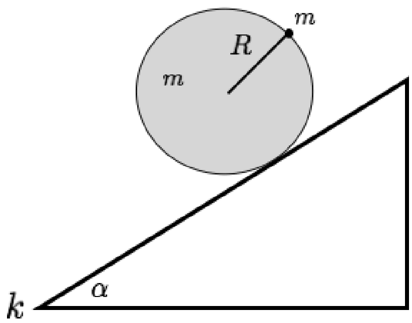
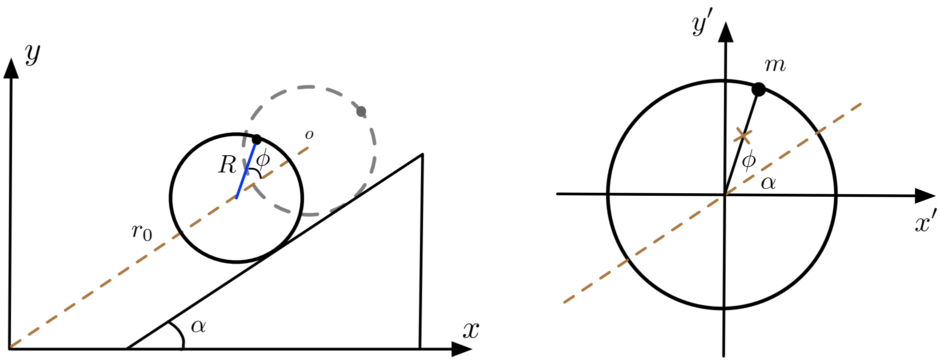
Egzamin pisemny – MiSTW
15 czerwca 2020

Zadanie 1.
Jednorodny krążek o masie m i promieniu R, do którego brzegu przymocowany jest punkt materialny o masie m, toczy się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = \arcsin\frac{1}{4}$ w jednorodnym polu grawitacyjnym Ziemi. Krążek pozostaje przez cały czas prostopadły do prostej k stanowiącej krawędź równi. Znaleźć energię kinetyczną układu oraz wyznaczyć położenia równowagi trwałej.



Rys. 1

Rozwiązanie. We assume that initially the distance between center of disk to the origin



Rys. 2

is r_o. When the disk is rolling down, the coordinate of the center of disk in x-and y-axes is

$$\begin{cases} x_{CD} &= (r_o - R\phi)\cos\alpha\,, \\ y_{CD} &= (r_o - R\phi)\sin\alpha\,. \end{cases} \tag{1}$$

The center of total mass is at the middle point between the center of disk and point mass, which in x'- and y'-axes is

$$\begin{cases} x'_{CM} &= \dfrac{R}{2}\cos(\phi+\alpha)\,, \\ y'_{CM} &= \dfrac{R}{2}\sin(\phi+\alpha)\,. \end{cases} \tag{2}$$

Hence the center of mass in x- and y-axes is

$$\begin{cases} x_{CM} &= x_{CD} + x'_{CM} = (r_o - R\phi)\cos\alpha + \dfrac{R}{2}\cos(\phi+\alpha)\,, \\ y_{CM} &= y_{CD} + y'_{CM} = (r_o - R\phi)\sin\alpha + \dfrac{R}{2}\sin(\phi+\alpha)\,. \end{cases} \tag{3}$$

The rotational inertia valued at mass center can be calculated

$$I_{zz} = I_{disk} + I_{pt.mass} = \left(\frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = mR^2\,, \tag{4}$$

and the angular velocity of rotation at mass center is $\dot{\phi}$.
The kinetic energy of the whole system is

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2) + \frac{1}{2}I_{zz}\,\dot{\phi}^2 = mR^2\dot{\phi}^2\left(\frac{5}{4} + \sin\phi\right) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2\,, \tag{5}$$

where the total mass $M = 2\,m$.
The total potential energy valued by the mass center is

$$V = 2\,mg\,y_{CM} = 2\,mg\left((r_o - R\phi)\sin\alpha + \frac{R}{2}\sin(\phi+\alpha)\right)\,. \tag{6}$$

The minimum of potential is stable equilibrium, at where the derivative of potential in terms of ϕ vanishes

$$V' = 2\,mg\left(-R\sin\alpha + \frac{R}{2}\cos(\phi_0+\alpha)\right) = 0\,. \tag{7}$$

Solving (7) gives

$$\phi_0 = \pm\frac{\pi}{3} - \alpha + 2\,\pi n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{8}$$

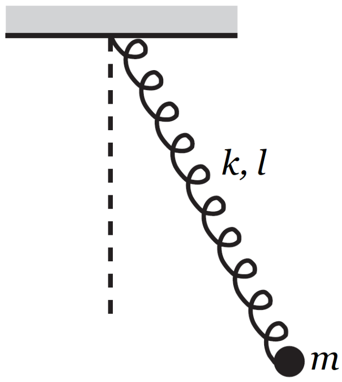
At the minimum, the second derivative should be positive

$$V'' = -mgR\sin(\phi_0+\alpha) > 0\,, \tag{9}$$

which implies the correct choice for stable equilibrium is

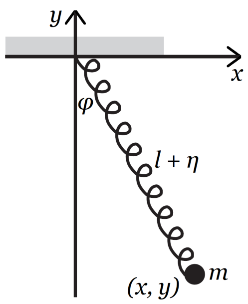
$$\phi_0 = -\frac{\pi}{3} - \alpha + 2\,\pi n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{10}$$

Zadanie 2.
Rozważmy wahadło zbudowane z ciężarka o masie m zawieszonego na końcu sprężyny o współczynniku sprężystości k i długości swobodnej l, przymocowanej nieruchomo do sufitu (rys. 3). Sprężyna zbudowana jest w taki sposób, że może się swobodnie rozciągać i ściskać, nie może się natomiast wyginać – jej oś przez cały czas pozostaje odcinkiem prostej. Załóżmy, że ruch wahadła odbywa się wyłącznie w płaszczyźnie pionowej (czyli w płaszczyźnie kartki na rys. 3). Znaleźć równania ruchu wahadła, posługując się formalizmem równań Lagrange'a II rodzaju.



Rys. 3. Wahadło z zadania 2.

Rozwiązanie.



Rys. 4. Współrzędne.

Ruch wahadła jest płaski, możemy zatem ograniczyć się do rozważania dwóch wymiarów przestrzennych. Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych tak, jak pokazano na rys. 4. Niech $(x,\, y)$ będą współrzędnymi opisującymi położenie ciężarka.

Wahadło, które rozważamy, jest układem o dwóch stopniach swobody, do jego opisu potrzebujemy zatem dwóch współrzędnych. Zamiast posługiwać się współrzędnymi ciężarka $(x,\, y)$, wprowadzimy nowe, wygodniejsze współrzędne (rys. 4):

- rozciągnięcie sprężyny η, będące różnicą między aktualną długością sprężyny a jej długością swobodną l,
- wychylenie wahadła ϕ, czyli kąt pomiędzy pionem a osią wahadła (ta sama współrzędna używana jest zazwyczaj do opisu „zwykłego" wahadła matematycznego, w którym ciężarek zawieszony jest na nieważkiej i nierozciągliwej nici).

Związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi $(x,\, y)$ a współrzędnymi $(\eta,\, \phi)$ dany jest równościami

$$\begin{cases} x = (l+\eta)\sin\phi\,, \\ y = -(l+\eta)\cos\phi\,. \end{cases} \tag{11}$$

Energia kinetyczna wahadła wynosi zatem

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\left(\dot{\eta}\sin\phi+(l+\eta)\,\dot{\phi}\cos\phi\right)^2+\left(-\dot{\eta}\cos\phi+(l+\eta)\,\dot{\phi}\sin\phi\right)^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{\eta}^2+(l+\eta)^2\,\dot{\phi}^2\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Energia potencjalna wahadła jest sumą energii grawitacyjnej oraz energii sprężystości:

$$V = V_{\text{grawitacja}}+V_{\text{sprężyna}} = mgy+\frac{k\eta^2}{2} = -mg\,(l+\eta)\cos\phi+\frac{k\eta^2}{2}. \tag{13}$$

Lagranżjan ma więc postać

$$L = T-V = \frac{m}{2}\left(\dot{\eta}^2+(l+\eta)^2\,\dot{\phi}^2\right)+mg\,(l+\eta)\cos\phi-\frac{k\eta^2}{2}. \tag{14}$$

Możemy teraz przystąpić do zapisania równań Lagrange'a II rodzaju (określanych też jako równania Eulera-Lagrange'a). Nasz układ opisują dwie współrzędne, otrzymamy zatem dwa równania:

$$\eta: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}} = \frac{\partial L}{\partial\eta} \quad\rightarrow\quad m\ddot{\eta} = m\,(l+\eta)\,\dot{\phi}^2+mg\cos\phi-k\eta, \tag{15}$$

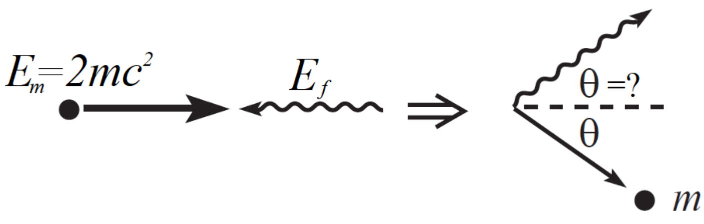
$$\phi: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial\phi} \quad\rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,(l+\eta)^2\,\dot{\phi}\right) = -mg\,(l+\eta)\sin\phi, \tag{16}$$

czyli po uproszczeniu i uporządkowaniu

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}-m\,(l+\eta)\,\dot{\phi}^2-mg\cos\phi+k\eta = 0, & (17) \\ (l+\eta)\,\ddot{\phi}+2\dot{\eta}\dot{\phi}+g\sin\phi = 0. & (18) \end{cases}$$

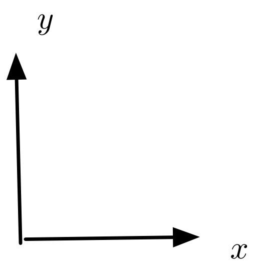
To właśnie szukane równania ruchu wahadła.

Zadanie 3.
Cząstka o masie m porusza się z taką prędkością, że jej całkowita energia wynosi $2mc^2$. Naprzeciwko niej leci foton o energii E_f. Po zderzeniu cząstka i rozproszony foton rozbiegają się w taki sposób, że tory ich ruchów tworzą kąt θ z kierunkiem pierwotnego ruchu (patrz rysunek).
a) wyznaczyć kąt θ w zależności od m, E_f (prędkość światła jest dana).
b) jaka energia E_f odpowiada kątowi $\theta = \pi/2$?



Rys. 5

Rozwiązanie.



Rys. 6. x axis y-axis

Conservation of momentum could solve this problem. We assume the movement along the positive directions of x axis and y-axis have positive momentums. The momentum is denoted by

$$\mathbf{p} = (E, p_x, p_y, p_z)\,, \tag{19}$$

where E is rest energy and p_x , p_y , p_z are momentums along each directions. Before the collision, momentum of photon is

$$\mathbf{p}_1 = (E_f, -p_1, 0, 0)\,, \tag{20}$$

where

$$p_1 = E_f/c\,, \tag{21}$$

and the momentum of particle

$$\mathbf{p}_2 = (2\,mc^2, p_2, 0, 0)\,. \tag{22}$$

By the relation between total energy and momentum

$$\left(2\,mc^2\right)^2 = \left(mc^2\right)^2 + (p_2\,c)^2\,, \tag{23}$$

one can find

$$p_2 = \sqrt{3}\,mc\,. \tag{24}$$

After the collision, the momentum of photon is denoted by

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \left(\tilde{E}_f, \tilde{p}_1 \cos\theta, \tilde{p}_1 \sin\theta, 0\right)\,, \tag{25}$$

where

$$\tilde{E}_f = \tilde{p}_1 c\,, \tag{26}$$

and the momentum of particle is denoted by

$$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \left(\tilde{E}_m, \tilde{p}_2 \cos\theta, -\tilde{p}_2 \sin\theta, 0\right) , \tag{27}$$

where

$$\tilde{E}_m^2 = \left(mc^2\right)^2 + (\tilde{p}_2\, c)^2 . \tag{28}$$

The conservation of momentum before and after collision

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 , \tag{29}$$

gives the conservation of momentum along each directions

$$\begin{aligned} E_f + 2\, mc^2 &= \tilde{p}_1 c + \sqrt{m^2c^4 + \tilde{p}_2^2 c^2} , \\ -E_f/c + \sqrt{3}mc &= \tilde{p}_1 \cos\theta + \tilde{p}_2 \cos\theta , \\ 0 &= \tilde{p}_1 \sin\theta - \tilde{p}_2 \sin\theta . \end{aligned} \tag{30}$$

One can solve (30) and find

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \frac{E_f^2 + 4\, E_f mc^2 + 3\, m^2c^4}{2\, E_f c + 4\, mc^3} \tag{31}$$

and the answer to question a)

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{3}\, mc^2 - E_f)(2\, mc^2 + E_f)}{(2\, mc^2 + E_f)^2 - m^2c^4} . \tag{32}$$

For the answer to question b), when $\theta = \pi/2$, $\cos\theta = 0$, solving (32) gives

$$E_f = \sqrt{3}\, mc^2 . \tag{33}$$