6. WIĘZY HOLONOMICZNE DOSKONAŁE, R-NA LAGRANGE'A II RODZAJU

R-NIA LAGRANGE'A I RODZAJU DLA n PUNKTÓW MATERIALNYCH Z p WIĘZAMI HOLONOMICZNYMI:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \sum_{k=1}^{p} \lambda^{(k)} \operatorname{grad}_i f^{(k)} & , \quad i=1,\dots,n \\ f^{(k)}(\bar{r}_1,\dots,\bar{r}_n,t)=0 & , \quad k=1,\dots,p \end{cases}$$

MAMY $f=3n-p$ STOPNI SWOBODY, $(3n+p)$ RÓWNAŃ NA $(3n+p)$ NIEWIADOMYCH. JEŚLI INTERESUJE NAS TYLKO RUCH, A NIE SIŁY REAKCJI, TO MOŻNA WYELIMINOWAĆ NIEWIADOME $\lambda^{(k)}$ I OTRZYMAĆ f R-NAŃ RUCHU TYLKO NA ZMIENNE OKREŚLAJĄCE RUCH. W TYM CELU WPROWADZAMY WSPÓŁRZĘDNE UOGÓLNIONE ZGODNE Z WIĘZAMI – TZN. NIEZALEŻNE WSPÓŁRZĘDNE $q=(q_1,q_2,\dots,q_f)$ ZDEFINIOWANE PRZEZ $\bar{r}_i=\bar{r}_i(q,t)$, $i=1,\dots,n$; TAK BY RÓWNANIA WIĘZÓW BYŁY SPEŁNIONE TOŻSAMOŚCIOWO – CZYLI BY RZĄD MACIERZY $\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}\right)$ WYNOSIŁ f ORAZ $f^{(k)}(\bar{r}(q,t),t)\equiv 0$.

- PRZYKŁAD

WAHADŁO SFERYCZNE O DŁUGOŚCI ZALEŻNEJ OD CZASU – WIĘZY $0=x^2+y^2+z^2-l(t)^2$. WPROWADŹMY WSPÓŁRZĘDNE SFERYCZNE θ,φ, T. ŻE:

$$\begin{cases} x = l(t)\sin\theta\cos\varphi \\ y = l(t)\sin\theta\sin\varphi \\ z = l(t)\cos\theta \end{cases}$$

RZĄD $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$ WYNOSI 2. R-NIE WIĘZÓW TOŻSAMOŚCIOWO SPEŁNIONE:

$$-l(t)^2+l^2(t)\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta\right)=0$$

ZATEM θ,φ TO WSPÓŁRZĘDNE UOGÓLNIONE ZGODNE Z WIĘZAMI.

• WSPÓŁRZĘDNE UOGÓLNIONE ZAPEWNIAJĄ, IŻ $f^{(k)}\left(\bar{r}(q,t),t\right)\equiv 0$, CZYLI TEŻ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}\, \mathrm{grad}_i\, f^{(k)} = 0 \qquad (*)$$

PRZY UŻYCIU WSPÓŁRZĘDNYCH UOGÓLNIONYCH R-NIA LAGRANGE'A I RODZAJU PRZYJMUJĄ POSTAĆ $3n$ RÓWNAŃ NA $f=3n-p$ WSPÓŁRZĘDNYCH q_l, ORAZ p MNOŻNIKÓW LAGRANGE'A $\lambda^{(k)}$. ROZDZIELMY W TYCH RÓWNANIACH RUCH I SIŁY REAKCJI – ELIMINUJĄC $\lambda^{(k)}$:

R-NIA NEWTONA: $m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \sum_{k=1}^{p} \lambda^{(k)} \mathrm{grad}_i f^{(k)}$ $\qquad \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}\cdot$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} + \sum_{k=1}^{p} \lambda^{(k)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \mathrm{grad}_i f^{(k)}}_{=0 \text{ PONIEWAŻ } (*)\,!}$$

WPROWADŹMY <u>SIŁY UOGÓLNIONE</u>: $Q_l(q,\dot{q},t) := \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} = Q_l(q,\dot{q},t)}$$

<u>TWIERDZENIE</u>: DLA $T(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i^2(q,\dot{q},t)$ ZACHODZI:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l}}$$

<u>DOWÓD</u>: $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q,t) \Rightarrow \dot{\bar{r}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial^2 \bar{r}_i}{\partial q_l \partial q_k}\cdot \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l \partial t} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_l}$$

ZATEM:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial \dot{\bar{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\bar{r}}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} + \frac{\partial T}{\partial q_l}$$

PRZENOSZĄC $\frac{\partial T}{\partial q_l}$ NA DRUGĄ STRONĘ DOSTAJEMY TEZĘ.

CZYLI OSTATECZNIE: **RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU** (1788)

$$(*) \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l} \qquad l = 1, \ldots, f$$

DLA
$$\begin{cases} T(q,\dot q,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\bar r}_i^2(q,\dot q,t) \\ Q_l(q,\dot q,t) = \sum_{i=1}^{n} \bar F_i \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_l} \end{cases}$$

f R-NAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH, KAŻDE 2. RZĘDU, NA f NIEWIADOMYCH $q(t)$.

SŁUSZNE:
- PRZY DOWOLNYM WYBORZE WSPÓŁRZĘDNYCH UOGÓLNIONYCH ZGODNYCH Z WIĘZAMI
- DLA UKŁADU BEZ WIĘZÓW, PRZY DOWOLNYCH WSPÓŁRZĘDNYCH W PRZESTRZENI KONFIGURACYJNEJ UKŁADU P-TÓW SWOBODNYCH

- JEŚLI SIŁY $\bar F_i$ SĄ POTENCJALNE, $\bar F_i = -\mathrm{grad}_i V(\bar r, t)$, GDZIE $V(\bar r, t)$ TO ENERGIA POTENCJALNA UKŁADU, TO

$$Q_l = \sum_{i=1}^{m} \bar F_i \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_l} = -\sum_{i=1}^{m} \mathrm{grad}_i V(\bar r, t)\frac{\partial \bar r_i}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l}, \quad \text{GDZIE } \underline{V(q,t) = V(\bar r(q,t),t)}$$

DEF. LAGRANŻJAN (FUNKCJA LAGRANGE'A):

$$\boxed{L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - V(q,t)}$$

ZACHODZI:
$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_l} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_l}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_l} = \frac{\partial T}{\partial q_l} - \frac{\partial V}{\partial q_l} = \frac{\partial T}{\partial q_l} + Q_l$$

ZATEM R-NIA LAGRANGE'A (*) PRZYJMUJĄ POSTAĆ:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0} \qquad l = 1, \ldots, f$$

PRZYKŁAD: WAHADŁO MATEMATYCZNE

$$\begin{cases} x = l\sin\varphi \\ y = l\cos\varphi \end{cases}$$

$T = \frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2$, $\quad V = mgy = -mgl\cos\varphi$

$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi$

CZYLI: $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \underline{ml^2\ddot\varphi + mgl\sin\varphi} \rightarrow$ STR. 23 DRGANIA HARMONICZNE

• R-NIA LAGRANGE'A II RODZAJU MOŻNA W TAKIEJ POSTACI ZAPISAĆ DLA OGÓLNIEJSZEJ KLASY SIŁ, MAJĄCYCH UOGÓLNIONĄ ENERGIĘ POTENCJALNĄ $U(q,\dot{q},t)$

TZN. JEŚLI $$Q_l(q,\dot{q},t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial U}{\partial q_l}$$

PRZYJMUJĄC: $L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)$, R-NIA LAGRANGE'A (*) PRZYJMUJĄ POSTAĆ:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l}}=0$$

GDYŻ: $$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - \frac{\partial U}{\partial q_l}\right) = Q_l - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial U}{\partial q_l} = 0$$ ✓

$= Q_l$

JEŚLI U NIE ZALEŻY OD $\dot{q}$, TO $U \equiv V$. ZALEŻNOŚĆ U OD $\dot{q}$ MOŻE BYĆ CO NAJWYŻEJ LINIOWA, GDYŻ INACZEJ SIŁY UOGÓLNIONE Q_l BYŁYBY ZALEŻNE OD $\ddot{q}$, CO JEST NIEMOŻLIWE.
(NIEZGODNE Z WYPROWADZENIEM R-NAŃ LAGRANGE'A II RODZAJU)

• PRZYKŁAD SIŁA ELEKTROMAGNETYCZNA DZIAŁAJĄCA NA ŁADUNEK PUNKTOWY q DANA PRZEZ $\bar{F} = q\bar{E}(\bar{r},t) + q\dot{\bar{r}}\times\bar{B}(\bar{r},t)$, MA UOGÓLNIONĄ ENERGIĘ POTENCJALNĄ.

JEŚLI ϕ i $\bar{A}$ TO POTENCJAŁ SKALARNY I WEKTOROWY POLA EL-MAG,

$$\bar{E}(\bar{r},t) = -\operatorname{grad}\phi(\bar{r},t) - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad \bar{B}(\bar{r},t) = \operatorname{rot}\bar{A},$$

TO UOGÓLNIONA ENERGIA POTENCJALNA:

$$U(\bar{r},\dot{\bar{r}},t) = q\phi(\bar{r},t) - q\dot{\bar{r}}\bar{A}(\bar{r},t) \qquad \bar{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

DOWÓD: WE WSP. KARTEZJAŃSKICH: (BRAK WIĘZÓW)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt}(-qA_x) - q\frac{\partial\phi}{\partial x} + q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) =$$

$$= -q\left[\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} - \cancel{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}} - \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right] =$$

$$= -q\left[\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y}(\operatorname{rot}\bar{A})_z - \dot{z}(\operatorname{rot}\bar{A})_y\right] =$$

$$= -q\left(\operatorname{grad}\phi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)_x + q(\dot{\bar{r}}\times\operatorname{rot}\bar{A})_x = (q\bar{E} + q\dot{\bar{r}}\times\bar{B})_x = F_x$$ ✓

• PRZY ZMIANIE CECHOWANIA $\phi \to \phi - \frac{\partial\alpha}{\partial t}$, $\bar{A} \to \bar{A} + \operatorname{grad}\alpha$ (CO NIE ZMIENIA $\bar{E}$ i $\bar{B}$) MAMY $L \to L + \frac{d}{dt}(q\alpha)$, A R-NIA RUCHU (ZAWIERAJĄCE TYLKO $\bar{E}$ i $\bar{B}$) NIE ULEGAJĄ ZMIANIE.

• W OGÓLNOŚCI: LAGRANŻJANY RÓŻNIĄCE SIĘ O $\frac{d}{dt}\Phi(q,t)$ DLA DOWOLNEJ F-CJI $\Phi(q,t)$ DAJĄ TAKIE SAME R-NIA RUCHU. - NIEZMIENNICZOŚĆ WZG. CECHOWANIA

DOWÓD: $\frac{d}{dt}\Phi = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{d}{dt}\Phi\right)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial\left(\frac{d}{dt}\Phi\right)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi(q,t)}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\Phi = 0$ ✓

POKAZALIŚMY STR. 23
$\bar{r} = \bar{r}(q,t) \Rightarrow \frac{\partial \dot{\bar{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}$

7. LAGRANŻJAN I ZASADY ZACHOWANIA

PRZY CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RUCHU WARTO UŻYĆ CAŁEK RUCHU ODPOWIADAJĄCYM ZASADOM ZACHOWANIA.

DEF. ZMIENNA CYKLICZNA q_i - TAKA, OD KTÓREJ LAGRANŻJAN NIE ZALEŻY, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

DEF. PĘDY UOGÓLNIONE: $\boxed{p_i(q,\dot{q},t) := \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}}$

NP. DLA $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x,t) \Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ = ZWYKŁY PĘD

ALE W OGÓLNOŚCI TO NIE MUSI BYĆ ZWYKŁY PĘD

NP. $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r,t) \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = L_z$ = SKŁADOWA L_z MOMENTU PĘDU

NP. $L = \frac{1}{2}m\dot{\bar{r}}^2 - q\phi(\bar{r},t) + q\dot{\bar{r}}\bar{A}(\bar{r},t) \Rightarrow \bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}} = m\dot{\bar{r}} + q\bar{A}(\bar{r},t)$

FAKT. Z R-NAŃ LAGRANGE'A II RODZAJU:

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$\Rightarrow$ JEŚLI q_i JEST CYKLICZNA, TO PĘD UOGÓLNIONY p_i JEST ZACHOWANY!

DEF. ENERGIA UOGÓLNIONA

$$\boxed{G(q,\dot{q},t) := \sum_{l=1}^{f} \dot{q}_l \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_l} - L(q,\dot{q},t) \equiv \sum_l \dot{q}_l p_l - L}$$

Z RÓWNAŃ LAGRANGE'A:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{l=1}^{f}\left(\cancel{\ddot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}} + \underbrace{\dot{q}_l \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l}\dot{q}_l}_{=0} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial t}\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

CZYLI JEŚLI t JEST ZMIENNA CYKLICZNA $\left(\frac{\partial L}{\partial t}=0\right)$, TO ENERGIA UOGÓLNIONA JEST ZACHOWANA.

INTERPRETACJA ENERGII UOGÓLNIONEJ:

JEŚLI WIĘZY SKLERONOMICZNE, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$ (NIE ZALEŻY OD t), ORAZ SIŁY POTENCJALNE

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{f}\sum_{l=1}^{f} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{f}\alpha_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l$$

$$\boxed{\dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k}$$

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=1}^{m} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = \alpha_{lk}$$

CZYLI $L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{k,l}\alpha_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l - V \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k}\alpha_{ki}\dot{q}_k$

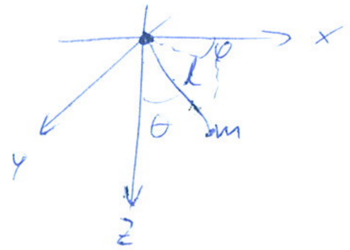
Z KOLEI:

$$G = \sum_{i=1}^{f}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^{f}\dot{q}_i\sum_{k=1}^{f}\alpha_{ki}\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{k,i}\alpha_{ki}\dot{q}_k\dot{q}_i + V = \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{f}\alpha_{ki}\dot{q}_k\dot{q}_i + V =$$

$$= T + V \quad = \quad \text{ZWYKŁA ENERGIA CAŁKOWITA}$$

- LAGRANŻJAN ZAWIERA PEŁNĄ INFORMACJĘ O UKŁADZIE MECHANICZNYM – POZWALA WYZNACZYĆ R-NIA RUCHU ORAZ ZASADY ZACHOWANIA; TAKŻE WSPÓŁCZESNE TEORIE (KWANTOWE!) SĄ FORMUŁOWANE PRZY POMOCY LAGRANŻJANU. KLUCZOWA WIELKOŚĆ W FIZYCE!

• PRZYKŁAD – WAHADŁO SFERYCZNE



↳ PUNKT O MASIE m NA SFERZE O PROMIENIU l W POLU SIŁY CIĘŻKOŚCI $\bar{g} = g\bar{e}_z$.

R-NIE WIĘZÓW: $x^2+y^2+z^2-l^2=0$

SKLERONOMICZNE!

LICZBA STOPNI SWOBODY: $f = 3-1 = 2$

WSPÓŁRZĘDNE UOGÓLNIONE: θ, φ

$$\begin{cases} x = l\sin\theta\cos\varphi \\ y = l\sin\theta\sin\varphi \\ z = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= l\cos\theta\cos\varphi\cdot\dot{\theta} - l\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{y} &= l\cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + l\sin\theta\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= -l\sin\theta\cdot\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2\right)$$

$$V = -m\bar{g}\bar{r} = -mgz = -mgl\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + mgl\cos\theta$$

RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} = \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2ml^2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} = \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

DLA $\varphi = $ CONST DOSTAJEMY R-NIE WAHADŁA PŁASKIEGO: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$.

W OGÓLNYM WYPADKU – KORZYSTAMY Z ZASAD ZACHOWANIA:

- L NIE ZALEŻY OD ⇒ ZACHOWANY JEST PĘD UOGÓLNIONY $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta =$
  $= L_z$ = SKŁADOWA L_z MOMENTU PĘDU
  $= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

- L NIE ZALEŻY OD t ⇒ ZACHOWANA JEST ENERGIA UOGÓLNIONA:
  $$G = T+V = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) - mgl\cos\theta = E = \text{CONST}$$

CZYLI ZASADY ZACHOWANIA DAJĄ UKŁAD 2 RÓWNAŃ 1. RZĘDU NA θ i φ:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta} \\ E = \dfrac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \left(\dfrac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - mgl\cos\theta\right) = \end{cases}$$

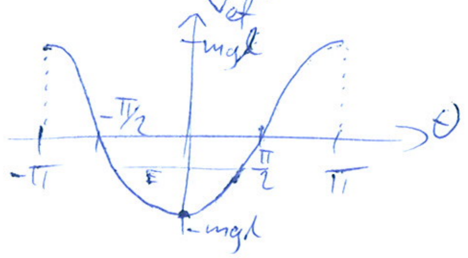
$$= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \underbrace{\left(\frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta\right)}_{= V_{ef}(\theta)} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi - \varphi_0 = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{L_z\, dt}{ml^2 \sin^2\theta(t)} \\ t - t_0 = \pm \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}\left(E - V_{ef}(\theta)\right)}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ MOŻEMY DOSTAĆ $\theta = \theta(t)$, I STĄD $\varphi = \varphi(t)$.

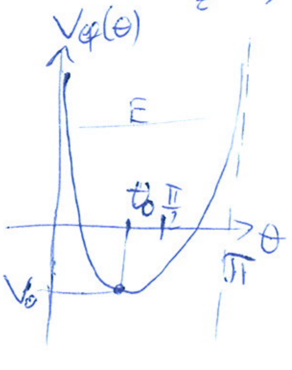
WNIOSKI Z ANALIZY $V_{ef}(\theta) = \dfrac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta$

- DLA $L_z = 0$, CZYLI $\varphi = \text{CONST}$: WAHADŁO PŁASKIE;



  - RUCH MOŻLIWY DLA $E \geq -mgl$
  - DLA $E = -mgl$ WAHADŁO SPOCZYWA, $\theta = 0$
  - DLA $-mgl < E < mgl$ WAHADŁO DRGA WOKÓŁ $\theta = 0$
  - DLA $E = mgl$ WAHADŁO DĄŻY DO $\theta = \pm\pi$ DLA $t \to \infty$
  - DLA $E > mgl$ RUCH OBROTOWY

- DLA $L_z \neq 0$, $V_{ef}(\theta)$ MA MINIMUM V_0 DLA $\cos\theta_0 = \dfrac{m^2 g l^3}{L_z^2} \sin^4\theta_0$, $\theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$



  - DLA $E = V_0$ MAMY $\theta = \theta_0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \dfrac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta_0} = \text{CONST}$, CZYLI RUCH JEDNOSTAJNY PO POZIOMYM OKRĘGU (PRĘT ZAKREŚLA POWIERZCHNIĘ STOŻKA O KĄCIE ROZWARCIA θ_0) (PRECESJA REGULARNA)
  - DLA $E > V_0$ MAMY $\theta_{MIN} \leq \theta \leq \theta_{MAX}$, θ SIĘ ZMIENIA W TYM ZAKRESIE, $\dot{\varphi}$ ZMIENNE, CZYLI φ SIĘ ZMIENIA W SPOSÓB NIEJEDNOSTAJNY (PRECESJA NIEREGULARNA)