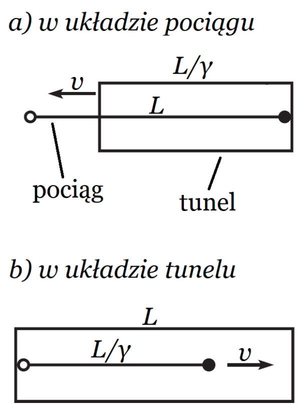
Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

Zadania na ćwiczenia – seria 11 (z rozwiązaniami).
25 maja 2020 r.

Zadania przykładowe

Przykład 1.
Pociąg o długości własnej l przejeżdża z prędkością o wartości v przez tunel, którego długość własna również wynosi l. Na przedzie pociągu umiejscowiona jest bomba, zaprogramowana tak, by wybuchnąć w chwili, w której przód pociągu opuszcza tunel. Tył pociągu wyposażono w urządzenie, które w chwili, gdy tył pociągu wjeżdża do tunelu, wysyła do bomby sygnał nakazujący jej się rozbroić. Czy bomba wybuchnie?

Rozwiązanie.



Rys. 1. Sytuacja z przykładu 1.

Na początku przeanalizujemy sytuację z punktu widzenia układu pociągu (rys. 1a.). W układzie tym pociąg spoczywa i ma długość l, tunel natomiast porusza się z prędkością o wartości v, podlega zatem skróceniu Lorentza – jego długość wynosi l/γ, gdzie

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{P1.1}$$

jest czynnikiem Lorentza odpowiadającym prędkości v. Wprowadziliśmy tu wygodne oznaczenie $\beta = v/c$; warto zauważyć, że z $0 \leqslant v \leqslant c$ wynika $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Długość tunelu jest zatem mniejsza od l, przód pociągu opuści więc tunel zanim tył pociągu się w nim znajdzie – bomba wybuchnie.

Możemy jednak spojrzeć na tę sytuację również z punktu widzenia układu tunelu (rys. 1b.). W tym układzie to tunel spoczywa i ma długość l, zaś pociąg porusza się z prędkością o wartości v i jest skrócony, jego długość to l/γ. Urządzenie dezaktywujące bombę, umieszczone na tyle pociągu, zdąży zatem znaleźć się w tunelu i wysłać sygnał rozbrajający bombę zanim przód pociągu opuści tunel. Wszystko wskazuje więc na to, że bomba nie wybuchnie. To paradoks – wnioski fizyczne muszą być przecież identyczne z punktu widzenia każdego obserwatora.

Poprawne jest pierwsze rozumowanie, przeprowadzone w układzie pociągu: bomba wybuchnie. Rozważania prowadzone w układzie tunelu zawierają pewien na pozór drobny, jednak, jak się okazuje, istotny błąd – zapomnieliśmy o tym, że urządzenie dezaktywujące bombę nie może przekazać bombie żadnej informacji *natychmiast*. Sygnał nakazujący bombie rozbrojenie potrzebuje trochę czasu, by pokonać odległość pomiędzy urządzeniem dezaktywującym, umieszczonym przecież na tyle pociągu, a bombą, która znajduje się na jego przedzie. Okazuje się, że czas ten jest na tyle duży, iż sygnał rozbrajający bombę nie zdąży do niej dotrzeć przed jej wybuchem, niezależnie od tego, z jakimi prędkościami poruszają się sygnał i pociąg. Udowodnimy to teraz.

Sygnał ma największą szansę na dotarcie do bomby na czas, gdy porusza się z największą możliwą prędkością, załóżmy zatem, że jego prędkość jest równa prędkości światła c. Bomba nie wybuchnie wtedy, gdy sygnał wyemitowany z jednego końca tunelu (który chwilowo pokrywa się z tyłem pociągu) dotrze do jego drugiego końca wcześniej niż przód pociągu. Sygnał potrzebuje na dotarcie do końca tunelu czasu l/c, przód pociągu natomiast – czasu $l\left(1-1/\gamma\right)/v$, ponieważ do chwili emisji sygnału przód pociągu pokonał już w tunelu odległość l/γ (rys. 1b.). Tak więc, bomba nie wybuchnie, gdy

$$\frac{l}{c} < \frac{l\left(1-1/\gamma\right)}{v}. \tag{P1.2}$$

Dzieląc tę nierówność stronami przez l, mnożąc stronami przez v (zarówno l, jak i v są oczywiście dodatnimi wielkościami), a następnie wstawiając definicję czynnika Lorentza γ i – dla prostoty – wprowadzając oznaczenie $\beta = v/c$, otrzymujemy

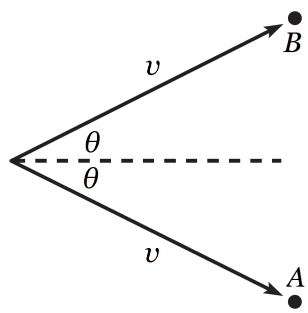
$$\beta < 1 - \sqrt{1-\beta^2}. \tag{P1.3}$$

Proste przekształcenia algebraiczne pozwalają sprowadzić (P1.3) do postaci

$$\sqrt{1+\beta} < \sqrt{1-\beta}. \tag{P1.4}$$

Nierówność ta nie jest nigdy prawdziwa, ponieważ $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Sygnał dotrze zatem za późno i bomba wybuchnie.

Przykład 2.
Dwie cząstki poruszają się tak, że obserwator w układzie laboratoryjnym widzi ich ruch w sposób przedstawiony na rys. 2. Prędkość każdej z nich ma w tym układzie wartość v, zaś kąt pomiędzy ich torami wynosi 2θ. Znaleźć wartość prędkości jednej z cząstek w układzie drugiej.



Rys. 2. Ruch cząstek z przykładu 2. widziany z układu laboratoryjnego.

Rozwiązanie.
Rozwiązując to zadanie, posłużymy się niezwykle użytecznym formalizmem czterowektorów. Prędkość jednej z cząstek w układzie drugiej z nich znajdziemy, wykorzystując czterowektor określany mianem *czteroprędkości*, zdefiniowany jako

$$V^\mu \;=\; \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \;=\; (\gamma(v)c,\, \gamma(v)\mathbf{v}) \;=\; (\gamma(v)c,\, \gamma(v)v_x,\, \gamma(v)v_y,\, \gamma(v)v_z)\,, \tag{P2.1}$$

gdzie $x^\mu = (ct,\, x,\, y,\, z)$ jest czteropołożeniem, τ – czasem własnym, $\gamma(v)$ to jak zwykle czynnik Lorentza, zaś $\mathbf{v} = (v_x,\, v_y,\, v_z)$ to „zwykły”, trójwymiarowy wektor prędkości.

Wprowadźmy osie układu laboratoryjnego U w taki sposób, by jego początek pokrywał się z punktem przecięcia torów cząstek, oś Ox leżała w płaszczyźnie rysunku wzdłuż przerywanej linii i była skierowana „w prawo”, oś Oy leżała w płaszczyźnie rysunku i była skierowana „do góry”, zaś oś Oz była prostopadła do płaszczyzny rysunku. Czteroprędkości cząstek mają w tak zdefiniowanym układzie postać

$$\begin{aligned} V_A^\mu &= (\gamma(v)c,\, \gamma(v)v\cos\theta,\, -\gamma(v)v\sin\theta,\, 0)\,, \\ V_B^\mu &= (\gamma(v)c,\, \gamma(v)v\cos\theta,\, \gamma(v)v\sin\theta,\, 0)\,. \end{aligned} \tag{P2.2}$$

Przejdźmy teraz do układu U' związanego z cząstką A i opiszmy w nim ruch cząstki B. Osie układu U' określimy w sposób analogiczny do osi układu U, obrócimy jednak osie $O'x'$ i $O'y'$ w taki sposób, by ruch cząstki B odbywał się w układzie U' wzdłuż osi $O'x'$. Niech w będzie szukaną prędkością cząstki B w układzie U'. Czteroprędkości cząstek przyjmują w tym układzie postać

$$\begin{aligned} V_A'^\mu &= (c,\, 0,\, 0,\, 0)\,, \\ V_B'^\mu &= (\gamma(w)c,\, \gamma(w)w,\, 0,\, 0)\,. \end{aligned} \tag{P2.3}$$

Iloczyn skalarny czterowektorów jest niezmienniczy względem transformacji Lorentza oraz zwykłych obrotów przestrzennych, a właśnie te dwa typy transformacji wiążą ze sobą układy U i U': transformacje Lorentza, ponieważ układ U' porusza się względem układu U; obroty, ponieważ osie układu U' są obrócone względem osi układu U. Mamy zatem

$$V_A \cdot V_B \;=\; V_A' \cdot V_B', \tag{P2.4}$$

czyli

$$(\gamma(v)c,\, \gamma(v)v\cos\theta,\, -\gamma(v)v\sin\theta,\, 0)\cdot(\gamma(v)c,\, \gamma(v)v\cos\theta,\, \gamma(v)v\sin\theta,\, 0) \;=\; (c,\, 0,\, 0,\, 0)\cdot(\gamma(w)c,\, \gamma(w)w,\, 0,\, 0)\,. \tag{P2.5}$$

Otrzymujemy stąd

$$\gamma^2(v)c^2 - (\gamma(v)v\cos\theta)^2 - (\gamma(v)v\sin\theta)\,(-\gamma(v)v\sin\theta) \;=\; \gamma(w)c^2, \tag{P2.6}$$

co po uproszczeniu i skorzystaniu z tożsamości trygonometrycznej $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ daje

$$\gamma^2(v)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\cos 2\theta\right) \;=\; \gamma(w). \tag{P2.7}$$

Wstawiając do (P2.7) wartości czynników Lorentza i rozwiązując to równanie względem w, otrzymujemy ostatecznie

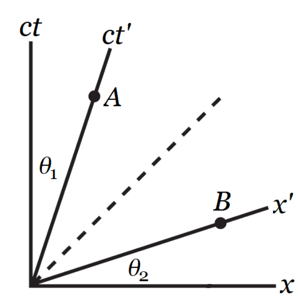
$$w \;=\; c\sqrt{1 - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\cos 2\theta\right)^2}} \;=\; \frac{\sqrt{2v^2\,(1-\cos 2\theta) - \frac{v^4}{c^2}\sin^2 2\theta}}{1-\frac{v^2}{c^2}\cos 2\theta} \;=\; \frac{2v\sin\theta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}}{1-\frac{v^2}{c^2}\cos 2\theta}. \tag{P2.8}$$

Po drodze korzystaliśmy z tożsamości trygonometrycznych. Warto odnotować, że dla $\theta = 0$ dostajemy $w = 0$, zaś dla $\theta = \pi/2$ mamy $w = 2v/\left(1 + v^2/c^2\right)$, tak, jak należało oczekiwać.

Zadanie to można rozwiązać bez odwoływania się do pojęcia czterowektora, korzystając ze wzorów na składanie prędkości. Wymaga to jednak nieco więcej pracy oraz znajomości (lub wyprowadzenia) tych wzorów.

Przykład 3.
Układ U' porusza się względem układu U z prędkością o wartości v wzdłuż osi Ox układu U. Odpowiadające sobie osie obu układów są równoległe. Pręt o długości 1 m leży wzdłuż osi $O'x'$ układu U' i spoczywa w tym układzie. Narysować diagram Minkowskiego przedstawiający tę sytuację i na jego podstawie znaleźć długość pręta mierzoną przez obserwatora w układzie U.

Rozwiązanie.
Zanim przystąpimy do rozwiązywania zadania, poświęcimy chwilę ogólnemu zagadnieniu rysowania diagramów Minkowskiego. Ruch układu U' odbywa się w kierunku osi Ox układu U, nie będziemy zatem w dalszych rozważaniach przejmować się osiami Oy i Oz układu U ani osiami $O'y'$ i $O'z'$ układu U', nie spodziewamy się bowiem żadnych interesujących efektów związanych z tymi osiami.



Rys. 3. Układy U i U' na diagramie Minkowskiego.

Rysowanie diagramów Minkowskiego. Narysujmy osie Oct i Ox układu U jako osie wzajemnie prostopadłe, oś Ox niech będzie osią poziomą, zaś oś Oct – osią pionową (rys. 3). Warto zwrócić uwagę, że zamiast współrzędną t, czyli czasem, zamierzamy posługiwać się współrzędną ct, a więc czasem pomnożonym przez prędkość światła w próżni; robimy to wyłącznie dla wygody – dzięki temu trajektoria promienia światła będzie na diagramie prostą nachyloną do osi poziomej pod kątem 45^o, co zwykle ułatwia rysowanie i analizę diagramów Minkowskiego.

Stajemy teraz przed zadaniem naniesienia na diagram osi $O'ct'$ i $O'x'$ układu U'. Musimy się w tym celu zastanowić, pod jakimi kątami są one nachylone do osi układu U oraz jak wyglądają ich skale – nie ma przecież żadnego powodu, dla którego jednostki na osiach układu U' miałyby mieć na diagramie taką samą długość, jak jednostki na odpowiadających im osiach układu U. Na pytania te odpowiemy, posługując się transformacją Lorentza.

Zajmiemy się najpierw osią $O'ct'$. Zaznaczmy na diagramie punkt A, którego współrzędne względem układu U' to $(ct'_A,\, x'_A) = (1,\, 0)$ (rys. 3). Punkt ten leży na osi $O'ct'$, w odległości jednej jednostki tej osi od początku układu. Posługując się transformacją Lorentza, możemy łatwo obliczyć współrzędne punktu A względem układu U: $(ct_A,\, x_A) = (\gamma,\, \gamma v/c)$, gdzie przez γ oznaczyliśmy, jak zwykle, czynnik Lorentza. Kąt θ_1 pomiędzy osiami $O'ct'$ i Oct spełnia zatem równość

$$\mathrm{tg}\theta_1 \;=\; \frac{x_A}{ct_A} \;=\; \frac{v}{c} \;=\; \beta. \tag{P3.1}$$

Moglibyśmy też dojść do tego wniosku inaczej: oś $O'ct'$ jest linią świata punktu będącego początkiem układu U'; punkt ten porusza się z prędkością o wartości v względem układu U, zatem punkty na osi $O'ct'$ muszą spełniać $x/t = v$, czyli $x/ct = v/c = \beta$.

W celu ustalenia skali na osi $O'ct'$ zauważmy, że odległość punktu A od początku układu U na diagramie jest równa

$$\left|\overline{AO}\right| \;=\; \sqrt{\left(ct_A\right)^2 + x_A^2} \;=\; \sqrt{\gamma^2 + \left(\gamma\frac{v}{c}\right)^2} \;=\; \gamma\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tag{P3.2}$$

(należy zwrócić uwagę, że to odległość *na diagramie*, czyli po prostu długość odcinka $\overline{AO}$; dlatego właśnie policzyliśmy ją w standardowy sposób, posługując się twierdzeniem Pitagorasa). Tak więc

$$\frac{\text{jednostka osi } O'ct'}{\text{jednostka osi } Oct} \;=\; \frac{\gamma\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}{1} \;=\; \sqrt{\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;=\; \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}. \tag{P3.3}$$

Stosunek ten jest równy 1 dla $\beta = 0$ i dąży do nieskończoności dla $\beta \to 1$.

Przejdźmy teraz do osi $O'x'$. Rozumowanie jest tu niemal identyczne, jak w przypadku osi $O'ct'$. Niech B będzie punktem, którego współrzędne względem układu U' wynoszą $(ct'_B,\, x'_B) = (0,\, 1)$ (rys. 3). Punkt ten leży na osi $O'x'$, w odległości jednej jednostki tej osi od początku układu. Na mocy transformacji Lorentza współrzędne punktu B względem układu U to $(ct_B,\, x_B) = (\gamma v/c,\, \gamma)$. Kąt θ_2 pomiędzy osiami $O'x'$ i Ox dany jest więc równością

$$\mathrm{tg}\theta_2 \;=\; \frac{ct_B}{x_B} \;=\; \frac{v}{c} \;=\; \beta. \tag{P3.4}$$

Okazuje się, że $\mathrm{tg}\theta_2 = \mathrm{tg}\theta_1$.

Odległość punktu B od początku układu U na diagramie jest równa

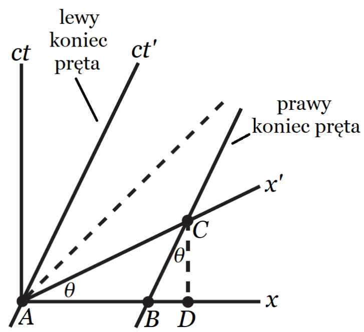
$$\left|\overline{BO}\right| \;=\; \sqrt{\left(ct_B\right)^2 + x_B^2} \;=\; \sqrt{\left(\gamma\frac{v}{c}\right)^2 + \gamma^2} \;=\; \gamma\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}, \tag{P3.5}$$

zatem

$$\frac{\text{jednostka osi } O'x'}{\text{jednostka osi } Ox} \;=\; \frac{\gamma\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}{1} \;=\; \sqrt{\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;=\; \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}, \tag{P3.6}$$

jak to miało miejsce w przypadku osi $O'ct'$.

Obie osie układu U' są zatem „rozciągnięte” względem odpowiadających im osi układu U o ten sam czynnik oraz nachylone do odpowiednich osi układu U pod tym samym kątem. Transformacje Lorentza różnią się pod tym względem od obrotów przestrzennych, które nie „rozciągają” osi, lecz obracają je tylko, wprawdzie obie o ten sam kąt, lecz także w tym samym kierunku. Zauważmy, że gdy $\beta = 0$, otrzymujemy $\theta_1 = \theta_2 = 0$, osie układu U' pokrywają się zatem z osiami układuu U, jak należało się spodziewać. Kiedy β jest bliska 1, osie układu U' są bliskie prostej $x = ct$, czyli linii świata promienia światła w układzie U.



Rys. 4. Pręt z przykładu 3. na diagramie Minkowskiego.

Na koniec zatrzymajmy się jeszcze na chwilę nad fizyczną interpretacją osi na diagramie Minkowskiego. Dla obserwatora związanego z układem U' (czyli spoczywającego względem U') i znajdującego się w początku tego układu oś $O'ct'$ jest „osią tutaj" – wszystkie zdarzenia leżące na tej osi mają to samo położenie, co obserwator: $x' = 0$; oś ta jest zresztą linią świata obserwatora. Oś $O'x'$ jest dla tego samego obserwatora „osią teraz", osią równoczesności, zdarzenia leżące na tej osi mają bowiem $t' = 0$. To samo może oczywiście powiedzieć obserwator związany z układem U o osiach Oct i Ox.

Zmiana długości pręta. Wróćmy teraz do problemu z treści zadania. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że jeden z końców pręta znajduje się w początku układu U'. Diagram Minkowskiego ilustrujący tę sytuację przedstawiony jest na rys. 4. Wraz z osiami układów U i U' na diagram naniesiono też linie świata końców pręta. Odległość pomiędzy punktami A i C wynosi w układzie U' 1 metr, ponieważ w pewnym ustalonym czasie względem układu U' końce pręta znajdują się równocześnie w tych punktach. 1 metr to jedna jednostka osi $O'x'$; jak przed chwilą ustaliliśmy, jedna jednostka tej osi ma na diagramie długość $\sqrt{1+\beta^2}/\sqrt{1-\beta^2}$, tyle zatem wynosi długość odcinka $\overline{AC}$.

Jak obserwator związany z układem U mierzy długość pręta? Musi w tym celu zanotować wartości współrzędnej x obu końców pręta odczytane w tej samej chwili t, a następnie obliczyć ich różnicę. Załóżmy, że obserwator ten dokonuje pomiaru położeń końców pręta w chwili $t = 0$. Odnotuje wówczas, że końce pręta znajdują się w punktach A i B. Pozostaje nam zatem znaleźć długość odcinka $\overline{AB}$. Wiemy już, że osie primowane są nachylone względem nieprimowanych pod kątem θ spełniającym $\mathrm{tg}\theta = \beta$. Wynika stąd, że $|\overline{CD}| = |\overline{AC}| \sin\theta$. Łatwo się przekonać, że $\sphericalangle BCD = \theta$, skąd $|\overline{BD}| = |\overline{CD}|\mathrm{tg}\theta = |\overline{AC}|\sin\theta\mathrm{tg}\theta$. Pamiętając, że $\mathrm{tg}\theta = \beta$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= |\overline{AD}| - |\overline{BD}| = |\overline{AC}|\cos\theta - |\overline{AC}|\sin\theta\mathrm{tg}\theta \\ &= |\overline{AC}|\cos\theta\left(1 - \mathrm{tg}^2\theta\right) = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(1-\beta^2\right) = \sqrt{1-\beta^2}. \end{aligned} \tag{P3.7}$$

Tak więc, długość pręta zmierzona przez obserwatora związanego z układem U to $\sqrt{1-\beta^2}$ metra. Ten sam wynik otrzymamy, stosując standardowy wzór na skrócenie Lorentza.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.

Dwa pociągi, oba o długości własnej l, poruszają się w tym samym kierunku, pierwszy z prędkością o wartości $v_1 = 4c/5$, drugi natomiast – z prędkością o wartości $v_2 = 3c/5$. Na początku pociąg poruszający się szybciej znajduje się z tyłu wolniejszego pociągu. Ile czasu z punktu widzenia obserwatora stojącego nieruchomo na ziemi będzie trwał manewr wyprzedzania pociągów? Przyjmujemy, że wyprzedzanie rozpoczyna się, gdy przód pierwszego pociągu mija tył drugiego, kończy się zaś, gdy tył pierwszego pociągu mija przód drugiego.

Rozwiązanie.
W układzie obserwatora stojącego na ziemi czynniki Lorentza związane z pierwszym i drugim pociągiem to odpowiednio

$$\gamma_1 = \gamma(v_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3}, \tag{Z1.1}$$

$$\gamma_2 = \gamma(v_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{5}{4}, \tag{Z1.2}$$

zatem długości pociągów wynoszą w tym układzie

$$l_1 = \frac{l}{\gamma_1} = \frac{3}{5}l, \qquad l_2 = \frac{l}{\gamma_2} = \frac{4}{5}l. \tag{Z1.3}$$

Podczas wyprzedzania pierwszy pociąg przebywa drogę

$$s = l_1 + l_2 = \frac{7}{5}l; \tag{Z1.4}$$

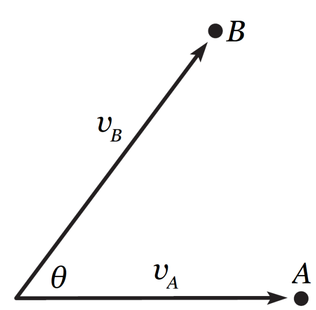
łatwo sobie wyobrazić, że właśnie taką drogę pokona dowolny punkt (np. przód) pierwszego pociągu od chwili, w której przód pierwszego pociągu minie tył drugiego, do chwili, gdy tył pierwszego pociągu minie przód drugiego. Względna prędkość pociągów w układzie związanym z ziemią ma wartość

$$w = |v_1 - v_2| = \left|\frac{4}{5}c - \frac{3}{5}c\right| = \frac{1}{5}c; \tag{Z1.5}$$

warto zwrócić uwagę na fakt, że zamiast relatywistycznego składania prędkości zastosowaliśmy tu „zwykłe" ich składanie, w nie jest bowiem wartością *rzeczywistej* prędkości, z jaką porusza się jakiś obiekt, mierzonej przez obserwatora związanego z pewnym układem odniesienia, lecz jedynie względnej prędkości dwóch obiektów mierzonej z „zewnętrznego" układu odniesienia („zwykłe" składanie sugeruje, że wartość takiej względnej prędkości może przekraczać c – w istocie jest to możliwe). Czas trwania wyprzedzania w układzie obserwatora stojącego nieruchomo na ziemi (który możemy nazwać układem laboratoryjnym) to więc

$$t_{\mathrm{lab}} = \frac{s}{w} = \frac{7l}{5}\frac{5}{c} = \frac{7l}{c}. \tag{Z1.6}$$

Zadanie 2.
Dwie cząstki poruszają się tak, że obserwator w układzie laboratoryjnym widzi ich ruch w sposób przedstawiony na rys. 5. Prędkość cząstki A ma w tym układzie wartość v_A, prędkość cząstki B – wartość v_B, zaś kąt pomiędzy torami cząstek wynosi θ. Znaleźć wartość prędkości jednej z cząstek w układzie drugiej.



Rys. 5. Ruch cząstek z zadania 2. widziany z układu laboratoryjnego.

Rozwiązanie.
Wprowadźmy osie układu laboratoryjnego U w taki sposób, by jego początek pokrywał się z punktem przecięcia torów cząstek, oś Ox leżała w płaszczyźnie rysunku wzdłuż toru cząstki A i była skierowana „w prawo”, oś Oy leżała w płaszczyźnie rysunku i była skierowana „do góry”, zaś oś Oz była prostopadła do płaszczyzny rysunku. Czteroprędkości cząstek w tak zdefiniowanym układzie mają postać

$$\begin{aligned} V_A^\mu &= (\gamma(v_A)c,\, \gamma(v_A)v_A,\, 0,\, 0)\,, \\ V_B^\mu &= (\gamma(v_B)c,\, \gamma(v_B)v_B\cos\theta,\, \gamma(v_B)v_B\sin\theta,\, 0)\,. \end{aligned} \tag{Z2.1}$$

Przejdźmy teraz do układu U' związanego z cząstką A i spróbujmy opisać ruch cząstki B względem tego układu. Osie układu U' zdefiniujemy w sposób analogiczny do osi układu U, obrócimy jednak osie $O'x'$ i $O'y'$ w taki sposób, by ruch cząstki B odbywał się w układzie U' wzdłuż osi $O'x'$. Niech w będzie szukaną prędkością cząstki B w układzie cząstki A, czyli w układzie U'. Czteroprędkości cząstek przyjmują w tym układzie postać

$$\begin{aligned} V_A'^\mu &= (c,\, 0,\, 0,\, 0)\,, \\ V_B'^\mu &= (\gamma(w)c,\, \gamma(w)w,\, 0,\, 0)\,. \end{aligned} \tag{Z2.2}$$

Iloczyn skalarny czterowektorów jest niezmienniczy względem transformacji Lorentza oraz obrotów przestrzennych, a właśnie te dwa typy transformacji wiążą ze sobą układy U i U', możemy zatem napisać

$$V_A \cdot V_B \;=\; V_A' \cdot V_B', \tag{Z2.3}$$

czyli

$$(\gamma(v_A)c,\, \gamma(v_A)v_A,\, 0,\, 0)\cdot(\gamma(v_B)c,\, \gamma(v_B)v_B\cos\theta,\, \gamma(v_B)v_B\sin\theta,\, 0) \;=\; (c,\, 0,\, 0,\, 0)\cdot(\gamma(w)c,\, \gamma(w)w,\, 0,\, 0)\,. \tag{Z2.4}$$

Wynika stąd, że

$$\gamma(v_A)\gamma(v_B)c^2 - \gamma(v_A)\gamma(v_B)v_Av_B\cos\theta \;=\; \gamma(w)c^2, \tag{Z2.5}$$

czyli po uproszczeniu

$$\gamma(v_A)\gamma(v_B)\left(1-\frac{v_Av_B}{c^2}\cos\theta\right) \;=\; \gamma(w). \tag{Z2.6}$$

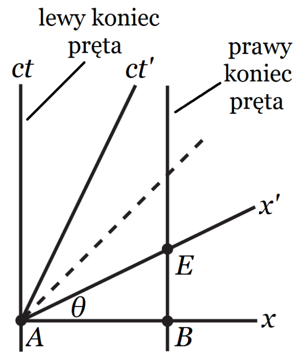
Wstawiając teraz wartości czynników Lorentza i rozwiązując otrzymane równanie względem w, dostajemy ostatecznie

$$w \;=\; c\sqrt{1-\frac{\left(1-\frac{v_A^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_B^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v_Av_B}{c^2}\cos\theta\right)^2}} \;=\; \frac{\sqrt{v_A^2+v_B^2-2v_Av_B\cos\theta-\frac{v_A^2v_B^2}{c^2}\sin^2\theta}}{1-\frac{v_Av_B}{c^2}\cos\theta}. \tag{Z2.7}$$

Kładąc $v_A = v_B$ i zastępując θ przez 2θ, odtworzymy wynik z przykładu 2. Gdy $\theta = 0$, mamy $w = |v_A - v_B| \,/\, \left(1 - v_Av_B/c^2\right)$, gdy zaś $\theta = \pi$, otrzymujemy $w = (v_A + v_B)\,/\,\left(1 + v_Av_B/c^2\right)$; tego właśnie należało się spodziewać.

Zadanie 3.
Układ U' porusza się względem układu U z prędkością o wartości v wzdłuż osi Ox układu U. Odpowiadające sobie osie obu układów są równoległe. Pręt o długości 1 m leży wzdłuż osi Ox układu U i spoczywa w tym układzie. Narysować diagram Minkowskiego przedstawiający tę sytuację i na jego podstawie znaleźć długość pręta mierzoną przez obserwatora w układzie U'.

Rozwiązanie.
Przyjmiemy, że jeden z końców pręta znajduje się w początku układu U, nie tracąc przez to ogólności. Diagram Minkowskiego ilustrujący tę sytuację przedstawiony jest na rys. 6. Linia świata lewego końca pręta pokrywa się z osią Oct układu U, zaś linia świata jego prawego końca jest do niej równoległa. Odcinek $\overline{AB}$ ma w układzie U długość 1 metra, ponieważ w pewnym ustalonym czasie względem układu U końce pręta znajdują się równocześnie w punktach A i B.



Rys. 6. Pręt z zad. 3.
na diagramie Minkowskiego.

W celu zmierzenia długości pręta obserwator związany z układem U' musi zanotować wartości współrzędnej x' obu końców pręta odczytane w pewnej ustalonej chwili t', wspólnej dla obu końców, a następnie obliczyć ich różnicę. Załóżmy, że obserwator ten dokonuje pomiaru położeń końców pręta w chwili $t' = 0$. Stwierdzi wówczas, że końce pręta znajdują się w punktach A i E. Naszym zadaniem jest więc znalezienie długości odcinka $\overline{AE}$. Nie jest to trudne – korzystając z definicji funkcji cosinus, z tożsamości trygonometrycznych oraz z tego, że $\mathrm{tg}\theta = \beta$, łatwo otrzymujemy

$$\left|\overline{AE}\right| = \frac{\left|\overline{AB}\right|}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta} = \sqrt{1+\beta^2}. \qquad \text{(Z3.1)}$$

Jedna jednostka osi $O'x'$ ma na diagramie długość $\sqrt{1+\beta^2}/\sqrt{1-\beta^2}$, zatem

$$\left|\overline{AE}\right| = \sqrt{1-\beta^2} \text{ jednostki długości w układzie } U'. \qquad \text{(Z3.2)}$$

Obserwator związany z układem U' dojdzie zatem do wniosku, że długość pręta to $\sqrt{1-\beta^2}$ metra. Wynik ten zgadza się ze standardowym wzorem na skrócenie Lorentza.

Bartłomiej Zglinicki

Bibliografia.

[1] Królikowski W., Rubinowicz W., *Mechanika teoretyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.

[2] Taylor J.R., *Mechanika klasyczna*, t. I, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.

[3] Morin D., *Introduction to Classical Mechanics with problems and solutions*, Cambridge University Press, Nowy Jork 2007.