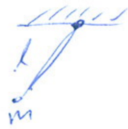
5. WIĘZY, R-NIA LAGRANGE'A I RODZAJU

UKŁADY NIESWOBODNE; WIĘZY – OGRANICZENIA NAŁOŻONE NA POŁOŻENIA I PRĘDKOŚCI

NP. 1° WAHADŁO SFERYCZNE – PUNKT NA KOŃCU NIEWAŻKIEGO PRĘTA O DŁUGOŚCI l



R-NIE WIĘZÓW: $\bar{r}^2 - l^2 = 0$, PUNKT NA POWIERZCHNI SFERY

$\Rightarrow$ OGRANICZENIA NA PRĘDKOŚĆ: $\bar{r}\dot{\bar{r}} = 0$

—‖— NA PRZYSPIESZENIA: $\ddot{\bar{r}}\bar{r} + \dot{\bar{r}}^2 = 0$

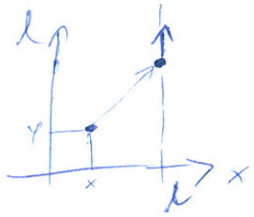
CZYLI WIĘZY WYMUSZAJĄ POJAWIENIE SIĘ SIŁ REAKCJI, KTÓRE ZAPEWNIAJĄ TEN WARUNEK

2° WAHADŁO SFERYCZNE – NA NICI O DŁUGOŚCI l

R-NIE WIĘZÓW: $\bar{r}^2 - l^2 \le 0$

PRZY NIERÓWNOŚCI $<$ RUCH JEST SWOBODNY; WIĘZY MOGĄ ZADZIAŁAĆ PRZY RÓWNOŚCI $=$

3° PIES GONI ZAJĄCA; ZAJĄC BIEGNIE WZDŁUŻ PROSTEJ $x = l$, JEGO $y = h(t)$
PRĘDKOŚĆ PSA ZAWSZE W KIERUNKU ZAJĄCA, CZYLI WIĘZY NA PRĘDKOŚĆ



$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{l-x}{h(t)-y}$$

$\Rightarrow$ OGRANICZENIE NA PRZYSPIESZENIE PSA, ALE NIE MA OGRANICZENIA NA JEGO POŁOŻENIE (CHYBA ŻE $x = l$ LUB $h(t) = const$)

DEF. PRZESTRZEŃ KONFIGURACYJNA – ILOCZYN KARTEZJAŃSKI n PRZESTRZENI POŁOŻEŃ POSZCZEGÓLNYCH PUNKTÓW; WYMIAR $= 3n$; POŁOŻENIE n PUNKTÓW OKREŚLONE PRZEZ WEKTOR $\bar{r} = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$

KLASYFIKACJA WIĘZÓW:

- DWUSTRONNE: $f(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) = 0$, JEDNOSTRONNE: $f(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t) \ge 0$
- HOLONOMICZNE (CAŁKOWALNE): R-NIE WIĘZÓW MOŻNA SPROWADZIĆ DO POSTACI BEZ PRĘDKOŚCI $f(\bar{r}, t) = 0$
  NIEHOLONOMICZNE (NIECAŁKOWALNE) – NIE DA SIĘ SPROWADZIĆ DO TAKIEJ POSTACI
- SKLERONOMICZNE (NIERUCHOME): f NIE ZALEŻY JAWNIE OD CZASU; PRZECIWNY WYPADEK – REONOMICZNE

NP. 1° – HOLONOMICZNE, DWUSTRONNE, SKLERONOMICZNE
2° – —‖—, JEDNOSTRONNE, —‖—
3° – (NA OGÓŁ) NIEHOLONOMICZNE, DWUSTRONNE, REONOMICZNE

- DLA WIĘZÓW HOLONOMICZNYCH $f(\bar{r},t)=0 \quad / \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\bar{r}}\,\mathrm{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$ – R-NIE LINIOWE W PRĘDKOŚCI

DLA NIEHOLONOMICZNYCH TEŻ OGRANICZAMY SIĘ DO LINIOWYCH W PRĘDKOŚCIACH

$$\bar{b}(\bar{r},t)\cdot\dot{\bar{r}} + b_0(\bar{r},t) = 0$$

W TEJ POSTACI MAMY TEŻ DLA HOLONOMICZNYCH, PRZY CZYM $\begin{cases} \bar{b} = \mathrm{grad} f \\ b_0 = \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$

(DLA NIEHOLONOMICZNYCH NIE DA SIĘ ZNALEŹĆ TAKIEJ F-CJI f)

- OGRANICZMY SIĘ DO WIĘZÓW DWUSTRONNYCH.

DEF. – PRZESUNIĘCIA MOŻLIWE $d\bar{r}$: SPEŁNIAJĄCE R-NIE WIĘZÓW $\bar{b}\cdot d\bar{r} + b_0\,dt = 0$,

– PRZESUNIĘCIA WIRTUALNE $\delta\bar{r}$: SPEŁNIAJĄCE $\bar{b}\cdot\delta\bar{r} = 0$

(ODPOWIADAJĄCE „ZAMROŻONYM" WIĘZOM Z $dt=0$)

RÓŻNICZKUJĄC (d/dt) $\bar{b}\cdot\dot{\bar{r}} + b_0 = 0$ DOSTAJEMY WARUNEK:

$$\bar{b}\ddot{\bar{r}} + \dot{\bar{b}}\dot{\bar{r}} + \dot{b}_0 = 0$$

NA SKŁADOWE PRZYSPIESZEŃ W KIERUNKU $\bar{b}$. TAKIE WARUNKI MOGĄ NIE BYĆ SPEŁNIONE PRZEZ PRZYSPIESZENIA $\frac{\bar{F}_i}{m_i}$ – W TAKIM PRZYPADKU WIĘZY ODDZIAŁUJĄ DODATKOWYMI SIŁAMI $\bar{F}_{R_i}$ (SIŁY REAKCJI WIĘZÓW), TAK ŻE $\frac{\bar{F}_i + \bar{F}_{R_i}}{m_i}$ SPEŁNIAJĄ POWYŻSZE WARUNKI.

- R-NIA NEWTONA DLA UKŁADU m P-TÓW MATERIALNYCH NIESWOBODNYCH:

$$\begin{cases} m_i\ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \bar{F}_{R_i} & i=1,\dots,m \\ f^{(k)}(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_m;t) = 0 & k=1,\dots,p \quad \text{(WIĘZY HOLONOMICZNE)} \\ \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i^{(l)}(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_m;t)\dot{\bar{r}}_i + b_0^{(l)}(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_m,t) = 0 & l=1,\dots,q \quad \text{(WIĘZY NIEHOLONOMICZNE)} \end{cases}$$

def. ILOŚĆ STOPNI SWOBODY: $f = 3m - p - q$; ZAKŁADAMY $f>0$

LICZBA NIEWIADOMYCH: (3m POŁOŻEŃ) + (3m SIŁ REAKCJI) = 6m

LICZBA RÓWNAŃ: (3m R-NAŃ RUCHU) + (p+q WIĘZÓW) = $3m+p+q = 6m-f < 6m$

TRZEBA UWZGLĘDNIĆ DODATKOWE INFORMACJE O SIŁACH REAKCJI I ZMNIEJSZYĆ LICZBĘ NIEWIADOMYCH W TYCH SIŁACH DO $p+q$.

• WIĘZY DOSKONAŁE

def. WIĘZY DOSKONAŁE – TAKIE DLA KTÓRYCH PRACA ~~SIŁ~~ REAKCJI WYNOSI ZERO

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \vec{F}_{R_i}\, \delta\vec{r}_i \equiv \bar{F}_R \cdot \delta\bar{r} = 0}$$

DLA DOWOLNYCH PRZESUNIĘĆ WIRTUALNYCH $\delta\bar{r}$ ZADANYCH PRZEZ WARUNKI

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f^{(k)} \cdot \delta\bar{r} = 0 \\ \bar{b}^{(l)} \cdot \delta\bar{r} = 0 \end{cases}$$

ZATEM SIŁY REAKCJI WIĘZÓW $\bar{F}_R$ MUSZĄ BYĆ KOMBINACJĄ WEKTORÓW $\operatorname{grad} f^{(k)}$ i $\bar{b}^{(l)}$ PROSTOPADŁYCH DO $\delta\bar{r}$:

$$\bar{F}_{R_i} = \sum_{k=1}^{p} \lambda^{(k)} \operatorname{grad}_i f^{(k)} + \sum_{l=1}^{q} \mu^{(l)}\, \bar{b}_i^{(l)}$$

MAMY WTEDY $(p+q)$ NIEWIADOMYCH $\lambda^{(k)}, \mu^{(l)}$ OKREŚLAJĄCYCH $\bar{F}_{R_i}$ – MNOŻNIKI LAGRANGE'A.

RÓWNANIA RUCHU NEWTONA OKREŚLAMY WTEDY JAKO:

<u>RÓWNANIA LAGRANGE'A I RODZAJU</u>; $(3n+p+q)$ RÓWNAŃ NA:
- $3m$ NIEWIADOMYCH $\bar{r}_i(t)$
- $(p+q)$ NIEWIADOMYCH $\lambda^{(k)}, \mu^{(l)}$

$$\boxed{\begin{cases} m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \sum_{k=1}^{p} \lambda^{(k)} \operatorname{grad}_i f^{(k)} + \sum_{l=1}^{q} \mu^{(l)} \bar{b}_i^{(l)}, & i = 1, \ldots, n \\ f^{(k)}(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t) = 0, & k = 1, \ldots, p \\ \sum_{i=1}^{m} b_i^{(l)}(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t)\, \dot{\bar{r}}_i + b_0^{(l)}(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n, t) = 0, & l = 1, \ldots, q \end{cases}}$$

<u>UWAGA:</u>

JEŚLI SIŁY REAKCJI WYKONUJĄ PRACĘ, TO SĄ TO <u>SIŁY TARCIA</u>, A ZWIĄZANE Z NIMI WIĘZY TO <u>WIĘZY NIEDOSKONAŁE</u>. SIŁY TAKIE ZALEŻĄ OD DODATKOWYCH FIZYCZNYCH PARAMETRÓW – WSPÓŁCZYNNIKÓW TARCIA.

• ZASADA D'ALAMBERTA

: DLA RUCHU P-TÓW MATERIALNYCH ZGODNYCH Z WIĘZAMI DOSKONAŁYMI, DLA PRZESUNIĘĆ WIRTUALNYCH ZGODNYCH Z WIĘZAMI $\left(\sum_{i=1}^{m} \operatorname{grad}_i f^{(k)} \delta\bar{r}_i = 0 \;\&\; \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i^{(l)} \delta\bar{r}_i = 0\right)$ ZACHODZI:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \left(m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i\right) \delta\bar{r}_i = 0}$$

<u>TW.</u> R-NIA LAGRANGE'A I RODZAJU $\Leftrightarrow$ ZASADA D'ALAMBERTA

$\Rightarrow$ ZACHODZI, GDYŻ DLA WIĘZÓW DOSKONAŁYCH $\sum_{i=1}^{m} \bar{F}_{R_i} \delta\bar{r}_i = 0$

$\Leftarrow$ ZACHODZI, GDYŻ WYNIKA Z NIEJ, ŻE $(m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i)$ MUSZĄ BYĆ KOMBINACJĄ LINIOWĄ WEKTORÓW $\perp$ DO $\delta\bar{r}_i$

• PRZYKŁAD – WAHADŁO MATEMATYCZNE PŁASKIE

PUNKT MATERIALNY W POLU SIŁY CIĘŻKOŚCI, $\vec{g}=(g,0,0)$, Z WIĘZAMI:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-l^2=0 \\ z=0 \end{cases}$$

(HOLONOMICZNE, DWUSTRONNE, SKLERONOMICZNE)

MAMY $f=3\cdot 1-2=1$ STOPNI SWOBODY; BEZ TARCIA.

R-NA LAGRANGE'A I RODZAJU:

$$\left[\operatorname{grad}(\vec{r}^2-l^2)\right]_i=\left[\operatorname{grad}\vec{r}^2\right]_i=\partial_i(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=2x_i$$

$$(*)\quad m\ddot{\vec{r}}=m\vec{g}+\lambda_1\operatorname{grad}(\vec{r}^2-l^2)+\lambda_2\operatorname{grad}z$$

$\Downarrow$ WSPÓŁRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE

$$\begin{cases} m\ddot{x}=mg+2\lambda_1 x \\ m\ddot{y}=2\lambda_1 y \\ m\ddot{z}=2\lambda_1 z+\lambda_2 \end{cases}$$

WIĘZY $z=0 \Rightarrow m\underbrace{\ddot{z}}_{0}=\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2=0 \Rightarrow$ NIE POJAWIA SIĘ SIŁA REAKCJI ZWIĄZANA Z WIĘZAMI UTRZYMUJĄCYMI WAHADŁO W PŁASZCZYŹNIE $z=0$.

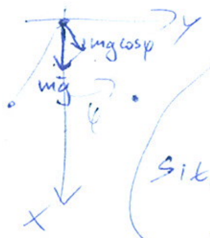
PROBLEM REDUKUJE SIĘ DO PIERWSZYCH DWÓCH RÓWNAŃ I R-NIA $x^2+y^2-l^2=0$;

$(*)$ W UKŁADZIE BIEGUNOWYM: $\left(\bar{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\bar{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\bar{e}_\varphi \leftarrow \text{STR 4.}\right)$

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=mg\cos\varphi+2\lambda_1 r \\ m(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})=-mg\sin\varphi \\ r^2-l^2=0 \end{cases}$$

$$\operatorname{grad}\vec{r}^2=\operatorname{grad}(r^2)=\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\bar{e}_r=2r\bar{e}_r$$

$\uparrow$ STR. 12



SIŁA REAKCJI WIĘZÓW: $F_R=\lambda_1\operatorname{grad}(\vec{r}^2-l^2)=2r\lambda_1\bar{e}_r\equiv 2l\lambda_1\bar{e}_r=$
$=-(ml\dot{\varphi}^2+mg\cos\varphi)\bar{e}_r$

ALE $r=l=\text{const} \Rightarrow \begin{cases} -mr\dot{\varphi}^2=mg\cos\varphi+2\lambda_1 l \\ mr\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi \end{cases}$

SIŁA SKIEROWANA WZDŁUŻ PRĘTA, RÓWNOWAŻY SIŁĘ ODŚRODKOWĄ ORAZ RADIALNĄ SKŁADOWĄ SIŁY CIĘŻKOŚCI.

$\rightarrow ml\ddot{\varphi}+mg\sin\varphi=0$ – POZWALA WYZNACZYĆ $\varphi=\varphi(t)$

DLA MAŁYCH KĄTÓW $\sin\varphi\approx\varphi$, CZYLI:

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0 \Rightarrow \varphi=a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)+b\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\equiv A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\delta\right)$$

DRGANIA HARMONICZNE $a,b,A,\delta=\text{const}$
O CZĘSTOŚCI $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$, NIE ZALEŻY OD AMPLITUDY A

• ZASADA PRAC WIRTUALNYCH

W SPOCZYNKU $(\ddot{\vec{r}}=0)$ MAMY:

$$0=\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum(\vec{F}_i+\vec{F}_{R,i})\delta\vec{r}_i=\sum_i\vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i=0$$

– TEN WARUNEK OKREŚLA POŁOŻENIE RÓWNOWAGI UKŁADU Z WIĘZAMI SKLERONOMICZNYMI I SIŁAMI NIEZALEŻNYMI OD CZASU.