Mechanika i szczególna teoria względności 2019/2020

Zadania na ćwiczenia – seria 13.
8 czerwca 2020 r.

Zadania przykładowe

Przykład 1.
Cząstka o masie m i ładunku q porusza się w stałym polu magnetycznym $\vec{B} = B\hat{e}_z$. Zapisać Lagranżjan i równania Eulera-Lagrange'a dla tego układu.

Sprawdzić, że wynik jest zgodny ze wzorem pojawiającym się w poprzedniej serii zadań (Zadania na ćwiczenia – seria 12.: Zadanie 1).

Rozwiązanie.
W szczególnej teorii względności Lagranjżan naładowanej cząstki znajdującej się w polu elektromagentycznym, sparametryzowany czasem niezależnego inercjalnego obserwatora, wyraża się następująco (patrz. wykład):

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi(\vec{r}, t) + q\vec{v}\vec{A}(\vec{r}, t), \tag{P1.1}$$

gdzie $(\varphi/c, \vec{A})$ to czteropotencjał pola magnetycznego, związany z wartościami odpowiednich pól następującą relacją:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \tag{P1.2}$$

gdzie ∇ to operator nabla $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$ dla współrzędnych przestrzennych, zatem $\nabla\varphi$ jest gradientem potencjału φ, a $\nabla \times \vec{A}$ – rotacją potencjału wektorowego $\vec{A}$.

Należy podkreślić, że czteropotencjał $(\varphi/c, \vec{A})$ **nie jest** jednoznacznie zdefiniowany przez wartości pól $\vec{E}, \vec{B}$ – tym samym polom mogą odpowiadać różne czteropotencjały (swobodę tę nazywamy swobodą cechowania pola elektromagnetycznego). W związku z tym również postać Lagranżjanu może się nieco różnić, w zależności od przyjętej konwencji – nie wpłynie to jednak na końcowo otrzymane równania ruchu.

W treści zadania podano wartość pola magnetycznego $\vec{B} = (0, 0, B)^T$, zatem pierwszym krokiem będzie znalezienie odpowiadającego mu czteropotencjału. Ponieważ $\vec{E} = 0$, a $\vec{B}$ nie zmienia się w czasie, możemy ograniczyć się do czteropotencjałów postaci $(0, A_x, A_y, A_z)$, gdzie składowe A_i zależą od współrzędnych przestrzennych, ale nie od czasu. Rozpisujemy:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = \nabla \times \vec{A} = \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{bmatrix}. \tag{P1.3}$$

Przypomnijmy, że nie potrzebujemy znać ogólnego rozwiązania tego układu równań – wystarczy nam dowolne przykładowe rozwiązanie. Zauważmy, że dowolna kombinacja $\partial_i A_j$ występuję tylko w jednym miejscu. W związku z tym jako szczególne rozwiązanie możemy wybrać $\vec{A} = (0, xB, 0)$ – wtedy jedynie wyraz $\partial_x A_y = B$ jest niezerowy i równanie pozostaje spełnione.

Możemy teraz przystąpić do właściwej części zadania. Lagranżjan przyjmuje postać:

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + qv_y xB, \tag{P1.4}$$

co po jawnym rozpisaniu wszystkich wyrazów daje:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + q\dot{y}xB, \tag{P1.5}$$

Równanie Eulera-Lagrange'a dla współrzędnej x to $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$. Policzmy:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left((-mc^2)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2\dot{x}/c^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right) \tag{P1.6}$$

Różniczkowanie tego wyrażenia po t nie wygląda szczególnie zachęcająco. Czy możemy jakoś ułatwić sobie zadanie? Przypomnijmy, że jeśli Lagranżjan jest stały w czasie, generuje to stałą ruchu – w tym przypadku będzie to:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L = \left(\frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} + qxB\dot{y}\right) - \left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}} + q\dot{y}xB\right). \tag{P1.7}$$

Widzimy, że drugie wyrazy w obydwu nawiasach wzajemnie się zredukują; pozostałe, po sprowadzeniu do wspólnego mianownika, dadzą:

$$E = \frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + mc^2 - m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}, \tag{P1.8}$$

co odzwierciedla znany nam fakt, że siła Lorentza nie wykonuje na cząstką pracy. Wiedząc, że $\frac{dE}{dt} = 0$, wracając do równania (P1.6), możemy napisać:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right) = \frac{m\ddot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} + m\dot{x}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right)}_{=0} = \frac{m\ddot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{P1.9}$$

Po obliczeniu prawej strony równania $\frac{\partial L}{\partial x} = +q\dot{y}B$, otrzymujemy:

$$\frac{m\ddot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} = +q\dot{y}B \tag{P1.10}$$

Analogiczny rachunek wykonujemy dla dwóch pozostałych współrzędnych:

$$\frac{m\ddot{y}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} + q\dot{x}B = 0 \tag{P1.11}$$

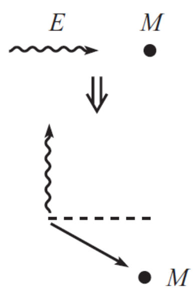
$$\frac{m\ddot{z}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} = 0 \tag{P1.12}$$

Po przerzuceniu wyrazu $q\dot{x}B$ na prawą stronę, całość możemy zapisać w zwięzłej formie:

$$\frac{m\vec{\dot{v}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = q\vec{v}\times\vec{B}, \tag{P1.13}$$

co zgadza się ze wzorem z poprzedniej serii zadań ćwiczeniowych.

Przykład 2.
W spoczywającą cząstkę o masie M uderzył foton o energii E. Po zderzeniu rozproszony foton porusza się w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu fotonu sprzed zderzenia. Korzystając z zasad zachowania energii i pędu wyznaczyć energię rozproszonego fotonu.



Rozwiązanie.
W zadaniach o rozpadach czy zderzeniach cząstek najwygodniej jest posługiwać się formalizmem czterowektorów energii i pędu. Wprowadźmy układ kartezjański, w którym oś x skierowana jest w prawo, a oś y – do góry. Czterowektory dla fotonu przed zderzeniem, cząstki przed zderzeniem, fotonu po zderzeniu oraz cząstki po zderzeniu oznaczmy odpowiednio jako $p^\mu_E, p^\mu_M, p^\mu_{E'}, p^\mu_{M'}$. Mamy wówczas:

$$p^\mu_E = \begin{bmatrix} E/c \\ E/c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^\mu_M = \begin{bmatrix} Mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^\mu_{E'} = \begin{bmatrix} E'/c \\ 0 \\ E'/c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^\mu_{M'} = \begin{bmatrix} \sqrt{M^2c^4 + (p_x^2 + p_y^2)c^2}/c \\ p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{P2.14}$$

gdzie wprowadziliśmy nowe oznaczenia na nieznane wartości E', p_x, p_y, a także skorzystaliśmy z ogólnej tożsamości łączącej wartość energii i długością wektora pędu $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$ (co dla fotonu sprowadza się do $E = |\vec{p}|$). Zasada zachowania czterowektora energii i pędu implikuje:

$$p^\mu_E + p^\mu_M = p^\mu_{E'} + p^\mu_{M'} \tag{P2.15}$$

$$\begin{bmatrix} E/c + Mc \\ E/c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'/c + \sqrt{M^2c^4 + (p_x^2 + p_y^2)c^2}/c \\ p_x \\ E'/c + p_y \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{P2.16}$$

Z drugiego równania mamy $p_x = E/c$, z trzeciego $p_y = -E'/c$. Podstawiając je do pierwszego (i mnożąc całość przez c) otrzymujemy:

$$E + Mc^2 = E' + \sqrt{M^2c^4 + (E^2 + E'^2)} \tag{P2.17}$$

$$(E + Mc^2 - E')^2 = M^2c^4 + (E^2 + E'^2) \tag{P2.18}$$

$$-2EE' + 2EMc^2 - 2Mc^2E' = 0 \tag{P2.19}$$

$$E' = \frac{EMc^2}{E + Mc^2}. \tag{P2.20}$$

Widzimy, że energia rozproszonego fotonu jest mniejsza niż energia fotonu sprzed zderzenia – ma to sens, gdyż część energii została przekazana wprawionej w ruch cząsteczce M.

Przykład 3.
Relatywistyczny pociąg porusza się po prostych torach z prędkością v. Mija on dwie stacje odległe od siebie o L. Kiedy mijał pierwszą z nich, wewnątrz pociągu uruchomiona została bomba zegarowa, której pozostał do wybuchu pozostał czas T. Licznik zostanie wyłączony podczas mijania drugiej stacji (o ile bomba nie wybuchnie wcześniej). Jaka (co najmniej) musi być prędkość pociągu v, aby udało się uniknąć tragedii?
Rozwiązanie.
Wyobraźmy sobie dwa jednakowe zegary, które przed opisywanymi wydarzeniami zostały umieszczone na obydwu stacjach i zsynchronizowane. W chwili, gdy pociąg mija pierwszą stację, stojący tam zegar wskazuje czas t_1; kiedy mija drugą – wskazanie zegara na drugiej stacji wynosi t_2. Dla wygody wprowadźmy $\Delta t = t_2 - t_1$. Ponieważ stacje są od siebie odległe o L, interwal czasoprzestrzenny pomiędzy zdarzeniami "przejazd pociągu przez pierwszą stację" i "przejazd pociągu przez drugą stację" (zakładamy, że pociąg i stacje są na tyle małe, iż możemy zaniedbać czas wjeżdżania/wyjeżdżania) wynosi $\Delta t^2 c^2 - L^2$. Z drugiej strony wartość interwału może być wyrażona zmianą czasu własnego pociągu między tymi zdarzeniami $(\Delta\tau)^2 c^2$; mamy zatem:

$$(\Delta\tau)^2 c^2 = (\Delta t)^2 c^2 - L^2. \tag{P3.21}$$

Wiedząc, że pociąg porusza się z prędkością v (czyli $L = v \cdot \Delta t$), możemy sprowadzić powyższe do $\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, czyli znanego nam wzoru na dylatację czasu. Rozważając skrajny przypadek, w którym bomba o mało nie wybuchła, podstawiając do wzoru (P3.21) $\Delta t = \frac{L}{v}$ i $\Delta\tau = T$, otrzymujemy:

$$T^2 c^2 = \frac{L^2}{v^2} c^2 - L^2 \tag{P3.22}$$

$$v^2 = \frac{L^2 c^2}{T^2 c^2 + L^2} \tag{P3.23}$$

$$v = \frac{\frac{L}{T}}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{c^2 T^2}}} \tag{P3.24}$$

Czy umiemy coś ciekawego powiedzieć o tym wyniku? W granicy nierelatywistycznej – tzn. kiedy $\frac{L}{T} \ll c$:

$$v \approx \frac{L}{T}, \tag{P3.25}$$

zgadza się zatem z codzienną intuicją. Z drugiej strony relatywistyczny wynik jest dosyć optymistyczny – niezależnie od wartości T i L zawsze istnieje prędkość v (mniejsza od c!), pozwalająca uniknąć wybuchu.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.
Cząstka o masie m i ładunku q porusza się w stałym polu elektrycznym $\vec{E} = E\hat{e}_z$. Zapisać Lagranżjan i równania Eulera-Lagrange'a dla tego układu. Wyznaczyć ruch cząstki dla przypadku, kiedy w chwili $t = 0$ spoczywa.

Porównać końcowy wynik z wynikiem otrzymanym na wykładzie (Wykład – notatki, 1 czerwca 2020: Przykład 1), gdzie całość została policzona z wykorzystaniem czasu własnego τ.

Rozwiązanie.
Lagranżjan dla dowolnego pola elektrycznego i magnetycznego:

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi(\vec{r}, t) + q\vec{v}\vec{A}(\vec{r}, t), \tag{Z1.26}$$

gdzie $(\varphi/c, \vec{A})$ to czteropotencjał pola magnetycznego, spełniający:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{Z1.27}$$

U nas $\vec{E} = E\hat{e}_z$, zatem przykładem czteropotencjału spełniającego powyższe równanie będzie $\varphi = -zE, \vec{A} = 0$ (uwaga: w zadaniu przykładowym przez E oznaczaliśmy energię – zupełnie inny obiekt. Proszę się nie pomylić!). Wówczas:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + qzE, \tag{Z1.28}$$

Równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right) = 0 \tag{Z1.29}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right) = 0 \tag{Z1.30}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}}\right) = qE \tag{Z1.31}$$

Jeżeli w chwili $t = 0$ cząstka spoczywa, upraszcza się to do $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}}\right) = qE \tag{Z1.32}$$

Ponieważ w równaniu nie występuje jawnie z, a jedynie jego pochodne, warto wprowadzić zmienną $v_z = \dot{z}$. Po policzeniu pochodnej po t otrzymujemy:

$$\frac{dv_z}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}} + \frac{mv_z^2/c^2}{(1 - v_z^2/c^2)^{3/2}}\right) = qE \tag{Z1.33}$$

$$\frac{dv_z}{dt}\left(\frac{m}{(1 - v_z^2/c^2)^{3/2}}\right) = qE \tag{Z1.34}$$

Szczęśliwie jest to równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\int \frac{1}{(1 - v_z^2/c^2)^{3/2}} dv_z = \frac{qE}{m} t + C \tag{Z1.35}$$

Całkę rozwiązujemy dowolną znaną nam metodą (np. przez podstawienie Eulera II rodzaju). W efekcie otrzymujemy:

$$\frac{v_z}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}} = \frac{qE}{m} t + C \tag{Z1.36}$$

Z warunku $v_z(0) = 0$ mamy $C = 0$. Podnosząc stronami do kwadratu i przekształcając dostajemy:

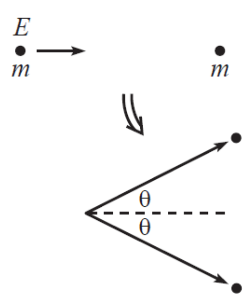
$$v_z = \frac{\frac{qE}{m} t}{\sqrt{1 - (\frac{qEt}{mc})^2}}. \tag{Z1.37}$$

Całkując po $\int dt$ (oraz ustalając $z(0) = 0$) otrzymujemy:

$$z = \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2} - 1 \right). \tag{Z1.38}$$

Widzimy, że zgadza się to z wynikiem z wykładu (u nas energia początkowa $E_0 = mc^2$).

Zadanie 2.
W początkowo spoczywającą cząstkę o masie m uderza druga cząstka o tej takiej samej masie i całkowitej energii E. Po zderzeniu cząstki rozbiegają się pod tym samym kątem θ względem początkowego kierunku ruchu drugiej cząstki (patrz: rysunek). Podać wartość tego kąta.



Rozwiązanie.
Czterowektory dla pierwszej cząstki przed zderzeniem, drugiej przed zderzeniem, pierwszej po zderzeniu oraz drugiej po zderzeniu oznaczmy odpowiednio jako $p_1^\mu, p_2^\mu, p_{1'}^\mu, p_{2'}^\mu$. Mamy wówczas:

$$p_1^\mu = \begin{bmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2^\mu = \begin{bmatrix} E/c \\ \sqrt{E^2 - m^2c^4}/c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{1'}^\mu = \begin{bmatrix} \sqrt{m^2c^4 + p_{1'}^2 c^2}/c \\ p_{1'} \cos(\theta) \\ p_{1'} \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{2'}^\mu = \begin{bmatrix} \sqrt{m^2c^4 + p_{2'}^2 c^2}/c \\ p_{2'} \cos(\theta) \\ -p_{2'} \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{Z2.39}$$

gdzie przez $p_{1'}, p_{2'}$ oznaczyliśmy (nieznane) pędy po zderzeniu, a także skorzystaliśmy z ogólnej tożsamości łączącej wartość energii i długością wektora pędu $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$. Zauważmy, że tak naprawdę nie wiemy, która z cząstek poleciała do góry, a która na dół, ale nie ma to znaczenia dla wyniku – wobec tego przyjmujemy dowolną wersję. Z zasady zachowania czterowektora energii i pędu:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_{1'}^\mu + p_{2'}^\mu \tag{Z2.40}$$

$$\begin{bmatrix} mc + E/c \\ \sqrt{E^2 - m^2c^4}/c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m^2c^4 + p_{1'}^2c^2}/c + \sqrt{m^2c^4 + p_{2'}^2c^2}/c \\ p_{1'}\cos(\theta) + p_{2'}\cos(\theta) \\ p_{1'}\sin(\theta) - p_{2'}\sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{Z2.41}$$

Z trzeciego $p_{1'} = p_{2'}$. Wówczas z drugiego $p_{1'} = \sqrt{E^2 - m^2c^4}/(2c\cos(\theta)$. Podstawiając do pierwszego podniesionego do kwadratu otrzymujemy:

$$(mc + E/c)^2 = 4m^2c^4 + \frac{E^2 - m^2c^4}{(c\cos(\theta))^2} \tag{Z2.42}$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{E^2 - m^2c^4}{E^2 + 2Emc^2 - 3m^2c^4} \tag{Z2.43}$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{(E + mc^2)(E - mc^2)}{(E + 3mc^2)(E - mc^2)} \tag{Z2.44}$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{E + 3mc^2}} \tag{Z2.45}$$

Zadanie 3.
Mion μ jest nietrwałą cząstką elementarną o średnim czasie życia $\tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6}s$. Rozważmy mion, który powstał w górnych warstwach atmosfery (ok. $90km$ nad powierzchnią Ziemi), a jego prędkość skierowana jest bezpośrednio w stronę Ziemi. Ile musi wynosić prędkość mionu, aby zdążył on dotrzeć do powierzchni Ziemi, zanim się rozpadnie?

Rozwiązanie.
Interwał czasoprzestrzenny:

$$(\Delta\tau)^2c^2 = (\Delta t)^2c^2 - L^2, \tag{Z3.46}$$

gdzie $\Delta\tau$ to upływ czasu własnego mionu, Δt – upływ czasu współrzędnościowego związanego z układem spoczywającym względem Ziemi, a L – droga przebyta przez mion w układzie spoczywającym względem Ziemi. Ruch mionu przybliżmy ruchem jednostajnym z prędkością v. Podstawiając $\Delta t = L/v$ i $\Delta\tau = \tau_\mu$ otrzymujemy:

$$\tau_\mu^2c^2 = L^2c^2/v^2 - L^2 \tag{Z3.47}$$

$$v = c \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau_\mu^2c^2}{L^2}}} \tag{Z3.48}$$

Podstawiając $\tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6}s, c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}, L = 9 \cdot 10^4 m$ otrzymujemy:

$$v \approx 0,999973c, \tag{Z3.49}$$

co jest bardzo bliskie wartości prędkości światła w próżni.

Wojciech Górecki