Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 11
28 maja 2020

Zadanie 1. Czteroprędkość $\vec{U}$ masywnej cząstki w STW może być zdefiniowana jako

1. unormowany do wartości c wektor styczny do linii świata cząstki skierowany ku przyszłości;
2. wektor styczny do linii świata sparametryzowanej czasem własnym.

Pokazać równoważność obu definicji.

Rozwiązanie. Jeśli (x, y, z) i $(x', y'z')$ są różnymi kartezjańskimi układami współrzędnych na standardowej przestrzeni (euklidesowej), to wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ można przedstawić następująco:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = a'_x\vec{e}'_x + a'_y\vec{e}'_y + a'_z\vec{e}'_z,$$
$$\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z = b'_x\vec{e}'_x + b'_y\vec{e}'_y + b'_z\vec{e}'_z$$

i dla standardowego iloczynu skalarnego mamy

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = \vec{a}\circ\vec{b} = a'_xb'_x + a'_yb'_y + a'_zb'_z.$$

Niech (ct, x, y, z) będzie układem współrzędnych na czasoprzestrzeni zdefiniowanym przez czas t i kartezjańskie współrzędne przestrzenne (x, y, z) pewnego inercjalnego układu odniesienia $\mathcal{U}$. Współrzędne (ct, x, y, z) definiują wersory $\vec{e}_{ct}$, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$ na czasoprzestrzeni $\mathbb{M}$. Dowolne dwa czterowektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ możemy rozłożyć na składowe w bazie utworzonej przez wersory:

$$\vec{A} = A_{ct}\vec{e}_{ct} + A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z, \qquad \vec{B} = B_{ct}\vec{e}_{ct} + B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$$

i zdefiniować następujący czasoprzestrzenny iloczyn skalarny pomiędzy tymi wektorami:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} := A_{ct}B_{ct} - A_xB_x - A_yB_y - A_zB_z. \tag{1.1}$$

Iloczyn ten jest niezmienniczy przy zamianie układu inercjalnego $\mathcal{U}$ na dowolny inny układ inercjalny $\mathcal{U}'$ (czyli niezmienniczy względem transformacji Poincare): jeśli

$$\vec{A} = A'_{ct}\vec{e}'_{ct} + A'_x\vec{e}'_x + A'_y\vec{e}'_y + A'_z\vec{e}'_z, \qquad \vec{B} = B'_{ct}\vec{e}'_{ct} + B'_x\vec{e}'_x + B'_y\vec{e}'_y + B'_z\vec{e}'_z$$

są składowymi wektorów w układzie współrzędnych (ct', x', y', z') związanym z układem odniesienia $\mathcal{U}'$ to

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = A'_{ct}B'_{ct} - A'_xB'_x - A'_yB'_y - A'_zB'_z.$$

Niech

$$[a_1, a_2] \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda) = \begin{pmatrix} ct(\lambda) \\ x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$$

będzie krzywą w czasoprzestrzeni $\mathbb{M}$. Jeżeli w każdym punkcie krzywej jej wektor styczny

$$\vec{\chi} := \frac{d\chi}{d\lambda} = c\frac{dt}{d\lambda}\vec{e}_{ct} + \frac{dx}{d\lambda}\vec{e}_x + \frac{dy}{d\lambda}\vec{e}_y + \frac{dz}{d\lambda}\vec{e}_z$$

spełnia

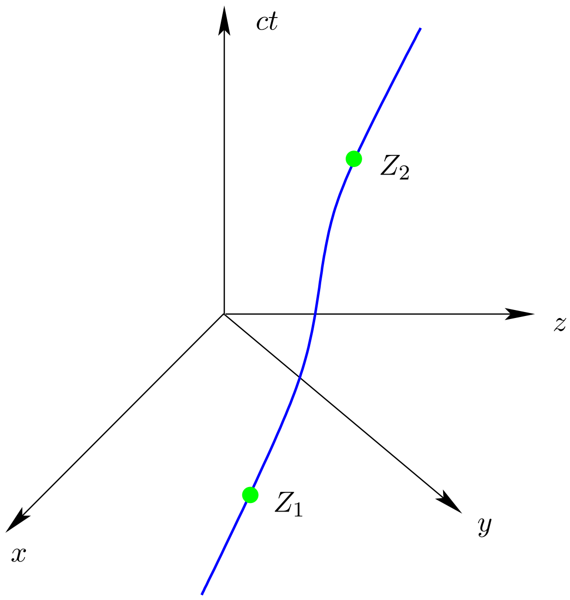
$$(i) \quad \vec{\chi}\bullet\vec{\chi} > 0, \qquad\qquad (ii) \quad \vec{\chi}\bullet\vec{\chi} = 0, \qquad\qquad (iii) \quad \vec{\chi}\bullet\vec{\chi} < 0,$$

to mówimy, że krzywa χ jest (i) *czasowa*, (ii) *zerowa*, (iii) *przestrzenna.*

"Czasoprzestrzenną długość" krzywej χ, należącej do jednej z powyżej określonych klas, możemy zdefiniować następująco:

$$|\chi| := \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{|\vec{\chi}\bullet\vec{\chi}|}\, d\lambda \tag{1.2}$$

— podobnie jak długość krzywej w przestrzeni euklidesowej, "czasoprzestrzenna długość" nie zmienia się na skutek reparametryzacji krzywej χ.



Rys. 1: Linia świata

Niech funkcje $t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ opisują ruch cząstki w układzie $\mathcal{U}$. Wtedy obraz krzywej

$$t \mapsto \chi(t) = \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{M} \tag{1.3}$$

jest nazywany *linią świata* cząstki. W STW przyjmuje się, że linie świata cząstek masywnych są czasowe, a linie świata cząstek bezmasowych są zerowe.

Niech zdarzenia Z_1 i Z_2 należą do linii świata χ pewnej cząstki masywnej (patrz rys. 1). "Czasoprzestrzenną długość" odcinka $\chi_{Z_1Z_2}$ tej linii o początku Z_1 i końcu Z_2 obliczamy następująco: znajdujemy wektor styczny do linii świata (1.3),

$$\vec{\chi} = c\vec{e}_{ct} + v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z = c\vec{e}_{ct} + \vec{v} \tag{1.4}$$

($\vec{v}$ jest tu prędkością cząstki względem $\mathcal{U}$) i w drugim kroku stosujemy wzór (1.2):

$$|\chi_{Z_1Z_2}| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|\vec{\dot{\chi}} \bullet \vec{\dot{\chi}}|}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\vec{\dot{\chi}} \bullet \vec{\dot{\chi}}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2}\, dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - \vec{v}^2}\, dt,$$

gdzie t_i jest czasem zajścia w układzie $\mathcal{U}$ zdarzenia Z_i i gdzie w drugim kroku opuściliśmy wartość bezwzględną, ponieważ dla krzywej czasowej $\vec{\dot{\chi}} \bullet \vec{\dot{\chi}} > 0$.

Powyższa obliczona wielkość ma następującą interpretację fizyczną:

$$\frac{|\chi_{Z_1Z_2}|}{c} \equiv \Delta\tau$$

jest upływem czasu, jaki od zdarzenia Z_1 do zdarzenia Z_2 odmierzy zegar współporuszający się z rozważaną cząstką (przy dodatkowym założeniu, że mechanizm zegara jest nieczuły na przeciążenia doznawane podczas ruchu). Wielkość $\Delta\tau$ nazywana jest upływem *czasu własnego* cząstki.

Niech t_0 będzie dowolnie wybraną chwilą w układzie $\mathcal{U}$. Dla linii świata χ definiujemy

$$\tau(\bar{t}) := \frac{1}{c} \int_{t_0}^{\bar{t}} \sqrt{\vec{\dot{\chi}} \bullet \vec{\dot{\chi}}}\, dt. \tag{1.5}$$

Odwracając tak otrzymaną funkcję $t \mapsto \tau(t)$ do funkcji $\tau \mapsto t(\tau)$ możemy zreparametryzować linię świata χ daną wzorem (1.3) uzyskując krzywą

$$\tau \mapsto \tilde{\chi}(\tau) := \chi(t(\tau)) = \begin{pmatrix} ct(\tau) \\ x(t(\tau)) \\ y(t(\tau)) \\ z(t(\tau)), \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$$

o której możemy powiedzieć, że jest linią świata cząstki sparametryzowaną czasem własnym τ.

Wektor styczny do linii świata $\tilde{\chi}$ można przedstawić następująco:

$$\vec{\dot{\tilde{\chi}}} = \frac{d\tilde{\chi}}{d\tau} = \frac{d\chi}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\vec{\dot{\chi}}}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{\vec{\dot{\chi}}}{\frac{1}{c}\sqrt{\vec{\dot{\chi}} \bullet \vec{\dot{\chi}}}} = c\frac{\vec{\dot{\chi}}}{\sqrt{\vec{\dot{\chi}} \bullet \vec{\dot{\chi}}}}, \tag{1.6}$$

gdzie pochodną $d\tau/dt$ odczytaliśmy z definicji (1.5).

Widać stąd, że $\vec{\dot{\tilde{\chi}}}$ jest unormowany do wartości c. Jest on też skierowany ku przyszłości, ponieważ czas własny τ wzrasta wraz ze wzrostem czasu współrzędnościowego t. Płynie stąd wniosek, że $\vec{\dot{\tilde{\chi}}}$ jest czteroprędkością $\vec{U}$ rozważanej cząstki.

Podstawiając (1.4) do (1.6) otrzymujemy na zakończenie następujące wyrażenie na czteroprędkość:

$$\vec{U} = c\frac{\vec{\dot{\chi}}}{\sqrt{\vec{\dot{\chi}} \bullet \vec{\dot{\chi}}}} = c\frac{c\vec{e}_{ct} + \vec{v}}{\sqrt{c^2 - \vec{v}^2}} = \frac{c\vec{e}_{ct} + \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(c\vec{e}_{ct} + \vec{v}).$$

□

Zadanie 2. Układ inercjalny $\mathcal{U}'$ porusza się względem układu inercjalnego $\mathcal{U}$ z prędkością $\vec{v} = v\vec{e}_x$, a transformacje Lorentza pomiędzy współrzędnymi (ct, x, y, z) układu $\mathcal{U}$ a współrzędnymi $(ct', x', y',\, z')$ układu $\mathcal{U}'$ mają standardową postać. Para dodatnich półosi Oct i Oct' oraz para dodatnich półosi Ox i Ox' wycinają z hiperboli

$$H := \{\ (ct, x, y, z) \in \mathbb{M} \mid\ (ct)^2 - x^2 = \pm r^2,\ r > 0,\ y = 0 = z\ \} \tag{2.1}$$

dwa łuki. Obliczyć iloraz "czasoprzestrzennej długości" każdego z tych łuków i wartości r. Przedyskutować związek otrzymanych wyników z radianem jako miarą kąta w przestrzeni euklidesowej.

Rozwiązanie. Transformacje Lorentza pomiędzy współrzędnymi (ct, x, y, z) układu $\mathcal{U}$ a współrzędnymi (ct', x', y', z') układu $\mathcal{U}'$ mają standardową postać:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

gdzie

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \quad |\beta| < 1, \qquad\qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1.$$

Funkcja

$$]-1,1[\, \ni \beta \mapsto f(\beta) := \beta\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

ma pochodną

$$f'(\beta) = \frac{1}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} > 0,$$

jest więc rosnąca na całej swojej dziedzinie i w konsekwencji jest różnowartościowa. Z drugiej strony,

$$\lim_{\beta\to -1^+} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\infty, \qquad\qquad \lim_{\beta\to 1^-} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \infty,$$

co (w połączeniu z ciągłością i dziedziną w postaci pojedynczego przedziału) oznacza surjektywność. Funkcja (2.3) jest zatem bijekcją z $]-1,1[$ na $\mathbb{R}$.

Ponieważ sinus hiperboliczny jest bijekcją z $\mathbb{R}$ w siebie, więc dla każdej $\beta \in]-1,1[$ można znaleźć dokładnie jedną liczbę $\psi \in \mathbb{R}$ spełniającą

$$\beta\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sinh\psi. \tag{2.4}$$

(i na odwrót, dla każdej $\psi \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna liczba $\beta \in]-1,1[$, spełniająca powyższe równanie).

Mamy ponadto

$$\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1$$

i

$$\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1.$$

Z trzech powyższych równań oraz z dodatniości γ i $\cosh\psi$ wynika równość

$$\gamma = \cosh\psi.$$

Dzieląc stronami równanie (2.4) przez powyższe otrzymujemy

$$\beta = \operatorname{tgh}\psi.$$

Zależność odwrotna to

$$\psi = \operatorname{ar\,tgh}\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Transformacje Lorentza można zatem zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi & 0 & 0 \\ \sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

i nazwać, przez analogię do transformacji obrotów w zwykłej przestrzeni, *obrotem hiperbolicznym o kąt hiperboliczny* ψ.

Oś Oct' to zbiór wszystkich zdarzeń, dla których $x' = y' = z' = 0$, a oś Ox', dla których to zbiór wszystkich zdarzeń, dla których $ct' = y' = z' = 0$. Korzystając z transformacji (2.5) możemy otrzymać opis tych osi w układzie współrzędnych (ct, x, y, z). W przypadku osi Oct' zachodzi

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi & 0 & 0 \\ \sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct'\cosh\psi \\ ct'\sinh\psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

skąd mamy

$$\frac{ct}{x} = \operatorname{ctgh}\psi$$

czyli

$$ct = \operatorname{ctgh}\psi\, x. \tag{2.6}$$

Oś Ox':

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi & 0 & 0 \\ \sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\sinh\psi \\ x'\cosh\psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

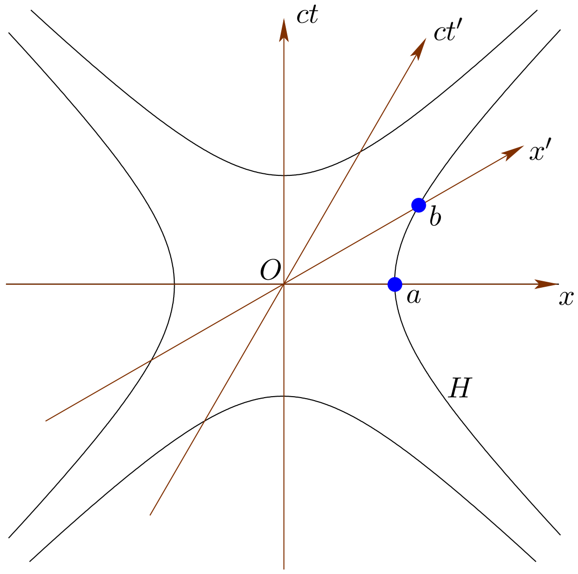
skąd mamy

$$\frac{ct}{x} = \operatorname{tgh}\psi$$

czyli

$$ct = \operatorname{tgh}\psi\, x. \tag{2.8}$$

Jak widać z powyższych obliczeń obie osie Oct' i Ox' zawierają się w płaszczyźnie $y = 0 = z$, dlatego też od tego momentu ograniczymy nasze rozważania do tej płaszczyzny.



Rys. 2: Hiperbola H i osie Oct' i Ox' we współrzędnych (ct, x)

Rysunek 2 przedstawia hiperbolę H zdefiniowaną warunkami (2.1) oraz osie Oct' i Ox' naniesione na podstawie wzorów (2.6) i (2.8) (pamiętajmy, że $\operatorname{tgh}\psi \operatorname{ctgh}\psi = 1$) na siatkę współrzędnych (ct, x).

Naszym zadaniem będzie teraz obliczenie "czasoprzestrzennej długości" łuku, jaki z hiperboli H wycinają dodatnie półosie Ox i Ox' — łuk ten jest częścią prawej gałęzi hiperboli leżącą pomiędzy punktami a i b na rysunku 2 i dlatego będziemy oznaczać go symbolem H_{ab}. Prawa gałąź hiperboli to podzbiór zbioru (2.1) zadany przez znak $-$ przy r^2 i warunek $x > 0$. Wobec tego gałąź tą możemy sparametryzować następująco:

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \chi(\lambda) = \begin{pmatrix} ct(\lambda) \\ x(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sinh\lambda \\ r\cosh\lambda \end{pmatrix} \in \text{płaszczyzny } y = 0 = z. \tag{2.9}$$

Współrzędne (ct, x) punktu a to

$$(0, r) = (r\sinh 0, r\cosh 0) = \chi(0), \tag{2.10}$$

a współrzędne punktu b będącego przecięciem prawej gałęzi hiperboli H i osi Ox' spełniają (patrz (2.1), (2.7) i rysunek 2)

$$(ct)^2 - x^2 = -r^2, \qquad ct = x'\sinh\psi > 0, \qquad x = x'\cosh\psi > 0.$$

Mamy stąd

$$(x'\sinh\psi)^2 - (x'\cosh\psi)^2 = (x')^2(\sinh^2\psi - \cosh^2\psi) = -(x')^2 = -r^2,$$

co (uwzględniając dodatniość r i x') daje

$$x' = r.$$

Zatem we współrzędnych (ct, x)

$$b = (r\sinh\psi, r\cosh\psi) = \chi(\psi).$$

Z powyższego wyniku i z równania (2.10) wynika, że łuk H_{ab} opisany jest odwzorowaniem (2.9) z parametrem λ ograniczonym do przedziału $[0, \psi]$.

Możemy teraz policzyć "czasoprzestrzenną długość" rozważanego łuku. Z definicji (1.2)

$$|H_{ab}| = \int_0^{\psi} \sqrt{|\vec{\chi} \bullet \vec{\chi}|}\, d\lambda.$$

Wektor styczny do krzywej (2.9) ma postać

$$\vec{\chi} = r \cosh \lambda\, \vec{e}_{ct} + r \sinh \lambda\, \vec{e}_x,$$

więc

$$\vec{\chi} \bullet \vec{\chi} = (r \cosh \lambda)^2 - (r \sinh \lambda)^2 = r^2.$$

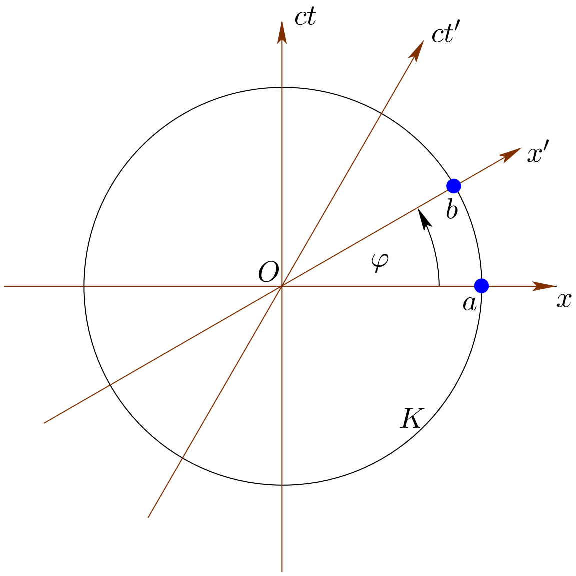
Mamy stąd

$$|H_{ab}| = \int_0^{\psi} r\, d\lambda = r\psi.$$

W konsekwencji szukany iloraz "czasoprzestrzennej długości" łuku H_{ab} i wartości r to

$$\frac{|H_{ab}|}{r} = \psi. \tag{2.11}$$

Ten sam wynik otrzymamy dzieląc "czasoprzestrzenną długości" łuku wycinanego z hiperboli H przez dodatnie półosie Oct i Oct' przez wartość r.



Rys. 3: Miara kąta φ w przypadku euklidesowym

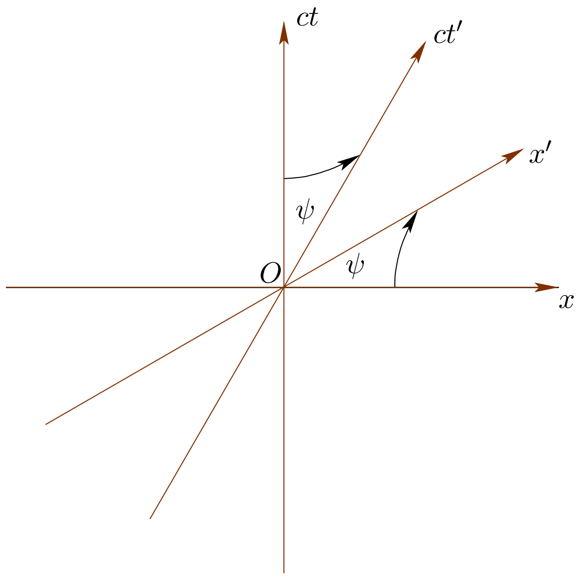
Gdyby geometria czasoprzestrzeni $\mathbb{M}$ w STW była geometrią euklidesową, to na pytanie o (naturalną) miarę kąta φ pomiędzy osiami Ox i Ox' odpowiedzielibyśmy następująco: w płaszczyźnie $y = 0 = z$ narysowalibyśmy okrąg K o środku O i promieniu r (patrz rysunek 3), obliczylibyśmy długość (nie dłuższego) łuku okręgu wyznaczonego przez punkty przecięcia dodatnich półosi Ox i Ox' z okręgiem K, i podzieliwszy otrzymaną długość przez r otrzymalibyśmy wartość kąta φ wyrażoną w radianach.

Zauważmy, że licząc iloraz (2.11) postąpiliśmy analogicznie używając obiektów odpowiednich z punktu widzenia geometrii czasoprzestrzeni $\mathbb{M}$. I tak, zamiast okręgu K użyliśmy hiperboli H. Okrąg K zdefiniowany jest następująco (porównaj z (2.1)):

$$K = \{ \ (ct, x, y, z) \in \mathbb{M} \mid \ (ct)^2 + x^2 = \pm r^2, \ r > 0, \ y = 0 = z \ \}$$

— innymi słowy, jest to zbiór wszystkich punktów leżących na płaszczyźnie $y = 0 = z$, których kwadrat (euklidesowej) odległości od punktu O jest równy $\pm r^2$. Zaś hiperbola (2.1) jest to zbiór wszystkich punktów leżących na płaszczyźnie $y = 0 = z$, których czasoprzestrzenny interwał liczony od punktu O jest równy $\pm r^2$. Z drugiej strony zamiast liczyć (euklidesową) długość łuku H_{ab} w naturalny sposób obliczyliśmy jej czasoprzestrzenny odpowiednik.

Widać stąd, że wielkość ψ pojawiająca się w transformacjach Lorentza (2.5) jak najbardziej zasługuje na miano kąta hiperbolicznego. Można tu nawet pójść o krok czy dwa dalej, i (i) powiedzieć, że ψ jest to kąt wyrażony w "radianach hiperbolicznych" oraz (ii) oznaczać na rysunkach kąt ψ za pomocą łuku hiperboli ze strzałką (skoro zwykły kąt jest oznaczany łukiem okręgu ze strzałką):



Rys. 4: Kąt hiperboliczny ψ

□