12. HAMILTONIAN, RÓWNANIA HAMILTONA, NAWIASY POISSONA

R-MA LAGRANGE'A II RODZAJU: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

JAKO NIEZALEŻNE ZMIENNE TRAKTOWALIŚMY q_i ORAZ $\dot q_i$, T.ŻE $\dot q_i \equiv \frac{d}{dt} q_i$.

OZNACZMY ZATEM $v_i := \dot q_i$ I POTRAKTUJMY $L = L(q_i, v_i, t)$; ZATEM

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$-2f$ RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH 1. RZĘDU NA $2f$ NIEZNANYCH F-CJI.

DOKONAJMY TERAZ ZAMIANY ZMIENNYCH – TRANSFORMACJI LEGENDRE'A:

$$(q_i, v_i) \longleftrightarrow \left(q_i, p_i := \frac{\partial L}{\partial v_i}\right)$$

p_i – PĘDY UOGÓLNIONE

MECHANIKA LAGRANŻOWSKA — MECHANIKA HAMILTONOWSKA

ZATEM MAMY TERAZ $v_i = \dot q_i$, ORAZ R-NAŃ LAGRANGE'A $\dot p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$;

OBLICZMY WARIACJĘ LAGRANŻJANU:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial v_i}\delta v_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i p_i \delta v_i$$

ORAZ WARIACJĘ TAKIEJ F-CJI:

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{f} p_i v_i\right) = \sum_i \delta p_i\, v_i + \sum_i p_i \delta v_i$$

ODEJMUJĄC STRONAMI:

$$\delta\left(\sum_i p_i v_i - L\right) = -\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i v_i \delta p_i = -\sum_i \dot p_i \delta q_i + \sum_i \dot q_i \delta p_i \quad (*)$$

JEŚLI POTRAFIMY ROZWIKŁAĆ WARUNKI $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$ I WYRAZIĆ $v_i = v_i(q_k, p_k)$, TO $(*)$ JEST WARIACJĄ PEŁNEJ F-CJI WZGLĘDEM NIEZALEŻNYCH F-CJI q_i, p_i.

TAKĄ FUNKCJĘ NAZYWAMY HAMILTONIANEM UKŁADU P-TÓW MATERIALNYCH

$$\begin{cases} H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{f} p_i v_i(q_k, p_k, t) - L(q_i, v_i(q_k, p_k), t) \\ p_i = \frac{\partial L(q_k, v_k, t)}{\partial v_k} \end{cases}$$

UWAGA: • TĘ SAMĄ POSTAĆ MA ENERGIA UOGÓLNIONA, $G(q_i, v_i, t) = \sum v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L$,

CZYLI $H(q_i, p_i, t) = G(q_i, v_i(q_k, p_k, t), t)$, ALE SĄ TO F-CJE RÓŻNYCH ARGUMENTÓW.

• HAMILTONIAN, JAK LAGRANŻJAN, ZAWIERA PEŁNĄ INFORMACJĘ O DYNAMICE UKŁADU

ZATEM: $\delta H(q_i, p_i) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i =$ (Z DEFINICJI)

$= -\sum_i \dot{p}_i \delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i$ (Z OBLICZENIA ⊛)

SKORO WARIACJE F-CJI δq_i, δp_i SĄ NIEZALEŻNE, TO OTRZYMUJEMY R-NIA:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}}$$

R-NIA KANONICZNE HAMILTONA

ZMIENNE (q_i, p_i) OKREŚLANE SĄ JAKO KANONICZNIE SPRZĘŻONE.

INNE WYPROWADZENIE R-NAŃ HAMILTONA.

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{f} p_k v_k(q_j, p_j, t) - L\left(q_j, v_j(q_m, p_m, t), t\right)\right] =$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{f} p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_i}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \cancel{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial q_i}} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \underset{\text{R-NIA LAGRANGE'A II RODZAJU}}{=} -\dot{p}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\sum_{k=1}^{f} p_k v_k(q_j, p_j, t) - L\left(q_j, v_j(q_m, p_m, t), t\right)\right] =$$

$$= v_i + \cancel{\sum_{k=1}^{f} p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_i}} - \cancel{\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial p_i}} = v_i \equiv \dot{q}_i$$

CZYLI POWYŻSZE TO DOWÓD, ŻE Z R-NAŃ LAGRANGE'A II RODZAJU WYNIKAJĄ R-NIA HAMILTONA, O ILE MOŻNA ROZWIKŁAĆ ZALEŻNOŚĆ $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$.
ALE POWYŻEJ TEŻ POKAZALIŚMY $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$ & $\frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i$, ZAWSZE ZACHODZI.
ZATEM Z R-NAŃ HAMILTONA ⇒ LAGRANGE'A:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \& \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \equiv v_i$$

ZATEM:

R-NIA LAGRANGE'A II RODZAJU	⟺	R-NIA HAMILTONA
L, (q_i, v_i) PRZESTRZEŃ KONFIGURACYJNA	TRANS. LEGENDRE'A	H, (q_i, p_i) PRZESTRZEŃ FAZOWA

* DLA WIĘZÓW SKLERONOMICZNYCH I SIŁ POTENCJALNYCH $G = T + V$; ROZWIĄZUJĄC $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$

$\Rightarrow H(q_i, p_i, t) = G\left(q_i, v_i(q_k, p_k, t), t\right)$

PRZYKŁAD 1 UKŁAD N CZĄSTEK SWOBODNYCH O MASACH $m_1, —, m_N$

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}=\sum_{a=1}^{3}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_{i,a}^2=\sum_{i,a=1,2,3}\frac{1}{2}m_i v_{i,a}^2$$

$$p_{i,a}=\frac{\partial L}{\partial v_{i,a}}=m_i v_{i,a}\Rightarrow v_{i,a}=\frac{1}{m_i}p_{i,a}$$

CZYLI: $$H=\sum_{i,a}p_{i,a}v_{i,a}-L=\sum_{i,a}\frac{1}{m_i}p_{i,a}^2-\sum\frac{1}{2}\frac{p_{i,a}^2}{m_i}=\sum_{i,a}\frac{p_{i,a}^2}{2m_i}$$

R-NA HAMILTONA:
$$\dot{p}_{i,a}=-\frac{\partial H}{\partial r_{i,a}}=0\Rightarrow p_{i,a}=\text{CONST}$$
$$\dot{r}_{i,a}=\frac{\partial H}{\partial p_{i,a}}=\frac{p_{i,a}}{m_i}=\text{CONST}$$

PRZYKŁAD 2 OSCYLATOR HARMONICZNY

WIĘZY SKLERONOMICZNE, SIŁY POTENCJALNE:

$L=T-V$ F-CJA POŁOŻEŃ I PRĘDKOŚCI, $H=T+V$ F-CJA POŁOŻEŃ I PĘDÓW

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$$
$$\Rightarrow p=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}\Rightarrow\dot{x}=\frac{p}{m}\Rightarrow H=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$$

R-NA HAMILTONA:
$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-kx,\quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}\Rightarrow\underbrace{\ddot{x}=\frac{\dot{p}}{m}=-\frac{k}{m}x}$$

JAK R-NIE NEWTONA, ROZWIĄZANIE TO DRGANIA HARMONICZNE Z CZĘSTOŚCIĄ $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

PRZYKŁAD 3 CZĄSTKA O MASIE m, ŁADUNKU q PORUSZA SIĘ W POLU EL-MAG Z POTENCJAŁEM SKALARNYM φ, WEKTOROWYM $\vec{A}$

$$L=T-U=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2}-(q\varphi-q\dot{\vec{r}}\vec{A})=\sum_{a=1}^{3}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}_a^2+q\dot{r}_aA_a\right)-q\varphi$$
$$p_a=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}_a}=m\dot{r}_a+qA_a\Rightarrow\dot{r}_a=\frac{1}{m}(p_a-qA_a)$$
$$H=\sum_{a=1}^{3}p_a\dot{r}_a-L=\sum_a\frac{p_a}{m}(p_a-qA_a)-\sum_a\frac{1}{2m}(p_a-qA_a)^2-\sum_a\frac{q}{m}(p_a-qA_a)A_a+q\varphi$$
$$=\sum_a\frac{1}{2m}(p_a-qA_a)^2+q\varphi$$

R-NA HAMILTONA:
$$\dot{p}_a=-\frac{\partial H}{\partial r_a}=0,\quad\dot{r}_a=\frac{\partial H}{\partial p_a}=\frac{1}{2m}(p_a-qA_a)$$

NAWIASY POISSONA

DEF. NAWIASEM POISSONA DWÓCH F-CJI $f(q,p,t)$ ORAZ $g(q,p,t)$ NAZYWAMY

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

WŁASNOŚCI (Z DEFINICJI):

$$\{f_1,f_2\} = -\{f_2,f_1\}$$

$$\{f,f\} = 0$$

$$\{f_1+f_2,g\} = \{f_1,g\} + \{f_2,g\}$$

$$\{f_1 f_2,g\} = f_1\{f_2,g\} + \{f_1,g\}f_2$$

$$\{f,q_l\} = -\frac{\partial f}{\partial p_l}$$

$$\{f,p_l\} = \frac{\partial f}{\partial q_l}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

$$\{f_1,\{f_2,f_3\}\} + \{f_2,\{f_3,f_1\}\} + \{f_3,\{f_1,f_2\}\} = 0$$ (TOŻSAMOŚĆ POISSONA / JACOBIEGO)

$$\{q_i,q_l\} = 0, \qquad \{q_i,p_l\} = \delta_{il}, \qquad \{p_i,p_l\} = 0$$

POCHODNA ZUPEŁNA WZGLĘDEM CZASU:

$$\frac{d}{dt}f(p,q,t) = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \overset{\text{R-NIA HAMILTONA}}{=} \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

CZYLI DOSTAJEMY <u>OGÓLNE RÓWNANIE MECHANIKI</u>:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

- SZCZEGÓLNE PRZYPADKI:
  - RÓWNANIA HAMILTONA: $\frac{dq_l}{dt} = \{q_l,H\} = \frac{\partial H}{\partial p_l}$, $\frac{dp_l}{dt} = \{p_l,H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$
  - PRAWO ZMIANY ENERGII UOGÓLNIONEJ: $\frac{dH}{dt} = \cancel{\{H,H\}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$
- WIELKOŚĆ FIZYCZNA JEST ZACHOWANA, JEŚLI $-\{f,H\} = \{H,f\} = \frac{\partial f}{\partial t}$

JEŚLI $\{H,p_l\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial q_l} = 0$, TO $p_l = \text{const}$

JEŚLI $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, TO $H = \text{const}$

TW. POISSONA-JACOBIEGO

JEŚLI W CZASIE RUCHU $f(q,p,t)=\text{const}$ ORAZ $g(q,p,t)=\text{const}$, TO TAKŻE $\{f,g\}=\text{const}$.

DOWÓD: SKORO $\frac{df}{dt}=0=\frac{dg}{dt}$, TO $\{H,f\}=\frac{\partial f}{\partial t}$, $\{H,g\}=\frac{\partial g}{\partial t}$

ZATEM:
$$\frac{d}{dt}\{f,g\}=\{\{f,g\},H\}+\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\{\{f,g\},H\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$$

OGÓLNE TW. MECHANIKI

$$=\{\{f,g\},H\}+\{\{H,f\},g\}+\underbrace{\{f,\{H,g\}\}}_{=\{\{g,H\},f\}}=0$$

TOŻSAMOŚĆ JACOBIEGO

NP. JEŚLI W CZASIE RUCHU UKŁADU P-TÓW MATERIALNYCH W POLU SIŁ POTENCJALNYCH ZACHOWANE SĄ 2 SKŁADOWE KARTEZJAŃSKIE MOMENTU PĘDU, TO ZACHOWANA JEST TEŻ TRZECIA.

SKORO $\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{p}_i$, TO $\{L_x,L_y\}=L_z$, $\{L_y,L_z\}=L_x$, $\{L_z,L_x\}=L_y$

GDYŻ NP.
$$\{L_x,L_y\}=\sum_{i,j=1}^{n}\{y_ip_{iz}-z_ip_{iy},\ z_jp_{jx}-x_jp_{jz}\}=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}y_i\underbrace{\{p_{iz},z_j\}}_{-\delta_{ij}}p_{jx}+\sum_{i,j=1}^{n}p_{iy}\underbrace{\{z_i,p_{jz}\}}_{\delta_{ij}}x_j=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(-y_ip_{ix}+x_ip_{iy})=L_z$$

ETC.

ZATEM, Z TW. POISSONA-JACOBIEGO, JEŚLI L_x I L_y ZACHOWANE, TO L_z TEŻ.