• TW. STEINERA

PRZESUNIĘCIE O' I UKŁADU U', BEZ ZMIANY KIERUNKÓW OSI:

$$\bar{r}' = \bar{r}_0' + \bar{r}'',$$

CZYLI ŚRODEK CIĘŻKOŚCI: $\bar{R}' = \bar{r}_0' + \bar{R}''$; $\bar{R}' = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{bmatrix}$; $\bar{R}'' = \begin{bmatrix} X''_1 \\ X''_2 \\ X''_3 \end{bmatrix}$

ZATEM ZMIANA TENSORA BEZWŁADNOŚCI:

$$I'_{ik} = \int \rho \left[(\bar{r}_0' + \bar{r}'')^2 \delta_{ik} - (x'_{0i} + x''_i)(x'_{0k} + x''_k) \right] dV' =$$

$$= \underbrace{M(\bar{r}_0'^2 + 2\bar{r}_0' \bar{R}'')\delta_{ik}}_{} - M\left(x'_{0i} x'_{0k} + x'_{0i} X''_k + X''_i x'_{0k} \right) + I''_{ik}$$

TW. STEINERA

ZNAJĄC MOMENT BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM O', MOŻEMY WYZNACZYĆ GO WZGLĘDEM DOWOLNEGO O''. Z KOLEI ZMIANA I'_{ik} PRZY OBROCIE OSI WYNIKA Z WŁASNOŚCI TRANSFORMACJI TENSORÓW.

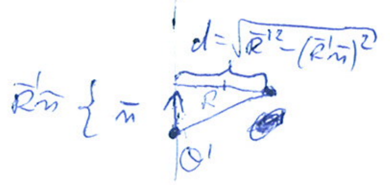
• WYBIERAJĄC $O'' = S$ (= ŚRODEK MASY UKŁADU), MAMY:

$$\bar{r}_0' = \bar{R}', \quad \bar{R}'' = 0$$

$\Rightarrow$ TW. STEINERA: $$I'_{ik} = M\left(R'^2 \delta_{ik} - X'_i X'_k \right) + I^{(S)}_{ik}$$

WTEDY MOMENT BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI $\bar{n}$:

$$I'_{\bar{n}} = \bar{n} \cdot (I' \bar{n}) = M \underbrace{\left(\bar{R}'^2 - (\bar{R}' \cdot \bar{n})^2 \right)}_{= d^2} + I^{(S)}_{\bar{n}}$$



CZYLI: $$\boxed{I'_{\bar{n}} = M d^2 + I^{(S)}_{\bar{n}}}$$

d – ODLEGŁOŚĆ MIĘDZY OSIĄ PRZECHODZĄCĄ PRZEZ O' ORAZ PRZECHODZĄCĄ PRZEZ ŚRODEK MASY.

UWAGA: ZNAJĄC $M, \bar{R}', I'_{ik}$, MOŻEMY OBLICZYĆ PĘD, MOMENT PĘDU, I ENERGIĘ KINETYCZNĄ BRYŁY SZTYWNEJ.

- PĘD BRYŁY SZTYWNEJ

$$\bar{P} = \sum_i m_i \bar{v} = \int \varrho \left(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}'\right) dV' = M \left(v_0 + \bar{\omega} \times \bar{R}'\right)$$

DLA $O' = S$ (CZYLI $\bar{r}_0 = \bar{R}$, $\bar{R}' = 0$) MAMY:

$$\bar{P} = M \dot{\bar{R}}$$

- MOMENT PĘDU BRYŁY SZTYWNEJ WZGLĘDEM O:

$$\bar{L} = \sum_i m_i \left(\bar{r} \times \bar{v}\right) = \sum_i m_i \left(\bar{r}_0 + \bar{r}'\right) \times \left(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}'\right) =$$

$$= M\left(\bar{r}_0 \times \bar{v}_0 + \bar{r}_0 \times \left(\bar{\omega} \times \bar{R}'\right) + \bar{R}' \times \bar{v}_0\right) + \sum_i m_i \bar{r}' \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}'\right)$$

ALE: $\sum_l m_l \bar{r}' \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}'\right) = \sum_l m_l \left(\bar{r}'^2 \bar{\omega} - \bar{r}'\left(\bar{\omega}\bar{r}'\right)\right) = I' \bar{\omega}$

GDYŻ, PONADTO: $\left(I'\bar{\omega}\right)_i = I'_{ik}\omega_k = \sum_l m_l \left(\bar{r}'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k\right)\omega_k = \sum_l m_l \left(\bar{r}'^2 \omega_i - x'_i \cdot \left(\bar{r}'\bar{\omega}\right)\right)$

$$\Rightarrow \quad I'\bar{\omega} = \sum_l m_l \left(\bar{r}'^2 \bar{\omega} - \bar{r}'\left(\bar{\omega}\bar{r}'\right)\right)$$

CZYLI: $\boxed{\bar{L} = M\left(\bar{r}_0 \times \bar{v}_0 + \bar{r}_0 \times \left(\bar{\omega} \times \bar{R}'\right) + \bar{R}' \times \bar{v}_0\right) + I'\bar{\omega}}$,

DLA $O' = S$:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{L} = M\bar{R} \times \dot{\bar{R}} + I^{(S)}\bar{\omega} = \bar{R} \times \bar{P} + \bar{L}^{(S)}}$$

GDZIE $\bar{L}^{(S)} = I^{(S)}\bar{\omega}$ = MOMENT PĘDU BRYŁY WZGLĘDEM JEJ ŚRODKA MASY

CZYLI MOMENT PĘDU BRYŁY JEST SUMĄ MOMENTU PĘDU DLA RUCHU POSTĘPOWEGO ŚRODKA MASY I MOMENTU PĘDU DLA RUCHU OBROTOWEGO WZGLĘDEM ŚRODKA MASY.

- ENERGIA KINETYCZNA BRYŁY SZTYWNEJ

$$T = \frac{1}{2}\sum_l m_l v^2 = \frac{1}{2}\sum_l m_l \left(\bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}'\right)^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + Mv_0(\bar{\omega}\times\bar{R}') +$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2}\sum_l m_l \underbrace{(\bar{\omega}\times\bar{r}')(\bar{\omega}\times\bar{r}')}_{=\bar{\omega}\cdot(\bar{r}'\times(\bar{\omega}\times\bar{r}'))}}_{=\frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot(I'\bar{\omega})} \Rightarrow$$

CZYLI
$$\underline{T = \frac{1}{2}Mv_0^2 + Mv_0(\bar{\omega}\times\bar{R}') + \frac{1}{2}\bar{\omega}(I'\bar{\omega})},$$

DLA $O' = S$ MAMY:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}M\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}\left(I^{(S)}\bar{\omega}\right)}$$

TW. KÖNIGA: ENERGIA KINETYCZNA JEST SUMĄ ENERGII KINETYCZNEJ DLA RUCHU POSTĘPOWEGO ŚRODKA MASY I ENERGII KINETYCZNEJ DLA RUCHU OBROTOWEGO WZGLĘDEM ŚRODKA MASY.

- UWAGA:
  - WARTO WYBIERAĆ POCZĄTEK O' UKŁADU U' W ŚRODKU MASY S
  - JEŚLI JEDEN Z PUNKTÓW BRYŁY SZTYWNEJ JEST NIERUCHOMY, TO WARTO WYBRAĆ O' W TYM PUNKCIE; WTEDY CAŁY RUCH SPROWADZA SIĘ DO RUCHU OBROTOWEGO WOKÓŁ TEGO PUNKTU (MAMY $\bar{r}_0 = 0$, $\bar{v}_0 = 0$) I DOSTAJEMY:

$$\boxed{\bar{P} = M\bar{\omega}\times\bar{R}', \quad \bar{L} = I'\bar{\omega}, \quad T = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot(I'\bar{\omega})}$$

10. RÓWNANIA RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ

SWOBODNA BRYŁA SZTYWNA MA $f=6$ STOPNI SWOBODY; JEJ RUCH JEST ZŁOŻENIEM RUCHU POSTĘPOWEGO I OBROTOWEGO. RÓWNANIA RUCHU MOŻNA WYPROWADZIĆ Z ANALIZY PĘDU I MOMENTU PĘDU:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F}, \qquad \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} \qquad (*)$$

$\bar{F}$ – WYPADKOWA SIŁA ZEWNĘTRZNA

$\bar{M}$ – WYPADKOWY MOMENT SIŁ ZEWNĘTRZNYCH

SIŁY WEWNĘTRZNE TO SIŁY REAKCJI WIĘZÓW, ICH UKŁAD ZNIKA (GDYŻ SPEŁNIAJĄ 3. ZASADĘ DYNAMIKI I SĄ CENTRALNE)

Z WYPROWADZONYCH WYRAŻEŃ NA $\bar{P}$ I $\bar{L}$:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[M(\bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{R}')\right] = M\left(\bar{a}_0 + \bar{\gamma}\times\bar{R}' + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R}')\right)$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\bar{r}_0\times\bar{v}_0 + M\bar{r}_0\times(\bar{\omega}\times\bar{R}') + M\bar{R}'\times\bar{v}_0 + I'\bar{\omega}\right) = \_\_\_ =$$

$$= \bar{r}_0\times\bar{F} + M\bar{R}'\times\bar{a}_0 + I'\bar{\gamma} + \bar{\omega}\times I'\bar{\omega}$$

CZYLI DOSTAJEMY UKŁAD 2 SPRZĘŻONYCH RÓWNAŃ: $(*) \Rightarrow$

$$\begin{cases} M\left(\bar{a}_0 + \bar{\gamma}\times\bar{R}' + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R}')\right) = \bar{F} \\ M\bar{R}'\times\bar{a}_0 + I'\bar{\gamma} + \bar{\omega}\times I'\bar{\omega} = \bar{M}', \end{cases} \qquad (**)$$

GDZIE $\bar{M}' = \bar{M} - \bar{r}_0\times\bar{F} = \sum(\bar{r}-\bar{r}_0)\times\Delta\bar{F} = \sum \bar{r}'\times\Delta\bar{F}$ TO WYPADKOWY MOMENT SIŁ ZEWNĘTRZNYCH WZGLĘDEM O'.

NIEWIADOME W TYCH RÓWNANIACH: $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$ I KĄTY EULERA $\theta(t), \varphi(t), \psi(t)$, WYSTĘPUJĄ POPRZEZ POCHODNE $\bar{a}_0 = \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\gamma} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$

JEŚLI $O' = S$ (ŚRODEK MASY), CZYLI $\bar{r}_0 = \bar{R}$, $\bar{R}' = 0$, TO $(**)$ PRZYJMUJĄ POSTAĆ:

$$\underline{M\ddot{\bar{R}} = \bar{F}, \qquad I^{(S)}\bar{\gamma} + \bar{\omega}\times I^{(S)}\bar{\omega} = \bar{M}^{(S)}}$$

R-NIE EULERA DLA RUCHU OBROTOWEGO BRYŁY SZTYWNEJ

- BRYŁA NIESWOBODNA (Z WIĘZAMI): $\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F} + \bar{F}_R$, $\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} + \bar{M}_R$, & R-NIA WIĘZÓW

$\bar{F}_R$, $\bar{M}_R$ – WYPADKOWE SIŁY / MOMENTY SIŁ REAKCJI

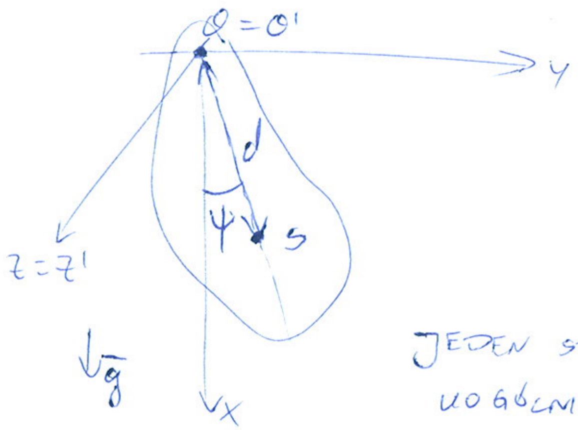
- WIĘZY HOLONOMICZNE DOSKONAŁE: MOŻNA WPROWADZIĆ WSPÓŁRZĘDNE UOGÓLNIONE ZGODNE Z WIĘZAMI, I ZAPISAĆ R-NIA RUCHU JAKO R-NIA LAGRANGE'A II RODZAJU. LAGRANŻJAN: $L = T - V$.
- JEŚLI PODCZAS RUCHU JAKIŚ PUNKT BRYŁY JEST NIERUCHOMY TO WARTO GO WYBRAĆ JAKO $O' = O$; WTEDY RUCH SPROWADZA SIĘ DO RUCHU OBROTOWEGO I JEST OPISANY RÓWNANIEM EULERA:

$$I'\bar{\gamma} + \bar{\omega} \times I'\bar{\omega} = \bar{M} + \bar{M}_R$$

SIŁY REAKCJI WYNIKAJĄ Z R-NIA: $M\bar{\gamma} \times \bar{R}' + M\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{R}') = \bar{F} + \bar{F}_R$.

11. PRZYKŁAD - WAHADŁO FIZYCZNE

BRYŁA SZTYWNA OBRACA SIĘ WOKÓŁ NIERUCHOMEJ POZIOMEJ OSI W JEDNORODNYM POLU GRAWITACYJNYM



WYBIERAMY $O = O'$

R-NIA WIĘZÓW: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$
$\theta = \varphi = 0$

JEDEN STOPIEŃ SWOBODY, JEDNA WSPÓŁRZĘDNA UOGÓLNIONA ψ;

MAMY: $\bar{v}_0 = 0$, $\bar{\omega} = \dot{\psi}\,\bar{e}_z$, $\bar{g} = g\,\bar{e}_x$

ZATEM: $T = \frac{1}{2}\bar{\omega}\left(I'\bar{\omega}\right) = \frac{1}{2} I'_z \cdot \dot{\psi}^2$; $I'_z = \bar{e}'_z\left(I'\bar{e}'_z\right)$ = MOMENT BEZWŁ. WOKÓŁ OSI OBROTU

$$V = -\sum \Delta m \cdot \bar{g}\,\bar{r} = -M\bar{g}\bar{R} = -Mgd\cos\psi$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} I'_z \dot{\psi}^2 + Mgd\cos\psi$$

R-NIA LAGRANGE'A: $I'_z\ddot{\psi} + Mgd\sin\psi = 0 \iff \ddot{\psi} + \frac{Mgd}{I'_z}\sin\psi = 0$,

CZYLI TAKIE JAK DLA WAHADŁA MATEMATYCZNEGO O DŁUGOŚCI $l = \frac{I_z'}{Md}$ (DŁUGOŚĆ ZREDUKOWANA)

Z TW. STEINERA: $I'_z = Md^2 + I_z^{(s)} \Rightarrow l = d + \frac{I_z^{(s)}}{Md}$.