8. MECHANIKA (NIERELATYWISTYCZNA) BRYŁY SZTYWNEJ – KINEMATYKA

BRYŁA SZTYWNA – UKŁAD PUNKTÓW MATERIALNYCH, POMIĘDZY KTÓRYMI SĄ STAŁE ODLEGŁOŚCI (MUSI TO BYĆ ZAPEWNIONE PRZEZ PEWNE WIĘZY). JEŚLI NIE MA INNYCH WIĘZÓW TO BRYŁA JEST SWOBODNA, W INNYM WYPADKU NIESWOBODNA.

WYGODNIE UŻYWAĆ DWÓCH UKŁADÓW WSPÓŁRZĘDNYCH:

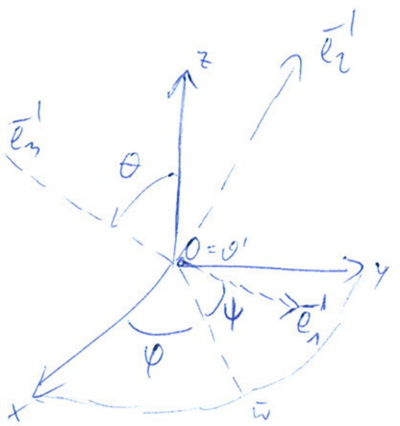
- NIERUCHOMY (U), ZWIĄZANY Z UKŁADEM ODNIESIENIA UŻYWANYM DO OPISU RUCHU
  POCZĄTEK O, WERSORY $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$
- RUCHOMY (U'), ZWIĄZANY Z BRYŁĄ SZTYWNĄ (PORUSZAJĄCY SIĘ WRAZ Z NIĄ)
  POCZĄTEK O', WERSORY $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$

- POŁOŻENIE BRYŁY SZTYWNEJ ZADANE PRZEZ PODANIE POŁOŻENIA UKŁADU U', CZYLI POŁOŻENIA $\bar{r}_0$ JEGO POCZĄTKU O', I TRZECH KĄTÓW OKREŚLAJĄCYCH ORIENTACJĘ OSI $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$ – W SUMIE 6 STOPNI SWOBODY.

WYGODNIE UŻYĆ:

- WEKTOR $\bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ OPISUJĄCY RUCH POSTĘPOWY
- KĄTY EULERA θ, φ, ψ OPISUJĄCE RUCH OBROTOWY WOKÓŁ O'.

$$\theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \psi \in [0, 2\pi]$$



OGÓLNY OBRÓT TO ZŁOŻENIE:

- OBROTU O KĄT φ WOKÓŁ $\bar{e}_3$
- OBROTU O θ WOKÓŁ $\bar{w}$ (WOKÓŁ LINII WĘZŁÓW)
- OBROTU O ψ WOKÓŁ $\bar{e}_3'$

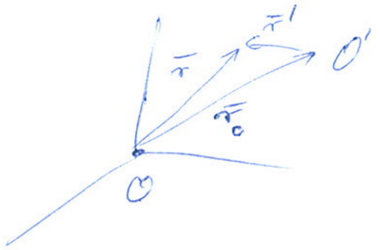
ODWROTNIE: WERSORY U' PRZECHODZĄ W WERSORY U PO ZŁOŻENIU 3 OBROTÓW:
O KĄT $-\psi$ WOKÓŁ $\bar{e}_3'$, O KĄT $-\theta$ WOKÓŁ $\bar{e}_1'$, O KĄT $-\varphi$ WOKÓŁ $\bar{e}_3'$; CZYLI:

$$\begin{bmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\\ \bar{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{e}_1'\\ \bar{e}_2'\\ \bar{e}_3'\end{bmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & X & +\sin\theta\sin\varphi\\ Y & Z & -\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{bmatrix}}_{=\alpha}\begin{bmatrix}\bar{e}_1'\\ \bar{e}_2'\\ \bar{e}_3'\end{bmatrix}$$

$X=-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi$
$Z=\cos\theta\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi$
$Y=\cos\theta\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi$

$=\alpha$, CZYLI $\alpha_{ij}=\bar{e}_i\,\bar{e}_j'$ – OGÓLNA PARAMETRYZACJA MACIERZY OBROTU



- W WIERSZACH MACIERZY α SĄ WSPÓŁRZĘDNE WERSORÓW UKŁADU U W UKŁADZIE PRIMOWANYM U'; W KOLUMNACH WSPÓŁRZĘDNE WERSORÓW UKŁADU U' W UKŁADZIE U.
  NP. $\bar{e}_1=\alpha_{11}\bar{e}_1'+\alpha_{12}\bar{e}_2'+\alpha_{13}\bar{e}_3'\equiv\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{12}\\ \alpha_{13}\end{bmatrix}$

  MACIERZ ODWROTNA DO ORTOGONALNEJ TO TRANSPONOWANA: $\begin{bmatrix}\bar{e}_1'\\ \bar{e}_2'\\ \bar{e}_3'\end{bmatrix}=\alpha^T\begin{bmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\\ \bar{e}_3\end{bmatrix}$
  $\Rightarrow\ \bar{e}_1'=\alpha_{11}\bar{e}_1+\alpha_{21}\bar{e}_2+\alpha_{31}\bar{e}_3=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \alpha_{31}\end{bmatrix}$ (*)

- POŁOŻENIA P-TÓW BRYŁY SZTYWNEJ W UKŁADZIE U:

$\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{r}'$ CZYLI $x_i(t)=x_{0i}(t)+\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}(t)\,x_j'$

(GDZIE $\bar{r}'$ JEST DANY PRZEZ STAŁE (x_1', x_2', x_3'))

- PRĘDKOŚĆ P-TÓW BRYŁY W UKŁADZIE U:

$$\underbrace{\vec{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}'}=\frac{d\bar{r}_0}{dt}+\underbrace{\frac{d'\bar{r}'}{dt}}_{0=\bar{v}'}+\bar{\omega}\times\bar{r}' \qquad [v'=0]$$

↳ SUMA PRĘDKOŚCI RUCHU POSTĘPOWEGO Z PRĘDKOŚCIĄ $\bar{v}_0$ I RUCHU OBROTOWEGO Z PRĘDKOŚCIĄ KĄTOWĄ $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega}=\bar{e}_1'\left(\frac{d\bar{e}_2'}{dt}\bar{e}_3'\right)+\bar{e}_2'\left(\frac{d\bar{e}_3'}{dt}\bar{e}_1'\right)+\bar{e}_3'\left(\frac{d\bar{e}_1'}{dt}\bar{e}_2'\right)=\omega_1'\bar{e}_1'+\omega_2'\bar{e}_2'+\omega_3'\bar{e}_3',$$ GDZIE

$$\omega_1'=\bar{e}_1'\bar{\omega}=\bar{e}_3'\frac{d\bar{e}_2'}{dt}\overset{(*)}{=}\alpha_{13}\frac{d\alpha_{12}}{dt}+\alpha_{23}\frac{d\alpha_{22}}{dt}+\alpha_{33}\frac{d\alpha_{32}}{dt}=\_=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$

PODOBNIE:

$$\omega_2'=\_=-\sin\psi\cdot\dot{\theta}+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

$$\omega_3'=\_=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$$

(**)

W UKŁADZIE PRIMOWANYM:

$$\bar{e}_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}', \quad \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} \sin\theta \sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta \end{bmatrix}', \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{bmatrix}'$$

CZYLI: $\bar{\omega} = (\dot{\theta}\cos\psi + \sin\theta\sin\psi\,\dot{\varphi})\bar{e}_1' + (-\sin\psi\,\dot{\theta} + \sin\theta\cos\psi\,\dot{\varphi})\bar{e}_2' + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\bar{e}_3'$

$$= \dot{\theta}\underbrace{(\cos\psi\cdot\bar{e}_1' - \sin\psi\cdot\bar{e}_2')}_{=\bar{w}} +$$

$$+ \dot{\varphi}\underbrace{(\sin\theta\sin\psi\,\bar{e}_1' + \sin\theta\cos\psi\,\bar{e}_2' + \cos\theta\,\bar{e}_3')}_{\bar{e}_3} +$$

$$+ \dot{\psi}\bar{e}_3' =$$

$$= \boxed{\dot{\theta}\bar{w} + \dot{\varphi}\bar{e}_3 + \dot{\psi}\bar{e}_3' = \bar{\omega}}$$

CZYLI PRĘDKOŚĆ KĄTOWA BRYŁY SZTYWNEJ JEST SUMĄ PRĘDKOŚCI KĄTOWYCH DLA SKŁADOWYCH OBROTÓW PRZEPROWADZAJĄCYCH U w U'.

- PRZYSPIESZENIE PUNKTÓW BRYŁY SZTYWNEJ W UKŁADZIE U:
  (WZÓR JAK KIEDYŚ, ALE TERAZ $v'=0$, $a'=0$)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}') = \bar{a}_0 + \bar{\gamma}\times\bar{r}' + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')$$

$\bar{a}_0$ – PRZYSPIESZENIE RUCHU POSTĘPOWEGO

$\bar{\gamma} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ = PRZYSPIESZENIE KĄTOWE W RUCHU OBROTOWYM

9. CHARAKTERYSTYKA BRYŁY SZTYWNEJ

UWAGA – ROZKŁAD MASY DYSKRETNY (SKOŃCZONA/PRZELICZALNA LICZBA PUNKTÓW MATERIALNYCH) LUB CIĄGŁY.

• **MASA**:

$$M = \sum \Delta m = \sum \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GĘSTOŚĆ}}}{\varrho} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OBJĘTOŚĆ}}}{\Delta V'} = \int \varrho(\bar{r}')\, dV'$$

• **WEKTOR ŚRODKA MASY** (WZGLĘDEM O'):

$$\bar{R}' = \frac{1}{M} \sum \Delta m \cdot \bar{r}' = \frac{1}{M} \int \varrho(\bar{r}')\, \bar{r}'\, dV'$$

• **TENSOR MOMENTU BEZWŁADNOŚCI**

UWAGA: WIELKOŚCI FIZYCZNE PRZEKSZTAŁCAJĄ SIĘ W RÓŻNY SPOSÓB PRZY OBROCIE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH; OBRÓT TAKI MOŻNA ZADAĆ PRZEZ MACIERZ ORTOGONALNĄ α_{ik} (TZN. $\alpha^T\alpha = \alpha\alpha^T = \mathbb{1} \Rightarrow \alpha^{-1} = \alpha^T$):

- SKALAR (TENSOR RZĘDU 0): NIE ULEGA ZMIANIE, $f = f'$
- WEKTOR (TENSOR 1. RZĘDU): PRZEKSZTAŁCA SIĘ: $x_i = \sum \alpha_{ik} x'_k$
- TENSOR (2. RZĘDU): PRZEKSZTAŁCA SIĘ: $A_{ij} = \sum_{kl} \alpha_{ik}\alpha_{jl} A'_{kl}$

ETC.

PRZYKŁADEM TENSORA (2. RZĘDU) JEST TENSOR MOMENTU BEZWŁADNOŚCI – WIELKOŚĆ CHARAKTERYZUJĄCA ROZKŁAD MASY W BRYLE SZTYWNEJ.

DEF. TENSOR MOMENTU BEZWŁADNOŚCI: I' WZGLĘDEM O': (W UKŁADZIE U')

$$I'_{ik} = \int \varrho(\bar{r}') \cdot \left[\bar{r}'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k\right] dV' = \sum_{\lambda} m_\lambda \left(\bar{r}'^2_\lambda \delta_{ik} - x'_{(\lambda)i} x'_{(\lambda)k}\right)$$

JEST TO MACIERZ SYMETRYCZNA, $I'_{ik} = I'_{ki}$, OKREŚLA JĄ 6 PARAMETRÓW

$$I' = \begin{bmatrix} I'_1 & -D'_3 & -D'_2 \\ -D'_3 & I'_2 & -D'_1 \\ -D'_2 & -D'_1 & I'_3 \end{bmatrix}$$

I'_1, I'_2, I'_3 – MOMENTY BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI $\bar{e}'_i$

D'_1, D'_2, D'_3 – MOMENTY DEWIACJI WZGLĘDEM OSI $\bar{e}'_i$

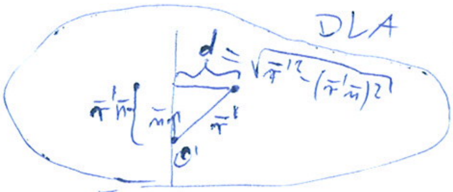
CZYLI: $I_1' = \int \rho (x_2'^2 + x_3'^2) dV'$ $\qquad D_1' = \int \rho x_2' x_3' dV'$

$I_2' = \int \rho (x_3'^2 + x_1'^2) dV'$ $\qquad D_2' = \int \rho x_3' x_1' dV'$

$I_3' = \int \rho (x_1'^2 + x_2'^2) dV'$ $\qquad D_3' = \int \rho x_1' x_2' dV'$

MOMENT BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI O KIERUNKU WYZNACZONYM PRZEZ WERSOR $\bar{n}$; PRZECHODZĄCEJ PRZEZ O':

$$I_n' = \bar{n}\cdot(\underline{I}'\bar{n}) = \sum_{ik} n_i' I_{ik}' n_k' = \int \rho \sum_{ik} n_i' n_k' (\bar{r}'^2 \delta_{ik} - x_i' x_k') dV' =$$
$$= \int \rho (\bar{r}'^2 - (\bar{r}'\cdot\bar{n})^2) dV' = \int \rho \cdot d^2 dV'$$



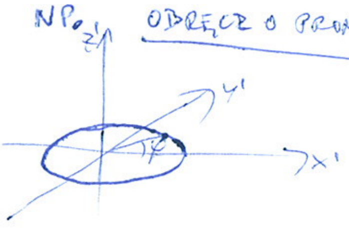
DLA d = ODLEGŁOŚĆ PUNKTU BRYŁY SZTYWNEJ OD OSI O KIERUNKU $\bar{n}$ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ O'.

TENSOR BEZWŁADNOŚCI JEST SYMETRYCZNY $\Rightarrow$ PRZEZ OBRÓT MOŻNA GO ZDIAGONALIZOWAĆ. OSIE GŁÓWNE BEZWŁADNOŚCI – OSIE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, W KTÓRYM TENSOR BEZWŁADNOŚCI JEST DIAGONALNY. ELEMENTY DIAGONALNE W TYM UKŁADZIE – GŁÓWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

CZYLI W UKŁADZIE GŁÓWNYCH OSI BEZWŁADNOŚCI:

$$\underline{I}' = \begin{bmatrix} I_1' & 0 & 0 \\ 0 & I_2' & 0 \\ 0 & 0 & I_3' \end{bmatrix}$$

NP. OBRĘCZ O PROMIENIU R I MASIE m; W PŁASZCZYŹNIE xy



$I_3' = \int \rho dV' (x'^2 + y'^2) = R^2 \int \rho dV' = mR^2$

$I_1' = \int \rho dV' (y'^2 + \underset{0}{z'^2}) = \rho \int r dr d\varphi dz' \cdot (r \sin\varphi)^2 = \rho \int r^3 dr dz' \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi =$

$= \rho R^3 \int dr dz \cdot \pi = \frac{1}{2} R^2 \underbrace{\int \rho R dr dz d\varphi}_{m} = \frac{1}{2} mR^2$

UKŁAD CYLINDRYCZNY:

$dV = r dr d\varphi dz$

$\int u v' = uv - \int u' v$ $\quad \int \sin^2\varphi d\varphi =$
$= -\sin\varphi\cos\varphi + \int \cos\varphi\cos\varphi d\varphi =$
$= -\sin\varphi\cos\varphi + \varphi - \int \sin^2\varphi d\varphi$
$\Rightarrow \int \sin^2\varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi$
$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \pi$

$I_2' = I_1' = \frac{1}{2} mR^2$

$D_1' = \int \rho y \overset{0}{z'} dV' = 0$

$D_2' = \int \rho x \overset{0}{z'} dV' = 0$

$D_3' = \int \rho xy dV' = \int \rho R^2 \sin\varphi \cos\varphi dV' =$
$= \int \rho R^2 \cdot R dr dz' \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sim \cos 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$

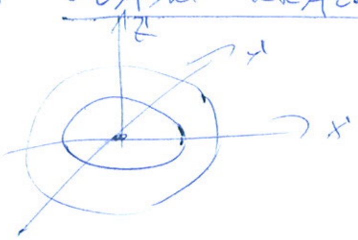
RÓWNOWAŻNIE: GĘSTOŚĆ LINIOWA $= \frac{m}{2\pi R} = \sigma$

CZYLI: $dm = \sigma \cdot R d\varphi$

$\Rightarrow I_1' = \int \sigma R d\varphi \cdot y^2 = \frac{m}{2\pi R} R \int d\varphi R^2 \sin^2\varphi = \frac{mR^2}{2\pi} \cdot \pi = \frac{mR^2}{2}$

ETC.

NP. PŁASKI KRĄŻEK O PROMIENIU R, MASIE m



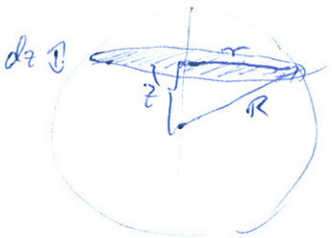
WZGLĘDEM OSI z:

DZIELIMY NA CIENKIE OBRĘCZE O PROMIENIU r, SZEROKOŚCI dr

$$dI'_{z'} = dm \cdot r^2 = \underset{\overset{\parallel}{\frac{m}{\pi R^2}}}{\varrho}\, \underset{\overset{\parallel}{2\pi r \cdot dr}}{dV}\, r^2 = 2\pi r \frac{m}{\pi R^2} r^2 dr = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

$$\Rightarrow \quad I'_{z'} = \int_0^R dI'_{z'} = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{mR^2}{2}$$

NP. MOMENT BEZWŁADNOŚCI KULI O PROMIENIU R, MASIE m



DZIELIMY NA KRĄŻKI O PROMIENIU r, WYSOKOŚCI dz

MASA KRĄŻKA:

$$dm = \varrho dV = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \pi r^2 dz' = \frac{3m}{4R^3} r^2 dz'$$

MOMENT BEZWŁADNOŚCI KRĄŻKA:

$$dI = \frac{1}{2} dm \cdot r^2 = \frac{3m}{8R^3} r^4 dz' = \frac{3m}{8R^3} (R^2 - z'^2)^2 dz'$$

WKŁADY OD WSZYSTKICH KRĄŻKÓW:

$$I' = \int_{-R}^{R} dI = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^{R} (R^2 - z'^2)^2 dz' = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2 z'^2 + z'^4)\, dz' =$$

$$= \frac{3m}{8R^3} \cdot \left(R^4 \cdot 2R - 2R^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2R^3 + \frac{1}{5} \cdot 2R^5\right) = \frac{3m}{4} R^2 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)}_{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}} = \frac{2}{5} m R^2$$

Z SYMETRII: $\quad I'_1 = I'_2 = I'_3 = \frac{2}{5} m R^2$