Mechanika i STW
Ćwiczenia wykładowe nr 12
4 czerwca 2020

Zadanie 1. Czy jedynym produktem anihilacji elektronu i pozytonu (antyelektronu) może być pojedynczy foton?

Rozwiązanie. Zasada zachowania energii i pędu zastosowana do procesu anihilacji cząstek mówi, że suma czterowektorów pędu cząstek przed anihilacją musi być równa sumie czterowektorów pędu cząstek po anihilacji (tzn. cząstek będących produktem anihilacji).

W naszym przypadku oznacza to, że jeżeli elektron i pozyton anihilują dając w rezultacie pojedynczy foton to

$$\vec{P}_e + \vec{P}_p = \vec{P}_f, \tag{1.1}$$

gdzie $\vec{P}_e$, $\vec{P}_p$ i $\vec{P}_f$ są czteropędami, odpowiednio, elektronu, pozytonu i fotonu.

Jeżeli $\vec{P}$ jest czteropędem cząstki o masie spoczynkowej $m \geq 0$, to

$$\vec{P} \bullet \vec{P} = m^2 c^2,$$

gdzie $\bullet$ jest czasoprzestrzennym iloczynem skalarnym, omawianym na poprzednich ćwiczeniach wykładowych. Mamy stąd

$$\vec{P}_e \bullet \vec{P}_e = m_e^2 c^2 > 0, \qquad \vec{P}_p \bullet \vec{P}_p = m_p^2 c^2 > 0, \qquad \vec{P}_f \bullet \vec{P}_f = 0,$$

jako, że masy spoczynkowe m_e elektronu i m_p pozytonu są niezerowe (w rzeczywistości $m_e = m_p$), a foton jest cząstką bezmasową.

Na mocy zasady zachowania energii-pędu (1.1) i zerowania się kwadratu czteropędu $\vec{P}_f$ kwadrat sumy $\vec{P}_e + \vec{P}_p$ również powinien się zerować:

$$0 = (\vec{P}_e + \vec{P}_p) \bullet (\vec{P}_e + \vec{P}_p) = \vec{P}_e \bullet \vec{P}_e + 2\vec{P}_e \bullet \vec{P}_p + \vec{P}_p \bullet \vec{P}_p = m_e^2 c^2 + m_p^2 c^2 + 2\vec{P}_e \bullet \vec{P}_p. \tag{1.2}$$

Ostatni ze składników powyżej najłatwiej jest obliczyć w układzie spoczynkowym jednej z cząstek np. elektronu. W tym układzie

$$\vec{P}_e = m_e c\, \vec{e}_{ct}, \qquad \vec{P}_p = \frac{m_p}{\sqrt{1 - v_p^2/c^2}} (c\, \vec{e}_{ct} + \vec{v}_p),$$

gdzie $\vec{v}_p$ jest prędkością pozytonu w tym układzie, a v_p jej wartością. Mamy stąd

$$\vec{P}_e \bullet \vec{P}_p = \frac{m_e m_p c^2}{\sqrt{1 - v_p^2/c^2}} > 0$$

i w konsekwencji równanie (1.2) przyjmuje postać

$$0 = m_e^2 c^2 + m_p^2 c^2 + 2 \frac{m_e m_p c^2}{\sqrt{1 - v_p^2/c^2}}.$$

Równanie to jednak nie może być spełnione, gdyż po jego prawej stronie mamy sumę trzech dodatnich wyrazów, która nigdy nie jest zerem.

Wnioskujemy stąd, że pojedynczy foton nie może być jedynym produktem anihilacji elektronu i pozytonu, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy do czynienia z naruszeniem zasady zachowania energii-pędu. □

Zadanie 2. Zjawisko Comptona Foton o energii E zderza się z nieruchomym elektronem. Znaleźć zależność energii rozproszonego fotonu od kąta rozproszenia.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że przed zderzeniem z elektronem foton porusza się wzdłuż osi Ox zgodnie z jej zwrotem (rysunek 1), wtedy jego czteropęd ma postać

$$\vec{P}_f = \frac{E}{c}\vec{e}_{ct} + p_x\vec{e}_x,$$

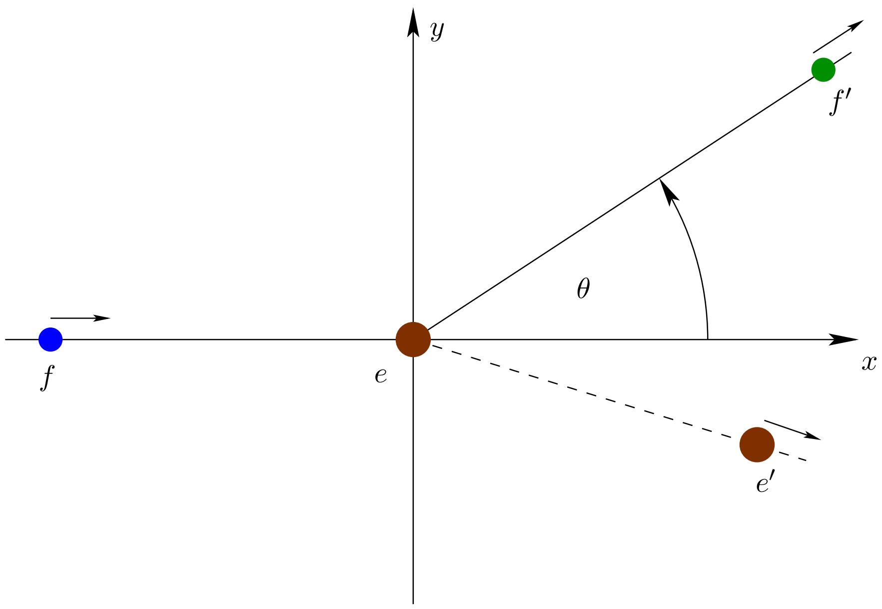
gdzie $p_x > 0$, i spełnia

$$0 = \vec{P}_f \bullet \vec{P}_f = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2. \tag{2.1}$$

Spoczywający przed zderzeniem elektron ma czteropęd

$$\vec{P}_e = m_e c\, \vec{e}_{ct},$$

gdzie m_e jest masą elektronu.



Rys. 1: Foton f i elektron e przed zderzeniem oraz foton f' i elektron e' po zderzeniu

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że po zderzeniu foton porusza się po półprostej leżącej w "górnej" półpłaszczyźnie Oxy (danej warunkiem $y > 0$). Jego czteropęd po zderzeniu będzie przedstawiał się następująco

$$\vec{P}'_f = \frac{E'}{c}\vec{e}_{ct} + p'_x\vec{e}_x + p'_y\vec{e}_y,$$

gdzie E' jest szukaną energią rozproszonego fotonu, i będzie spełniał

$$0 = \vec{P}'_f \bullet \vec{P}'_f = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2_x - p'^2_y. \tag{2.2}$$

Kąt rozproszenia czyli kąt pomiędzy dodatnią półosią Ox a półprostą, po której po zderzeniu porusza się foton wynosi θ i w konsekwencji

$$p'_x = p' \cos\theta, \qquad\qquad p'_y = p' \sin\theta, \tag{2.3}$$

gdzie p' jest wartością pędu fotonu po zderzeniu.

Niech

$$\vec{P}'_e = \frac{E'_e}{c}\vec{e}_{ct} + P'_x\vec{e}_x + P'_y\vec{e}_y + P'_z\vec{e}_z$$

będzie czteropędem elektronu po zderzeniu (E'_e jest tu energią cząstki). Zachodzi

$$m_e^2c^2 = \vec{P}'_e \bullet \vec{P}'_e = \frac{E_e'^2}{c^2} - P_x'^2 - P_y'^2 - P_z'^2. \tag{2.4}$$

Zasada zachowania energii-pędu zastosowana do zderzenia rozważanych tu cząstek przyjmuje postać

$$\vec{P}_f + \vec{P}_e = \vec{P}'_f + \vec{P}'_e.$$

Wynikają z niej cztery równania na składowe czteropędów:

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} + m_e c &= \frac{E'}{c} + \frac{E'_e}{c}, & p_x &= p'_x + P'_x, \\ 0 &= p'_y + P'_y, & 0 &= P'_z. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Z równania (2.1) wobec dodatniości p_x mamy

$$p_x = \frac{E}{c}$$

Z kolei równanie (2.2) daje się przepisać w postaci

$$0 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2,$$

skąd mamy równość $p' = E'/c$ i w konsekwencji równania (2.3) przyjmują postać

$$p'_x = \frac{E'}{c}\cos\theta, \qquad\qquad p'_y = \frac{E'}{c}\sin\theta.$$

Podstawiając te wyniki do drugiego i trzeciego z równań (2.5) otrzymujemy

$$P'_x = \frac{E}{c} - \frac{E'}{c}\cos\theta, \qquad\qquad P'_y = -\frac{E'}{c}\sin\theta.$$

Wstawienie powyższych równań i czwartego z równań (2.5) do równania (2.4) daje

$$\frac{E_e'^2}{c^2} = m_e^2c^2 + \Big(\frac{E}{c} - \frac{E'}{c}\cos\theta\Big)^2 + \frac{E'^2}{c^2}\sin^2\theta.$$

Z drugiej strony z pierwszego z równań (2.5) mamy

$$\frac{E_e'^2}{c^2} = \Big(\frac{E}{c} + m_e c - \frac{E'}{c}\Big)^2.$$

Porównanie dwóch ostatnich równań daje (po przemnożeniu przez c^2)

$$m_e^2c^4+E^2-2EE'\cos\theta+E'^2\cos^2\theta+E'^2\sin^2\theta = E^2+m_e^2c^4+E'^2+2Em_ec^2-2EE'-2E'm_ec^2$$

czyli

$$-EE'\cos\theta = Em_ec^2 - EE' - E'm_ec^2.$$

Stąd można już wyliczyć szukaną zależność energii E' rozproszonego fotonu od kąta rozproszenia θ:

$$E' = \frac{m_ec^2}{E(1-\cos\theta)+m_ec^2}E.$$

Zauważmy na zakończenie, że skoro $E(1-\cos\theta) > 0$ dla $0 < \theta \leq \pi$ to w przypadku rozproszenia z niezerowym kątem θ

$$\frac{m_ec^2}{E(1-\cos\theta)+m_ec^2} < 1$$

i w konsekwencji energia E' fotonu rozproszonego jest mniejsza niż energia E fotonu przed rozproszeniem, co na rysunku 1 zaznaczono kolorami (energia poszczególnych fotonów w wiązce światła niebieskiego jest większa od energii fotonów w wiązce światła zielonego). □

Zadanie 3. W układzie inercjalnym $\mathcal{U}$ szczególnej teorii względności na cząstkę o niezerowej masie spoczynkowej m działa stała w czasie i jednorodna siła $\vec{F}$. Wypisać lagranżjan tej cząstki i rozwiązać wynikające z niego równania ruchu.

Rozwiązanie. W STW lagranżjan cząstki podlegającej w ustalonym układzie inercjalnym $\mathcal{U}$ działaniu siły potencjalnej $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ma postać

$$L = S - V,$$

gdzie funkcja

$$S = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

zależna od wartości v prędkości cząstki w układzie $\mathcal{U}$ oraz potencjał V są przedstawione jako funkcje (i) współrzędnych opisujących położenie cząstki i (ii) pochodnych tych współrzędnych po czasie t mierzonym w układzie $\mathcal{U}$.

Dla prostoty zorientujmy osie kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y, z) w układzie $\mathcal{U}$ w ten sposób, że siła $\vec{F} = a\vec{e}_z$, gdzie $a > 0$ jest stałą. Wygodnie będzie wyrazić tą stałą w postaci $a = mc\alpha$. Wtedy potencjałem siły $\vec{F}$ będzie funkcja

$$V(x, y, z) = -mc\alpha z.$$

Zatem lagranżjan rozważanej cząstki przyjmie postać

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}} + mc\alpha z.$$

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju mają w STW taką samą postać jak w mechanice newtonowskiej:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Dlatego też w celu wypisania tych równań dla cząstki rozważanej w zadaniu obliczamy standardowo następujące pochodne:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -mc^2 \frac{-2\frac{\dot{x}}{c^2}}{2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = mc\alpha.$$

Widać z powyższego, że współrzędne x i y są cykliczne. Zatem

$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc\kappa_x = \text{const.}, \qquad \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc\kappa_y = \text{const.}. \tag{3.1}$$

Równanie na $z(t)$,

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\Big) - mc\alpha = 0,$$

po odcałkowaniu po czasie t daje

$$\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc\alpha t + mc\kappa_z, \tag{3.2}$$

gdzie $mc\kappa_z$ jest stałą całkowania.

Każde z równań (3.1) i (3.2) można teraz: pomnożyć przez $\sqrt{1-v^2/c^2}$, podzielić przez m i podnieść stronami do kwadratu. Tak uzyskane trzy równania można teraz dodać stronami otrzymując

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (c^2 - v^2)\big(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + (\kappa_z + \alpha t)^2\big) \equiv (c^2 - v^2) f(t).$$

Z równania tego łatwo można wyliczyć iloraz

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{f}{1+f}$$

i pierwiastek

$$\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{1}{\sqrt{1+f}}.$$

Równania (3.1) i (3.2) możemy teraz przypisać w formie gotowej do scałkowania:

$$\dot{x} = \frac{c\kappa_x}{\sqrt{1+f(t)}}, \qquad \dot{y} = \frac{c\kappa_y}{\sqrt{1+f(t)}}, \qquad \dot{z} = \frac{c(\kappa_z + \alpha t)}{\sqrt{1+f(t)}}. \tag{3.3}$$

Całkując obie strony pierwszego z powyższych równań po czasie t otrzymujemy

$$x(t) = \int \frac{c\kappa_x}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2+(\kappa_z+\alpha t)^2}}\,dt = \left\{ \begin{matrix} u = \frac{\kappa_z+\alpha t}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2}}, \\ \frac{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2}}{\alpha}\,du = dt \end{matrix} \right\} = \frac{c\kappa_x}{\alpha}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} =$$

$$= \frac{c\kappa_x}{\alpha}\,\mathrm{ar\,sinh}(u) + C_x = \frac{c\kappa_x}{\alpha}\,\mathrm{ar\,sinh}\Big(\frac{\kappa_z+\alpha t}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2}}\Big) + C_x,$$

gdzie C_x jest stałą całkowania. Podobnie,

$$y(t) = \frac{c\kappa_y}{\alpha} \operatorname{ar\,sinh}\Big(\frac{\kappa_z + \alpha t}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2}}\Big) + C_y.$$

Trzecie z równań (3.3) całkujemy następująco:

$$\begin{aligned} z(t) = c\int \frac{(\kappa_z+\alpha t)}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2+(\kappa_z+\alpha t)^2}}\,dt &= \left\{ \begin{matrix} u = 1+\kappa_x^2+\kappa_y^2+(\kappa_z+\alpha t)^2, \\ du = 2\alpha(\kappa_z+\alpha t)\,dt \end{matrix} \right\} = \\ &= \frac{c}{2\alpha}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{c}{\alpha}\sqrt{u} + C_z = \frac{c}{\alpha}\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2+(\kappa_z+\alpha t)^2} + C_z, \end{aligned}$$

gdzie C_z jest stałą całkowania.

Na zakończenie warto porównać otrzymany ruch z ruchem $t \mapsto (x_N(t), y_N(t), z_N(t))$ cząstki o masie m pod działaniem stałej w czasie i jednorodnej siły $\vec{F} = mc\alpha\,\vec{e}_z$ w mechanice newtonowskiej:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c\kappa_x}{\alpha} \operatorname{ar\,sinh}\Big(\frac{\kappa_z + \alpha t}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2}}\Big) + C_x, & x_N(t) &= v_{0x}t + x_0, \\ y(t) &= \frac{c\kappa_y}{\alpha} \operatorname{ar\,sinh}\Big(\frac{\kappa_z + \alpha t}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2}}\Big) + C_y, & y_N(t) &= v_{0y}t + y_0, \\ z(t) &= \frac{c}{\alpha}\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2+(\kappa_z+\alpha t)^2} + C_z, & z_N(t) &= \frac{c\alpha}{2}t^2 + v_{0z}t + z_0 \end{aligned}$$

— v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} oraz x_0, y_0, z_0 są tu stałymi opisującymi warunki początkowe w chwili $t_0 = 0$. Pomijając bardziej skomplikowaną postać rozwiązań równań ruchu w STW, bardziej istotna różnica pomiędzy powyższymi rozwiązaniami polega na tym, że w mechanice newtonowskiej składowe prędkości w kierunkach prostopadłych do kierunku siły $\vec{F}$ pozostają stałe w czasie:

$$\dot{x}_N(t) = v_{0x} = \text{const.}, \qquad \dot{y}_N(t) = v_{0y} = \text{const.}.$$

Innymi słowy, cząstka newtonowska nie doznaje przyspieszenia w kierunku prostopadłym do kierunku siły. W przypadku relatywistycznym, składowe prędkości w kierunkach prostopadłych do kierunku siły nie są stałe w czasie[1] — równania (3.3) na $\dot{x}$ i $\dot{y}$ zapisane w jawny sposób mają postać

$$\dot{x} = \frac{c\kappa_x}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2+(\kappa_z+\alpha t)^2}}, \qquad \dot{y} = \frac{c\kappa_y}{\sqrt{1+\kappa_x^2+\kappa_y^2+(\kappa_z+\alpha t)^2}}.$$

Tym samym cząstka relatywistyczna doznaje przyspieszenia w kierunku prostopadłym do $\vec{F}$. □

[1] Stałe w czasie są składowe (relatywistycznego) pędu cząstki w kierunkach prostopadłych do kierunku siły — patrz równania (3.1).