ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU

def. MOMENT PĘDU (WZGLĘDEM $\bar{r}_0 = 0$)

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = m \bar{r} \times \dot{\bar{r}}$$

MOMENT SIŁY: $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$

R-NIE NEWTONA:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \underbrace{m \dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}}}_{=0} + m \bar{r} \times \ddot{\bar{r}} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}$$

JEŚLI $\bar{M} = 0 \Rightarrow \bar{L} = \text{CONST} = \bar{L}_0$

JEŚLI $M_n = 0$ (SKŁADOWA WZGLĘDEM WERSORA $\bar{n}$), TO $L_n = \bar{L} \cdot \bar{n} = \text{CONST} = L_{n0}$

NP. SIŁA CENTRALNA, TZN. $\bar{F} = F_r \bar{e}_r = F_r(r, \theta, \varphi) \bar{e}_r$ (NP. GRAWITACJA)

WTEDY $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} = (r \bar{e}_r) \times (F_r \bar{e}_r) = 0 \Rightarrow \bar{L} = \text{CONST}$

CZYLI W RUCHU W POLU SIŁY CENTRALNEJ MOMENT PĘDU JEST ZACHOWANY; RUCH TAKI ODBYWA SIĘ W PŁASZCZYŹNIE PRZECHODZĄCEJ PRZEZ CENTRUM SIŁY I $\perp$ DO $\bar{L}$.

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

def. ENERGIA KINETYCZNA: $T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$

TOTEŻ $\frac{d}{dt} T = m \bar{v} \bar{a} = \bar{F} \bar{v} \Rightarrow T - T_0 = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{F} \bar{v}\, dt = \underbrace{\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{F}\, d\bar{r}}_{\text{PRACA WYKONANA PRZEZ SIŁĘ } \bar{F}}$

SIŁY ŻYROSKOPOWE – T. ŻE $\bar{F} \perp \bar{v}$; WTEDY T JEST CAŁKĄ RUCHU

(NP. – SIŁA LORENTZA W POLU MAGNETYCZNYM $\bar{F} = q \bar{v} \times \bar{B}$
– SIŁA CORIOLISA $-2m \bar{\omega} \times \bar{v}$)

SIŁY DYSSYPATYWNE – T. ŻE $\bar{F} \parallel \bar{v}$, PRZECIWNIE SKIEROWANE

(NP. SIŁA OPORU $\bar{F} \sim -v^n \frac{\bar{v}}{v}$)

SIŁY POTENCJALNE – TAKIE KTÓRE MOŻNA ZAPISAĆ JAKO $\boxed{\bar{F}(\bar{r}, t) = -\text{grad}\, V(\bar{r}, t)}$

$V(\bar{r}, t)$ – ENERGIA POTENCJALNA P-TU MATERIALNEGO

TW. $\bar{F}$ POTENCJALNA $\Leftrightarrow$ $\text{rot}\, \bar{F} = 0$ (GDYŻ $\text{rot grad} = 0$) W OBSZARZE JEDNOSPÓJNYM

SIŁA POTENCJALNA ZACHOWAWCZA: $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, TZN. $V = V(\bar{r})$; WTEDY CAŁKOWITA ENERGIA $E = T + V = \text{CONST}$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \bar{F} \bar{v} + \dot{\bar{r}}\, \text{grad}\, V = -\text{grad}\, V \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \text{grad}\, V = 0$$

NP. $\bar{F} = \bar{F}(t)$ JEST POTENCJALNA, WTEDY $V = -\bar{F}(t)\cdot\bar{r}$

NP. SIŁA ODŚRODKOWA JEST POTENCJALNA, $V = -\frac{1}{2}m(\bar{\omega}\times\bar{r})^2$
JEST ZACHOWAWCZA GDY $\bar{\omega} = const$

NP. SIŁA BEZWŁADNOŚCI $(-m\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r})$ NIE JEST ZACHOWAWCZA; GDYŻ:
$$\text{rot}(-m\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}) = -2m\dot{\bar{\omega}}$$

NP. SIŁA $\bar{F} = F_r(r)\bar{e}_r$ JEST POTENCJALNA I ZACHOWAWCZA, $V = -\int F_r\,dr$

WTEDY ENERGIA KINETYCZNA:
$$T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}$$
(STR. 4) (DLA $\theta = \frac{\pi}{2}$)

UKŁAD BIEGUNOWY W PŁASZCZYŹNIE RUCHU $(\theta = \frac{\pi}{2})$
$\bar{\upsilon} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi \Rightarrow \upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

MOMENT PĘDU
$\bar{L} = \bar{r}\times\bar{\upsilon}\cdot m = mr\bar{e}_r\times(\dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi)$
$= mr^2\dot{\varphi}\bar{e}_\theta$
$\Rightarrow \bar{L}^2 = m^2r^4\dot{\varphi}^2 = L^2$
$L = mr^2\dot{\varphi}$

- CAŁKOWITA ENERGIA:
$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + V(r)}_{V_{eff}(r)} = const$$
$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2}{m}V_{eff}$$
$$t = \pm\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}} \Rightarrow r = r(t)$$ ← MOŻNA WYZNACZYĆ

- MOMENT PĘDU: $mr^2\dot{\varphi} = L = const$, STĄD MOŻEMY WYZNACZYĆ:
$$\Downarrow$$
$$\varphi = \frac{L}{m}\int\frac{dt}{r(t)^2}$$
I OSTATECZNIE MOŻNA DOSTAĆ R-NIE TORU $r = r(\varphi)$.

- PONADTO, KORZYSTAJĄC Z $\dot{r} = -\frac{L_z}{m}\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r}$, CAŁKA ENERGII DAJE:
$$E = \frac{L_z^2}{2m}\left(\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r}\right)^2 + V_{eff}(r)$$
$$\Rightarrow \varphi = \pm\int\frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2m}{L_z^2}(E - V_{eff})}}$$
– WERSJA WZORU BINETA NA TOR RUCHU $r = r(\varphi)$

$$\left(\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r}\right)$$

1 PRZEŁYWNIK — OPERATORY RÓŻNICZKOWE

NABLA: $\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$

- POLE SKALARNE: FUNKCJA PRZYJMUJĄCA W KAŻDYM PKT. PRZESTRZENI WARTOŚĆ SKALARNĄ (LICZBĘ)
  np. TEMPERATURA, POTENCJAŁ
- POLE WEKTOROWE: —— " —— WEKTOROWĄ
  np. SIŁA GRAWITACJI, NATĘŻENIE POLA ELEKTRYCZNEGO

GRADIENT:

$$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) := \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix} \equiv \nabla f \quad ; \quad \text{POLE SKALARNE} \longrightarrow \text{POLE WEKTOROWE}$$

BIEGUNOWY: $\mathrm{grad}\, f(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{e}_z$

SFERYCZNY: $\mathrm{grad}\, f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi$

DYWERGENCJA:

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \mathrm{div}\left(A_x\bar{e}_x + A_y\bar{e}_y + A_z\bar{e}_z\right) = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \equiv \nabla\cdot\vec{A}$$

POLE WEKTOROWE $\longrightarrow$ POLE SKALARNE

BIEGUNOWY: $\bar{A} = A_\rho\bar{e}_\rho + A_\varphi\bar{e}_\varphi + A_z\bar{e}_z$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

SFERYCZNY: $\bar{A} = A_r\bar{e}_r + A_\theta\bar{e}_\theta + A_\varphi\bar{e}_\varphi$

$$\mathrm{div}\,\bar{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\cdot A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

ROTACJA:

$$\mathrm{rot}\,\bar{A} \equiv \nabla\times\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{bmatrix}$$

BIEGUNOWY: $\mathrm{rot}\left(A_\rho\bar{e}_\rho + A_\varphi\bar{e}_\varphi + A_z\bar{e}_z\right) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\bar{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\bar{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\bar{e}_z$

SFERYCZNY: SPRAWDZIĆ!

POLE WEKTOROWE $\longrightarrow$ POLE WEKTOROWE

FAKT:

$$(\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}) = \partial_i(\mathrm{rot}\,\bar{A})_i = \partial_i\epsilon_{ijk}\partial_jA_k = \underbrace{\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k} = -\epsilon_{jik}\partial_i\partial_jA_k = \underbrace{-\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_iA_k} \equiv 0$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(\mathrm{grad}\,f)_k = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0$$

NP.

$$\frac{dV(\bar{r})}{dt} = \frac{dV(x,y,z)}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial V}{\partial z} = \left(\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} V = \dot{\bar{r}}\cdot\mathrm{grad}\,V$$

4. DYNAMIKA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH SWOBODNYCH

ROZWAŻMY UKŁAD n P-TÓW MATERIALNYCH O MASACH m_i, POŁOŻENIACH $\bar{r}_i$, GDZIE PUNKT i ODDZIAŁUJE NA j-TY SIŁĄ $\bar{F}_{ji}$ ORAZ SIŁACH ZEWNĘTRZNYCH $\bar{F}_{i0}$ NA i-TY PUNKT.

III ZASADA DYNAMIKI: $\boxed{\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}}$

- RÓWNANIA RUCHU NEWTONA W UKŁADZIE INERCJALNYM – UKŁAD $3n$ R-NAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH 2. RZĘDU NA $3n$ NIEWIADOMYCH $\bar{r}_i(t)$

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \bar{F}_{ij} \equiv \bar{F}_i$$

(W UKŁADZIE NIEINERCJALNYM $\bar{F}_{i0}$ UWZGLĘDNIA SIŁY BEZWŁADNOŚCI)

- ŚRODEK MASY: $\bar{R} := \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i$, $\quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – MASA CAŁKOWITA UKŁADU

PRZECHODZĄC Z UKŁADU U DO U': $\bar{r}_i = \bar{r}_0 + \bar{r}_i' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\bar{r}_0 + \bar{r}_i') = \frac{1}{M} \bar{r}_0 \sum m_i + \frac{1}{M} \sum_i m_i \bar{r}_i' = \bar{r}_0 + \bar{R}'$$

W UKŁADZIE ŚRODKA MASY $\bar{r}_0 = \bar{R} \Rightarrow \bar{R} = \bar{R} + \bar{R}^{(s)} \Rightarrow \bar{R}^{(s)} = 0$

- PĘD UKŁADU P-TÓW MATERIALNYCH:

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i = \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i = M \dot{\bar{R}},$$

ZATEM Z R-NAŃ RUCHU I III ZASADY:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_i \bar{F}_{i0} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \bar{F}_{ij} = \sum_i \bar{F}_{i0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji}) = \sum_i \bar{F}_{i0} \equiv \bar{F}$$

CZYLI: $\boxed{M \ddot{\bar{R}} = \bar{F}}$ $\bar{F}$ = WYPADKOWA SIŁ DZIAŁAJĄCYCH NA UKŁAD

CZYLI OPIS RUCHU CIAŁA (UKŁADU P-TÓW) ZADANY PRZEZ OPIS RUCHU ŚRODKA MASY

- JEŚLI $\bar{F} = \sum_i \bar{F}_{i0} = 0 \Rightarrow \bar{P} = \text{const} = \bar{P}_0 \Rightarrow$ ŚRODEK MASY PORUSZA SIĘ JEDNOSTAJNIE PROSTOLINIOWO: $\bar{R} = \bar{R}_0 + \frac{\bar{P}_0}{M}(t - t_0)$

- PRZY ZMIANIE $U \to U'$: $\bar{P} = M\dot{\bar{r}}_0 + \bar{P}'$, UKŁADY DLA ŚRODKA MASY $\dot{\bar{r}}_0 = \dot{\bar{R}} \Rightarrow \bar{P}^{(s)} = 0$
($\bar{r}_i = \bar{r}_0 + \bar{r}_i'$)

- W SUMIE 6 CAŁEK RUCHU: $\bar{P}_0$ ORAZ $\bar{R}_0 = \bar{R} - \frac{\bar{P}_0}{M}(t - t_0)$

• MOMENT PĘDU UKŁADU (WZGLĘDEM POCZĄTKU UKŁADU ODNIESIENIA)

$$\bar L = \sum_{i=1}^{n} \bar L_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar r_i \times \dot{\bar r}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec L}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\cancel{\dot{\bar r}_i \times \dot{\bar r}_i} + \bar r_i \times \ddot{\bar r}_i \right) = \sum_i \bar r_i \times \bar F_{i0} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \bar r_i \times \bar F_{ij} =$$

$$= \sum_i \bar r_i \times \bar F_{i0} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \underbrace{(\bar r_i - \bar r_j) \times \bar F_{ij}}$$

III ZASADA

JEŚLI SIŁY WEWNĘTRZNE SĄ CENTRALNE, $\bar F_{ij} \parallel (\bar r_i - \bar r_j)$, TO ZNIKA MOMENT SIŁ WEWNĘTRZNYCH: $\Rightarrow$

$$\frac{d\bar L}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar r_i \times \bar F_{i0} \equiv \bar M$$

= MOMENT SIŁ ZEWNĘTRZNYCH

JEŚLI $\bar M = 0 \Rightarrow \bar L = \text{CONST}$, 3 CAŁKI RUCHU

PRZY ZMIANIE UKŁADU ODNIESIENIA:

$$\bar L = \sum_i m_i (\bar r_0 + \bar r_i') \times (\dot{\bar r}_0 + \dot{\bar r}_i') \overset{?}{=} M \bar r_0 \times \dot{\bar r}_0 + M \bar r_0 \dot{\bar R}' + M \bar R' \times \dot{\bar r}_0 + \bar L'$$

POŁOŻENIE ŚRODKA MASY W UKŁADZIE U'

W UKŁADZIE ŚRODKA MASY S, $\bar R' = 0$, $\bar r_0 = \bar R \Rightarrow$

$$\bar L = M \bar R \times \dot{\bar R} + \bar L^{(S)} = \bar R \times \bar P + \bar L^{(S)}$$

CAŁKOWITY MOMENT PĘDU ŚRODKA MASY

PĘD CAŁKOWITY

ZADANIE: WYKAZAĆ: $\frac{d\bar L^{(S)}}{dt} = M^{(S)}$ = MOMENT SIŁ ZEWNĘTRZNYCH WZGLĘDEM ŚRODKA MASY

• PODSUMOWANIE

~~W SUMIE 10 CAŁEK RUCHU:~~ $\cancel{\bar P_0, \bar R_0}$

• ENERGIA ~~KINETYCZNA~~ UKŁADU

ENERGIA KINETYCZNA:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i \dot{\bar{r}}_i = \sum_i \bar{F}_i \dot{\bar{r}}_i \qquad (*)$$

JEŚLI SIŁY $\bar{F}_i$ SĄ POTENCJALNE TO ISTNIEJE $V(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n; t) =$
= ENERGIA POTENCJALNA UKŁADU, T. ŻE $\bar{F}_i = -\mathrm{grad}_i V(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n; t)$,

SKORO $$\frac{dV}{dt} = \sum_i \dot{\bar{r}}_i \, \mathrm{grad}_i V + \frac{\partial V}{\partial t} \qquad (**)$$

TO $(*)$ & $(**)$ $\Rightarrow$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{(T+V)}_{\equiv E \,=\, \text{ENERGIA MECHANICZNA}} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

JEŚLI SIŁY SĄ ~~ZACHOWAWCZE~~, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underline{E = \mathrm{CONST}}$ JEDNA CAŁKA RUCHU

ZMIANA UKŁADU ODNIESIENIA:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{r}}_i')^2 = \frac{1}{2} M \dot{\bar{r}}_0^{\,2} + M \dot{\bar{r}}_0 \dot{\bar{R}}' + T'$$

JEŚLI U' = UKŁAD ŚRODKA MASY S, TO <u>TW. KÖNIGA</u>:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + T^{(S)}}$$

• PODSUMOWANIE

- W SUMIE 10 CAŁEK RUCHU: $\bar{P}_0, \bar{R}_0, \bar{L}_0, E$, DLA UKŁADU n P-TÓW MATERIALNYCH ODDZIAŁUJĄCYCH Z SOBĄ SIŁAMI CENTRALNYMI ZACHOWAWCZYMI SPEŁNIAJĄCYMI III ZASADĘ DYNAMIKI, PRZY BRAKU SIŁ ZEWNĘTRZNYCH.
- $\Rightarrow$ MOŻNA ZREDUKOWAĆ RZĄD UKŁADU RÓWNAŃ RUCHU Z $6n$ DO $6n-10$.
- DLA 2 CIAŁ: DOSTAJEMY UKŁAD RZĘDU $6 \cdot 2 - 10 = 2$.