Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

Zadania na ćwiczenia - seria 12.
1 czerwca 2020 r.

Zadania przykładowe

Przykład 1.
Cząstka o masie m_o porusza się wzdłuż osi x pod wpływem siły $\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{e}}_x$ w inercjalnym układzie U. W czasie $t = 0$ znajduje się ona w punkcie $x = A$ a jej prędkość wynosi $v_0 = 0$. Znaleźć:
a) prędkość cząstki w funkcji położenia $v(x)$ w układzie U,
b) okres drgań,
c) granicę newtonowską uzyskanych w poprzednich podpunktach wielkości.

Rozwiązanie
a) Relatywistyczne równanie ruchu może być zapisane w następującej formie:

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu, \tag{1}$$

gdzie τ jest czasem własnym punktu materialnego, $K^\mu = (\frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}}{c}, \mathbf{K})$ czterosiłą oddziaływania innych ciał na ten punkt, a $\beta = v/c$. Pamiętając, że $\gamma d\tau = dt$ oraz $\mathbf{K} = \gamma\mathbf{F}$, równanie [1] na składowe przestrzenne rozważanego przypadku ma następującą postać:

$$m_0\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{dx}{dt}\right) = -kx. \tag{2}$$

Zauważmy, że:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{v}{c^2(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

oraz:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}. \tag{4}$$

Wykorzystując powyższe tożsamości, lewą stronę równania [2] możemy sprowadzić do następującej postaci:

$$m_o\gamma\frac{dv}{dt} + m_o v\frac{v}{c^2(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = \frac{m_o}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = \frac{m_o v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dx}. \tag{5}$$

W rezultacie równanie [2] sprowadza się do równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m_o}x, \tag{6}$$

a zatem:

$$\int_0^v \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}dv = -\omega_N^2\int_A^x xdx, \tag{7}$$

gdzie $\omega_N^2 = k/m_o$ jest częstością drgań w granicy newtonowskiej. W wyniku całkowania otrzymujemy:

$$c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}\omega_N^2(x^2 - A^2). \tag{8}$$

Za pomocą prostych przekształceń algebraicznych uzyskujemy wyrażenie na prędkość w funkcji położenia:

$$v(x) = \pm c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\omega_N^2}{2c^2}(x^2 - A^2)\right)^{-2}}, \tag{9}$$

gdzie znak "±" związany jest ze zwrotem wektora prędkości.
b) Ponownie korzystamy z metody rozdzielenia zmiennych i z równania [9] uzyskujemy następującą równość:

$$c\int_0^{T/4} dt = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\omega_N^2}{2c^2}(x^2 - A^2)\right)^{-2}}}, \tag{10}$$

stąd całkując lewą stronę powyższego równania, wprowadzając $T_0 = 2\pi/\omega$, $\epsilon = \omega_N A/c$ oraz $x' := x/A$ otrzymujemy wyrażenie na okres drgań:

$$T = \frac{2T_0\epsilon}{\pi c}\int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon(1 - x'^2)\right)^{-2}}}. \tag{11}$$

c) Zajmiemy się teraz granicą nierelatywistyczną, dla której $\epsilon = \omega_N A/c \ll 1$. Uzyskane wyrażenie możemy zapisać w następującej postaci:

$$v(x) = \pm\omega_N\sqrt{A^2 - x^2}\left[1 - \frac{3}{8}\epsilon^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^4\right). \tag{12}$$

Zauważmy, że wyrażenie przed nawiasem kwadratowym odpowiada newtonowskiemu wyrażeniu na prędkość jako funkcji położenia cząstki w polu siły $\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{e}}_x$. W podobny sposób uzyskujemy granicę newtonowską okresu drgań:

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{1 - x'^2}} = T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_o}{k}}, \tag{13}$$

a zatem ponownie wynik dobrze nam znany z zagadnienia oscylatora harmonicznego w mechanice newtonowskiej.

Przykład 2.
Cząstka o masie m_o znajduje się pod działaniem siły $\mathbf{F} = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3}$, gdzie k jest dodatnią stałą.
a) Pokazać, że zachowana jest energia i moment pędu:

$$E = \gamma m_o c^2 - \frac{k}{r}, \qquad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{14}$$

b) Znaleźć ruch cząstki.

Rozwiązanie
a) Równanie [1] możemy rozpisać na dwa równania, dla składowych przestrzennych i składowej zerowej:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma mc^2\right) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \tag{16}$$

co w rozważanym przypadku daje:

$$m_o\frac{d}{dt}(\gamma\mathbf{v}) = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3}, \tag{17}$$

$$m_o\frac{d}{dt}\left(\gamma c^2\right) = -\frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt}. \tag{18}$$

Pokażemy teraz, że energia jest zachowana:

$$\frac{dE}{dt} = m_o \frac{d}{dt}\left(\gamma c^2\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{r}\right) = -\frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt} + \frac{k}{r^2}\frac{dr}{dt} = 0, \tag{19}$$

gdzie w przedostatnim kroku skorzystaliśmy z równania [18]. Moment pędu natomiast:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{L} &= \mathbf{v}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}\\ &= \mathbf{v}\times\gamma\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}\left(\gamma m_o \mathbf{v}\right)\\ &= -\mathbf{r}\times\frac{k\mathbf{r}}{r^3}\\ &= 0,\end{aligned} \tag{20}$$

gdzie skorzystaliśmy z własności iloczynu wektorowego oraz równania [17].
b) Przejdźmy teraz do wyznaczenia ruchu cząstki. Zauważmy, że, podobnie jak w przypadku nierelatywistycznym, dla ruchu płaskiego, tzn. kiedy $\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$ leżą w jednej płaszczyźnie, wektor momentu pędu $\mathbf{L}$ ma stały kierunek prostopadły do tej płaszczyzny. I odwrotnie, z zachowania wektora $\mathbf{L}$, wnioskujemy, że dany ruch jest płaski. W związku z tym do opisu ruchu wykorzystamy współrzędne biegunowe r i θ:

$$L = \gamma m_o r^2 \frac{d\theta}{dt} = m_o r^2 \frac{d\theta}{d\tau}. \tag{21}$$

Z wykładu (notatki wykładowe str. 58) wiemy, że:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2. \tag{22}$$

W współrzędnych biegunowych $d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ a zatem otrzymujemy:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2. \tag{23}$$

Wynika stąd następująca równość:

$$c^2 = c^2\gamma - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2, \tag{24}$$

gdzie skorzystaliśmy z $\gamma d\tau = dt$. Powyższą równość możemy sprowadzić do następującej postaci:

$$c^2(1-\gamma) = -\left(\frac{d\theta}{d\tau}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2, \tag{25}$$

a następnie wyrugować γ i $\frac{d\theta}{d\tau}$ korzystając z, odpowiednio, wyrażenia na energię w [14] i moment pędu [21]:

$$c^2 - \frac{1}{m_o c^2}\left(E + \frac{k}{m}\right)^2 = -\left(\frac{L}{m_o r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{L^2}{m_o^2 r^2}. \tag{26}$$

Zamieniając zmienne: $r = 1/w$ oraz różniczkując obie strony powyższego równania po θ otrzymujemy:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{k^2}{c^2 L^2}\right) w = \frac{kE}{c^2 L^2}. \tag{27}$$

Z podobnym równaniem różniczkowym mieliśmy do czynienia w zadaniu 3, serii 4 zadań na ćwiczenia (równanie [38]), a zatem wiemy jak wygląda ogólna postać jego rozwiązania. Zależy ona jednak od znaku wyrażenia stojącego przy w. Najpierw rozważymy przypadek, kiedy jest ono większe od zera:

$$0 < \left(1 - \frac{k^2}{c^2 L^2}\right) =: \lambda^2, \tag{28}$$

gdzie wprowadziliśmy stałą λ. W tej sytuacji ogólnym rozwiązaniem równania [27] jest:

$$w(\theta) = A\cos(\lambda(\theta-\theta_0)) + \frac{kE}{\lambda^2 c^2 L^2}, \tag{29}$$

gdzie A i θ_0 są stałe, a $\lambda \in (0;1]$. Wracając do współrzędnych biegunowych, trajektoria cząstki opisana jest następująco:

$$r(\theta) = \frac{1}{A\cos(\lambda(\theta-\theta_0)) + \frac{kE}{\lambda^2 c^2 L^2}}, \tag{30}$$

a stałą A znajdujemy podstawiając powyższe wyrażenie do równania [26] i w konsekwencji otrzymujemy:

$$A^2 = \frac{m_0^2 c^2}{\lambda^4 L^2}\left(\frac{E^2}{m_0^2 c^4} - \lambda^2\right). \tag{31}$$

W przypadku, kiedy:

$$0 > \left(1 - \frac{k^2}{c^2 L^2}\right) = -\lambda^2, \tag{32}$$

rozwiązaniem równania [26] jest:

$$r(\theta) = \frac{1}{A\cosh(\lambda(\theta-\theta_0)) + \frac{kE}{\lambda^2 c^2 L^2}}. \tag{33}$$

Zauważmy, że ruch cząstki będzie ograniczony jeśli $E < \gamma m_0 c^2$ co wynika bezpośrednio z wyrażenia na energię [14].

Przykład 3.
Względem obserwatora $\mathcal{O}$ porusza się wzdłuż osi x ze stałą prędkością v obserwator $\mathcal{O}'$. W układzie $\mathcal{O}$ emitowane są fotony w płaszczyźnie xy w taki sposób, że kierunek ich pędu tworzy kąt φ z osią x. Znaleźć energię E' i kąt φ' fotonu w układzie związanym z obserwatorem $\mathcal{O}'$.

Rozwiązanie
W pierwszej kolejności zajmiemy się znalezieniem wyrażenia na energię fotonu w układzie związanym z obserwatorem $\mathcal{O}'$. Wiemy, że zerowa składowa czteropędu p^μ wyraża się przez całkowitą energią relatywistyczną w następujący sposób:

$$E = cp^0. \tag{34}$$

Wiemy też, że czterowektory (czterotensory pierwszego rzędu) są wielkościami, które przekształcają się przy przekształceniu Lorentza jak (x^μ), czyli:

$$a^\mu = \sum_{\rho=0}^{3} L^\mu{}_\rho a'^\rho. \tag{35}$$

Macierz transformacji Lorentza w przypadku, kiedy względem obserwatora $\mathcal{O}$ porusza się wzdłuż osi x ze stałą prędkością v obserwator $\mathcal{O}'$ ma następującą postać:

$$L^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

W rozważanym przez nas przypadku, chcemy znaleźć składowe czteropędu w układzie primowanym, a zatem możemy skorzystać prawa transformacji czterowektorów [35] i spojrzeć na obserwatora $\mathcal{O}$ jako obserwatora poruszającego się z prędkością $-v$ wzdłuż osi x w układzie obserwatora $\mathcal{O}'$, stąd otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} E'/c \\ p'^x \\ p'^y \\ p'^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E/c \\ p^x \\ p^y \\ p^z \end{bmatrix} \tag{37}$$

Z powyższego równania uzyskujemy wyrażenie na energię E' w układzie związanym z obserwatorem $\mathcal{O}'$:

$$E' = \gamma E - \gamma v p^x. \tag{38}$$

Wykorzystując związek energii fotonu z jego pędem $E = pc$, znajdujemy składową p^x czteropędu p^μ:

$$p^x = \frac{E}{c}\cos\varphi. \tag{39}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie na p^x do równania [38] otrzymujemy:

$$E' = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right)E. \tag{40}$$

Aby wyznaczyć kąt ϕ' fotonu w układzie związanym z obserwatorem $\mathcal{O}'$ posłużymy się wektorem prędkości fotonu $\mathbf{v}_\gamma$, który w układzie związanym z obserwatorem $\mathcal{O}$ możemy zapisać następująco:

$$\mathbf{v}_\gamma = c\cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_x + c\sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_y. \tag{41}$$

Korzystając z prawa transformacji prędkości (notatki wykładowe str. 58) otrzymujemy:

$$v'^x_\gamma = \frac{v^x_\gamma - v}{1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_\gamma/c^2} = \frac{c\cos\varphi - v}{1 - v\cos\varphi/c}, \tag{42}$$

$$v'^y_\gamma = \frac{v^y_\gamma}{\gamma\left(1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_\gamma/c^2\right)} = \frac{c\sin\varphi}{\gamma\left(1 - v\cos\varphi/c\right)}. \tag{43}$$

Sprawdzimy teraz, czy długość wektora prędkości fotonu w obu układach jest taka sama:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(v'^x_\gamma\right)^2 + \left(v'^y_\gamma\right)^2} &= \sqrt{\frac{c^2\cos^2\varphi - 2vc\cos\varphi + v^2 + c^2\sin^2\varphi\left(1 - v^2/c^2\right)}{\left(1 - v\cos\varphi/c\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{c^2 - 2vc\cos\varphi + v^2 - v^2\sin^2\varphi}{\left(1 - v\cos\varphi/c\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{c^2 - 2vc\cos\varphi + v^2\cos^2\varphi}{\left(1 - v\cos\varphi/c\right)^2}} \\
&= c.
\end{aligned} \tag{44}$$

Widzimy zatem, że uzyskany wynik jest zgodny z drugim postulatem szczególnej teorii względności, zgodnie z którym prędkość światła ma taką samą wartość we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Cosinus kąta φ' znaleźć możemy posługując się stosunkiem x-owej składowej prędkości fotonu w układzie związanym z obserwatorem $\mathcal{O}'$ do jego długości:

$$\cos\varphi' = \frac{v'^x_\gamma}{c} = \frac{c\cos\varphi - v}{c - v\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi - \beta}{1 - \beta\cos\varphi}. \tag{45}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Pokazać, że równanie ruchu cząstki o masie m_o i ładunku q w polu magnetycznym $\mathbf{B}$ można zapisać w postaci:

$$\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{46}$$

Znaleźć ruch cząstki w jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

Rozwiązanie
Relatywistyczne równania ruchu dla naładowanej cząstki w polu elektromagnetycznym mają postać (notatki wykładowe, str. 62):

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\mathbf{v}) = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \tag{47}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma mc^2\right) = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}. \tag{48}$$

Rozważamy przypadek kiedy $\mathbf{E} = 0$, a zatem z drugiego równania wynika:

$$\frac{d}{dt}\gamma = 0. \tag{49}$$

Natomiast pierwsze równanie ma postać:

$$\gamma m_0\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \tag{50}$$

co należało pokazać. Podstawiając $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ do powyższego równania otrzymujemy:

$$\gamma m_0\dot{v}_x = qBv_y, \tag{51}$$

$$\gamma m_0\dot{v}_y = -qBv_x, \tag{52}$$

$$\gamma m_0\dot{v}_z = 0. \tag{53}$$

Aby znaleźć v_x i v_y zróżniczkujemy obie strony pierwszego równania po czasie, a następnie podstawimy do niego wyrażenie na $\dot{v}_y$ z drugiego, otrzymujemy w ten sposób:

$$\ddot{v}_x + \frac{q^2B^2}{m^2\gamma^2}v_x = 0. \tag{54}$$

Rozwiązanie tego równania zapiszemy w następującej postaci:

$$v_x(t) = A\sin(\omega t) + v_{x_0}\cos(\omega t), \tag{55}$$

gdzie $\omega = \frac{qB}{m\gamma}$ oraz $v_{x_0} = v_x(0)$. Otrzymany wynik różniczkujemy po czasie i podstawiamy do równania [51], co daje:

$$v_y(t) = A\cos(\omega t) - v_{x_0}\sin(\omega t), \tag{56}$$

gdzie $A = v_{y_0}$. Ruch cząstki znajdujemy całkując równania: [53], [55] oraz [56], w rezultacie:

$$x(t) = -\frac{v_{y_0}}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{v_{x_0}}{\omega}\sin(\omega t) + C, \tag{57}$$

$$y(t) = \frac{v_{y_0}}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{v_{x_0}}{\omega}\cos(\omega t) + D, \tag{58}$$

$$z(t) = v_{z_0}t + z_0, \tag{59}$$

gdzie stałe C, D, z_0 są zadane przez warunki początkowe.

Zadanie 2.
Uogólnić rozważania z przykładu 2 na cząstkę poruszającą się w sferycznie symetrycznym potencjale $V(r)$, tj. pokazać, że energia i moment pędu są zachowane, a następnie, wyprowadzić równanie ruchu wyrażone za pomocą zmiennej $w(\theta) := \frac{1}{r(\theta)}$ będące uogólnieniem równania [27].

Rozwiązanie
Równanie [1] możemy w rozważanym przypadku zapisać następująco:

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = F(r)\frac{dr}{dt}, \tag{60}$$
$$\frac{d}{dt}(\gamma m\mathbf{v}) = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{61}$$

gdzie $F(r) = -\frac{dV}{dr}$. Pokażemy najpierw, że energia cząstki, która możemy zapisać następująco:

$$E = \gamma mc^2 + V(r) \tag{62}$$

jest wielkością zachowaną. Korzystając z równania [60] oraz $\frac{dV}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{dV}{dr}$ otrzymujemy:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma mc^2) + \frac{dV}{dt} = F(r)\frac{dr}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{dV}{dr} = 0. \tag{63}$$

Sprawdzimy teraz, że moment pędu jest zachowany:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \mathbf{v}\times\gamma m_0\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(\gamma m_o\mathbf{v}) \tag{64}$$
$$= \mathbf{r}\times F(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = 0. \tag{65}$$

Wyprowadzimy teraz równanie ruchu cząstki w sferycznie symetrycznym potencjale $V(r)$. W przykładzie drugim wyprowadziliśmy następujące równanie:

$$c^2(\gamma - 1) = \left(\frac{d\theta}{d\tau}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2. \tag{66}$$

Zgodnie z treścią zadania wprowadzimy zmienną $w = \frac{1}{r}$ a następnie zróżniczkujemy obie strony powyższego równania po θ i w rezultacie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{d\theta^2} + w &= \frac{\frac{d}{d\theta}\left[\frac{(\gamma^2-1)m^2c^2}{L^2}\right]}{2\frac{dw}{d\theta}}\\
&= \frac{m^2c^2\gamma\frac{d\gamma}{d\theta}}{L^2\frac{dw}{d\theta}}\\
&= \frac{E-V}{L^2c^2\frac{dw}{d\theta}}\frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}(\gamma mc^2)\\
&= \frac{E-V}{L^2c^2\frac{dw}{d\theta}}F(r)\frac{dt}{d\theta}\frac{dr}{dt}\\
&= -\frac{E-V}{L^2c^2w^2}F(r),\end{aligned} \tag{67}$$

gdzie skorzystaliśmy z [60] oraz [21]. Zauważmy, że podstawiając do otrzymanego równania $F(r) = -\frac{k}{r^2}$ i $V = -\frac{k}{r}$ z poprzedniego zadania, otrzymujemy równanie [27].

Zadanie 3.
Względem obserwatora $\mathcal{O}$ wzdłuż osi x leci mezon π^0 o energii całkowitej równej podwójnej energii spoczynkowej mezonu, $E = 2m_\pi c^2$. Mezon π^0 rozpada się następnie na dwa fotony: $\pi^0 \to 2\gamma$. W układzie związanym z mezonem fotony rozlatują się w przeciwnych kierunkach osi y'. Korzystając z wyników otrzymanych w przykładzie 3, znaleźć energię i kąt, jaki tworzą rozlatujące się fotony z osią x względem układu odniesienia związanego:
a) z mezonem π^0,
b) z obserwatorem $\mathcal{O}$.

Rozwiązanie
a) W układzie związanym z mezonem π^0, zgodnie z treścią zadania, rozlatujące się fotony tworzą kąt $\pi/2$ z osią x'. Jeśli chodzi o energię fotonu E'_γ jest ona równa połowie energii mezonu E'_π w tym układzie, co wynika z zasady zachowania energii. W rozpatrywanym układzie odniesienia mezon spoczywa, a zatem jego energia jest równa energii spoczynkowej mezonu: $E'_\pi = m_\pi c^2$. Wynika stąd, że energia każdego z fotonów w układzie odniesienia związanym z mezonem wynosi: $E'_\gamma = \frac{1}{2} m_\pi c^2$.

b) W układzie odniesienia związanym z obserwatorem $\mathcal{O}$ mamy:

$$E_\pi^2 = m_\pi^2 c^4 + p_x^2 c^2 = 4m_\pi^2 c^4, \tag{68}$$

gdzie ostatnia równość wynika z treści zadania. Otrzymujemy stąd, że:

$$p_x = \sqrt{3}mc = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}}. \tag{69}$$

Z powyższej relacji wynika, że:

$$v_x = \frac{\sqrt{3}}{2} c, \tag{70}$$

lub $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Podstawiając otrzymany wynik mając na uwadze, że $\varphi' = \pi/2$, do wzoru [45] znajdujemy kąt rozlatujących się fotonów w układzie związanym z obserwatorem $\mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} \cos\varphi = \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \tag{71}$$

Z zasady zachowania energii wynika, że energia fotonu wynosi:

$$E_\gamma = \frac{1}{2} E_\pi = m_\pi c^2. \tag{72}$$

Denis Dobkowski-Ryłko