// ZAGADNIENIE DWÓCH CIAŁ

– ODDZIAŁUJĄCYCH SIŁAMI SPEŁNIAJĄCYMI III ZASADĘ DYNAMIKI

R-NIA RUCHU: UKŁAD RÓWNAŃ RZĘDU 12 (6 R-NAŃ 2. RZĘDU)

$$\circledast \quad \begin{cases} m_1 \ddot{\bar r}_1 = \bar F_{12} \\ m_2 \ddot{\bar r}_2 = -\bar F_{12} \end{cases}$$

WPROWADZAMY ZMIENNE: $M = m_1 + m_2$

$$\begin{cases} \bar R = \dfrac{m_1 \bar r_1 + m_2 \bar r_2}{M} \\ \bar r = \bar r_1 - \bar r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \bar r_1 = \bar R + \dfrac{m_2}{M}\bar r \\ \bar r_2 = \bar R - \dfrac{m_1}{M}\bar r \end{cases}$$

WTEDY $\circledast$: DODAJEMY STRONAMI:

$$\begin{cases} M\ddot{\bar R} = 0 \\ \ddot{\bar r} = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\bar F_{12} \end{cases}$$

ZACHOWANY PĘD $\bar P_0$ $\Rightarrow$ $\bar R = \bar R_0 + \dfrac{\bar P_0}{M}(t - t_0)$

PROBLEM REDUKUJE SIĘ DO RUCHU JEDNEGO CIAŁA O MASIE ZREDUKOWANEJ: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\boxed{\mu \ddot{\bar r} = \bar F_{12}}$$

ANALIZA JAK STR. 4 i 11: JEŚLI $\bar F_{12}$ CENTRALNA, $\bar F_{12} = F_r \dfrac{\bar r}{r}$, TO ZACHOWANY MOMENT PĘDU WZGLĘDEM $\bar r = 0$. WYBIERAJĄC Oxy JAKO PŁASZCZYZNĘ RUCHU

$$\begin{cases} \mu \underbrace{(\ddot r - r\dot\varphi^2)}_{\text{PRZYSPIESZENIE W UKŁ. BIEGUNOWYM}} = F_r \\ \underbrace{\mu r^2 \dot\varphi}_{\text{moment pędu}} = L_z^{(s)} = \text{CONST} \\ z = 0 \end{cases}$$

JEŚLI SIŁA ZACHOWAWCZA, $F_r = -\dfrac{dV(r)}{dr}$, TO (STR. 11)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu \dot r^2 + V_{ef}(r) = E^{(s)} \\ \mu r^2 \dot\varphi = L_z^{(s)} \\ z = 0 \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad E^{(s)} = T^{(s)} + V(r) = \text{CONST W UKŁADZIE ŚRODKA MASY}$$

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{1}{2}\frac{(L_z^{(s)})^2}{\mu r^2}$$

$\Rightarrow$ R-NIE TORU (JAK ZE WZORU BINETA): JAK STR. 11

$$\varphi = \pm \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2\mu}{(L_z^{(s)})^2}\left(E^{(s)} - V_{ef}(r)\right)}}$$

NP. DLA ENERGII POTENCJALNEJ $\boxed{V(r) = -\frac{\alpha}{r}}$ $\alpha > 0$

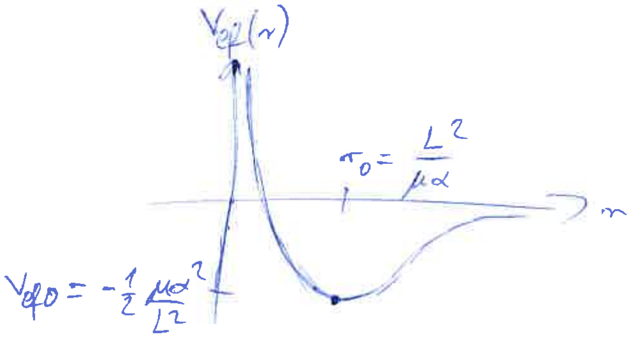
- JAK DLA SIŁ GRAWITACYJNYCH (PLANETA – SŁOŃCE) / $\alpha = G m_1 m_2$
- KLASYCZNY MODEL ELEKTRONU WOKÓŁ JĄDRA: / $\alpha = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$

ZAKŁADAMY $L_z^{(s)} \neq 0$, POMIJAMY INDEKS „S"

$$\boxed{V_{ef}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}} \Rightarrow V'_{ef}(r) = +\frac{\alpha}{r^2} - \frac{L^2}{\mu r^3} = \frac{1}{r^2}\left(\alpha - \frac{L^2}{\mu r}\right)$$

$\Rightarrow$ MINIMUM DLA $r_0 = \frac{L^2}{\mu\alpha}$

$$V_{ef}(r_0) \equiv V_{ef0} = -\frac{\alpha^2\mu}{L^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu\alpha^2}{L^2} = -\frac{1}{2}\frac{\mu\alpha^2}{L^2}$$



- DLA $E < V_{ef0}$ RUCH NIEMOŻLIWY
- DLA $V_{ef0} < E < 0$ RUCH JEST OGRANICZONY $\Leftarrow$ $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}(r) = E$
- DLA $E > 0$, RUCH NIEOGRANICZONY

UWAGA: DLA DOWOLNEJ E, JEŚLI $L \neq 0$, TO PUNKT MATERIALNY NIE SPADA NA CENTRUM Z POWODU ENERGII ODŚRODKOWEJ $\frac{L^2}{2\mu r^2}$ W V_{ef}

TOR RUCHU:
$$\varphi = \pm \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu\alpha}{L^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}}$$

KORZYSTAJĄC Z CAŁKI:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \delta_{\varphi_0} \quad (\text{dla } a<0,\ b^2-4ac>0)$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \pm \arccos \frac{1 - \frac{L^2}{\alpha\mu r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 - \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{dla} \quad p = \frac{L^2}{\mu\alpha}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}}$$

RÓWNANIE BIEGUNOWE KRZYWEJ 2. STOPNIA (ELIPSA, PARABOLA, HIPERBOLA) O OGNISKU W $\vec{r} = 0$

p = PARAMETR, ϵ = MIMOŚRÓD

- **ELIPSA** DLA: $0 \leq \epsilon < 1 \Leftrightarrow -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} \leq E < 0$

  POŁOŻENIE: WIELKA: $a = \frac{p}{|1-\epsilon^2|} = \frac{\alpha}{2|E|}$, MAŁA: $b = \frac{p}{\sqrt{|1-\epsilon^2|}} = \frac{|L|}{\sqrt{2\mu|E|}}$
- PARABOLA: $\epsilon = 1$ $(E = 0)$
- HIPERBOLA: $\epsilon > 1$ $(E > 0)$

OTRZYMUJEMY (UOGÓLNIENIA) PRAW KEPLERA (~1610–1620)

I. PRAWO: PLANETY PORUSZAJĄ SIĘ PO ELIPSACH, W ICH OGNISKU JEST SŁOŃCE

II. PRAWO: PRĘDKOŚĆ POLOWA PLANET JEST STAŁA $\Leftrightarrow$ PROMIEŃ WODZĄCY W RÓWNYCH ODSTĘPACH CZASU ZAKREŚLA RÓWNE POLA

WYNIKA Z ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU: $\text{CONST} = \frac{|L|}{2\mu} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{dS}{dt} =$ PRĘDKOŚĆ POLOWA

III. PRAWO: DLA KAŻDEJ PLANETY: $\frac{T_i^2}{a_i^3} = \frac{(\text{OKRES OBIEGU PLANETY } i)^2}{(\text{WIELKA PÓŁOŚ})^3} = \text{CONST}$

ISTOTNIE, DLA CAŁEGO OKRESU:

$$\frac{|L|}{2\mu} T = \pi a b \quad (\text{POLE CAŁEJ ELIPSY})$$

ORAZ JUŻ WIEMY: $\begin{cases} a = \frac{\alpha}{2|E|} \\ b = \frac{|L|}{\sqrt{2\mu|E|}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{|L|}}{2\mu} T = \pi a \cdot \frac{\cancel{|L|}}{\sqrt{2\mu|E|}} \qquad /^2$$

$$\frac{T^2}{4\mu^2} = \pi^2 a^2 \cdot \frac{1}{2\mu \cdot \alpha} \cdot 2a$$

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} a^3}$$

✓

// RUCH PUNKTU MATERIALNEGO O ZMIENNEJ MASIE

W CZASIE dt MASA $M(t)$ P-TU MATERIALNEGO ZMIENIA SIĘ O dM; ZATEM ZMIANA PĘDU:

$$d\vec{P} = \vec{F}dt + dM\,(\dot{\vec{R}} + \vec{w})$$

$\vec{R}$ - ŚRODEK MASY P-TU

PRĘDKOŚĆ MASY dM W UKŁADZIE SPOCZYNKOWYM (ŚRODKA MASY) P-TU MATERIALNEGO

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} + \dot{M}(\dot{\vec{R}} + w) \quad ; \quad \text{ALE} \quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(M\dot{\vec{R}}) = \dot{M}\dot{\vec{R}} + M\ddot{\vec{R}} = \vec{F} + \dot{M}(\dot{\vec{R}} + w)$$

$$(*) \quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F} + \underbrace{\dot{M}\vec{w}}_{\text{SIŁA ODRZUTU}}} \qquad M = M(t)$$

NP. RAKIETA W JEDNORODNYM POLU GRAWITACYJNYM ZIEMI, STARTUJE PIONOWO. $z(t=0)=0$

PRZYSPIESZENIE GRAWITACYJNE: $\vec{g} = -g\vec{e}_z$; MASA: $\boxed{M_0 - \varrho t = M(t)}$

$\vec{W} = -w\vec{e}_z$; $\varrho, w = \text{CONST}$

CZYLI $(*)$: $\boxed{M\ddot{z} = -Mg + \varrho \cdot w}$

WARUNEK STARTU: $\varrho w > Mg$

$$\ddot{z} = -g + \frac{\varrho w}{M_0 - \varrho t} \qquad / \int$$

STAŁE CAŁKOWANIA

$$\dot{z} = -gt - w\ln\left(1 - \frac{\varrho}{M_0}t\right) \qquad / \int \qquad \left(\dot{z}(t=0)=0\right)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{M_0 w}{\varrho}\left[\left(1 - \frac{\varrho}{M_0}t\right)\left(\ln\left(1 - \frac{\varrho}{M_0}t\right) - 1\right) + 1\right] \qquad \left(z(t=0)=0\right)$$

$$\int \ln(1-\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\alpha}\left[(1-\alpha x)\left(\ln(1-\alpha x) - 1\right) + 1\right] + \text{CONST}$$

$\downarrow \frac{d}{dx}$

$$-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha x} + \alpha - \alpha\ln(1-\alpha x) + -\frac{\alpha x}{1-\alpha x}(-\alpha)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[\cancel{\frac{-\alpha+\alpha-\alpha^2 x}{1-\alpha x}} - \alpha\ln(1-\alpha x) + \cancel{\frac{\alpha^2 x}{1-\alpha x}}\right] =$$

$$= \ln(1-\alpha x)$$

✓