą prędkością $\vec{v}$ o wartości v. Ze stałości tej prędkości wynika (patrz rys. 2), że droga do krawędzi stołu i droga powrotna mają tą samą długość D'. Zatem kula ma do pokonania z prędkością o wartości u' drogę od miejsca na stole, w którym rozpoczęła ruch, do krawędzi i z powrotem czyli drogę długości $2D'$. Zatem

$$\Delta t' = \frac{2D'}{u'}. \tag{4.4}$$

Długość D' znamy z zadania 2:

$$(D')^2 = D^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2.$$

Podstawiając do powyższego równania D i D' wyliczone ze wzorów (4.3) i (4.4) otrzymujemy

$$\left(\frac{u'\Delta t'}{2}\right)^2 = \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2.$$

Wynika stąd następujący wzór

$$\frac{u'^2 - v^2}{u^2}(\Delta t')^2 = (\Delta t)^2.$$

Na mocy wzoru (4.2)

$$\frac{u'^2 - v^2}{u^2} = \frac{1}{\gamma^2}.$$

Biorąc po uwagę, że Δt i $\Delta t'$ są dodatnie otrzymujemy z powyższego

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

czyli wzór (2.1).

Otrzymany powyżej wynik jest niezależny od wartości $u > 0$ prędkości kuli bilardowej. $\square$