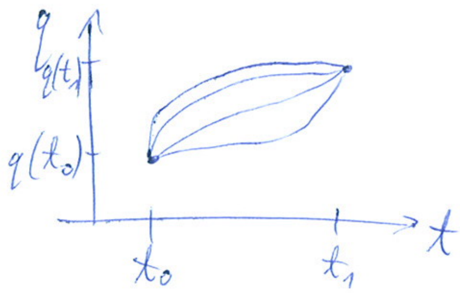
13. ZASADA WARIACYJNA HAMILTONA, RACHUNEK WARIACYJNY

ROZWAŻMY UKŁAD P-TÓW MATERIALNYCH LUB BRYŁ SZTYWNYCH Z DWUSTRONNYMI WIĘZAMI HOLONOMICZNYMI DOSKONAŁYMI, ORAZ SIŁAMI DLA KTÓRYCH ISTNIEJE UOGÓLNIONA ENERGIA POTENCJALNA. UKŁAD TAKI OPISANY JEST PRZEZ LAGRANŻJAN $L(q,\dot{q},t)$.

DEF. DZIAŁANIE HAMILTONA DLA UKŁADU O LAGRANŻJANIE L, W PRZEDZIALE CZASU (t_0, t_1), TO FUNKCJONAŁ RUCHÓW $q(t)$

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)\,dt$$

RUCHY $q(t)$ NIEKONIECZNIE RZECZYWISTE (FIZYCZNE).



WARIACJA DZIAŁANIA (ODPOWIEDNIK RÓŻNICZKI DLA ZWYKŁEJ F-CJI) PRZY WARIACJI (ZMIANIE) RUCHU: (BEZ WARIACJI CZASU)

$$\begin{cases} q(t) \longrightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t), \\ \dot{q}(t) \longrightarrow \dot{q}'(t) = \dot{q}(t) + \dfrac{d\,\delta q(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{f} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\,\delta q_i(t)}{dt}}_{\text{PRZEZ CZĘŚCI}} \Big) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{f} \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\text{R-NIA LAGRANGE'A}} \Big)\delta q_i\,dt + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1}$$

DLA WARIACJI RUCHU BEZ WARIACJI NA KOŃCACH PRZEDZIAŁU, $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$ OSTATNIA SUMA ZNIKA, A POZOSTAŁA RÓWNOŚĆ ZACHODZI DLA DOWOLNYCH δq_i WEWNĄTRZ PRZEDZIAŁU (t_0, t_1). OZNACZA TO:

$$\delta S = 0 \iff \text{R-NIA LAGRANGE'A II RODZAJU}$$

WNIOSEK: ZASADA WARIACYJNA HAMILTONA:

W DANYM PRZEDZIALE CZASU RUCHEM RZECZYWISTYM (SPOŚRÓD WSZYSTKICH HIPOTETYCZNIE MOŻLIWYCH) JEST TAKI RUCH, DLA KTÓREGO WARIACJA DZIAŁANIA δS ZNIKA (PRZY DOWOLNYCH WARIACJACH δq T. ŻE) $\delta q(t_0) = 0 = \delta q(t_1)$

UWAGA: WARIACJA FUNKCJONAŁU (NP. DZIAŁANIA) TO ODPOWIEDNIK RÓŻNICZKI DLA F-CJI; JEJ ZNIKANIE TO WARUNEK KONIECZNY WYSTĄPIENIA EKSTREMUM TEGO FUNKCJONAŁU. MOŻNA POKAZAĆ, ŻE DLA ODPOWIEDNIO MAŁYCH PRZEDZIAŁÓW CZASU, ZASADA WARIACYJNA HAMILTONA OZNACZA ZASADĘ NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA (EKSTREMUM $\rightarrow$ MINIMUM).

// PRZYKŁAD: OSCYLATOR HARMONICZNY, $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ (1-WYMIAROWY)

ROZWAŻMY RUCH W PRZEDZIALE CZASU $(0, t_1)$, T. ŻE $x(0) = 0$, $x(t_1) = x_1$.

RUCH RZECZYWISTY: $x = A \sin(\omega t)$; SKORO $x(t_1) = x_1$, TO $A = \frac{x_1}{\sin(\omega t_1)}$,

CZYLI:
$$x = \frac{x_1}{\sin(\omega t_1)} \sin(\omega t).$$

- DZIAŁANIE DLA RUCHU RZECZYWISTEGO:

$$S_{RZECZ.} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{1}{2} m \omega^2 \frac{x_1^2}{\sin^2(\omega t_1)} \underbrace{\cos^2(\omega t)} - \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{x_1^2}{\sin^2(\omega t_1)} \underbrace{\sin^2(\omega t)} \right] =$$

$$= \frac{m\omega^2}{2} \frac{x_1^2}{\sin^2(\omega t_1)} \int_0^{t_1} \underbrace{\cos(2\omega t)}\, dt = \frac{m\omega^2}{2} \frac{x_1^2}{\sin^2(\omega t_1)} \cdot \frac{\sin(2\omega t_1)}{2\omega} =$$

$$= \frac{m\omega x_1^2}{2} \operatorname{ctg}(\omega t_1) = \left| \begin{matrix} \text{ROZWINIĘCIE} \\ \text{DLA} \\ 0 < \omega t_1 < \pi \end{matrix} \right| = \frac{m\omega x_1^2}{2} \left(\frac{1}{\omega t_1} - \frac{\omega t_1}{3} + (\text{WYRAZY UJEMNE}) \right)$$

- DZIAŁANIE DLA (HIPOTETYCZNEGO) RUCHU $x = \frac{x_1}{t_1} t$:

$$S_{HIPOT.} = \frac{1}{2} m \frac{x_1^2}{t_1^2} \int_0^{t_1} dt \left(1 - \omega^2 t^2\right) = \frac{m x_1^2}{2 t_1^2} \left(t_1 - \frac{\omega^2 t_1^3}{3} \right) = \frac{m\omega x_1^2}{2} \left(\frac{1}{\omega t_1} - \frac{\omega t_1}{3} \right).$$

CZYLI RZECZYWIŚCIE $S_{RZECZ} < S_{HIPOT.}$

// UWAGA: NOWE SPOJRZENIE NA RUCH - UKŁAD PORUSZA SIĘ TAK, BY OSIĄGNĄĆ PEWIEN CEL (OPIS TELEOLOGICZNY). INACZEJ W RÓWNANIACH RUCHU (OPIS KAUZALNY/PRZYCZYNOWY) - ZMIANA UKŁADU ZADANA PRZEZ SIŁY W KAŻDEJ KOLEJNEJ CHWILI.

RACHUNEK WARIACYJNY

ZASADA WARIACYJNA HAMILTONA MA TAKĄ FORMĘ JAK PODSTAWOWE TWIERDZENIE RACHUNKU WARIACYJNEGO:

ZNIKANIE WARIACJI FUNKCJONAŁU $I=\int_{x_A}^{x_B} F(y,y',x)\,dx$ DLA F-CJI $y=y(x)$ PRZY DOWOLNYCH WARIACJACH δy ZNIKAJĄCYCH NA BRZEGACH PRZEDZIAŁU, $\delta y(x_A)=\delta y(x_B)=0$ JEST RÓWNOWAŻNE TEMU, ŻE $y(x)$ SPEŁNIA R-NIA EULERA-LAGRANGE'A:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

OZNACZMY $y_A=y(x_A)$, $y_B=y(x_B)$

DOWÓD:

ROZWAŻMY 1-PARAMETROWĄ RODZINĘ F-CJI PRÓBNYCH $\tilde{y}(x,\epsilon)$, T. ŻE:

a) $\forall_\epsilon \quad \tilde{y}(x_A,\epsilon)=y_A$ ORAZ $\tilde{y}(x_B,\epsilon)=y_B$

b) $\tilde{y}(x,0)=y(x)$ = POSZUKIWANA FUNKCJA (EKSTREMUM I)

c) $\tilde{y}(x,\epsilon)$ I JEJ 1. I 2. POCHODNE SĄ CIĄGŁYMI FUNKCJAMI ARGUMENTÓW

W TAKIM RAZIE CAŁKA $I(\epsilon)=\int_{x_A}^{x_B} F(\tilde{y},\tilde{y}',x)$ JEST F-CJĄ ϵ, PRZYJMUJĄCĄ EKSTREMUM DLA $\epsilon=0$, NIEZALEŻNIE OD WYBRANEJ RODZINY KRZYWYCH $\tilde{y}(x,\epsilon)$ TOTEŻ:

$$0=\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\left.\frac{d}{d\epsilon}\int_{x_A}^{x_B}F(\tilde{y},\tilde{y}',x)\,dx\right|_{\epsilon=0}=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\cdot\frac{\partial\tilde{y}'}{\partial\epsilon}\right]dx=$$

$$=\boxed{\begin{matrix}\text{ZMIANA}\\ \text{KOLEJNOŚCI}\\ \text{POCHODNYCH}\end{matrix}}=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}\right]=\boxed{\begin{matrix}\text{PRZEZ}\\ \text{CZĘŚCI}\end{matrix}}=$$

$$=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}-\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\right)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}\right]dx+\underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\cdot\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}\right|_{x_A}^{x_B}}_{=0\text{ (WARIACJA NA KOŃCACH PRZEDZIAŁU ZNIKA)}}=$$

$$=\int_{x_A}^{x_B}\left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\left[\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\tilde{y}'}\right]_{\epsilon=0}$$

TO ZACHODZI DLA DOWOLNEJ F-CJI PRÓBNEJ $\tilde{y}(x,\epsilon)$, CZYLI $\left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$ JEST DOWOLNA, ZATEM ZNIKAĆ MUSI CAŁY CZŁON:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0}$$

R-NIA EULERA-LAGRANGE'A

UWAGA:

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right)=\cancel{y''\frac{\partial F}{\partial y'}}+y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}y'-\cancel{\frac{\partial F}{\partial y'}y''}-\frac{\partial F}{\partial x}=$$

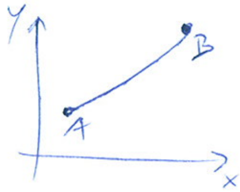
$$=y'\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\partial F}{\partial x}$$

ZATEM, JEŚLI $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ – CZYLI F-CJA PODCAŁKOWA NIE ZALEŻY JAWNIE OD x – TO ZAMIAST R-NAŃ LAGRANGE'A WYSTARCZY ROZWIĄZAĆ PROSTSZY WARUNEK

$$\underline{y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=\text{const}}$$

- PRZYKŁAD 1

NAJKRÓTSZA LINIA ŁĄCZĄCA PUNKTY NA PŁASZCZYŹNIE



INFINITEZYMALNY ELEMENT DŁUGOŚCI WYKRESU KRZYWEJ $y(x)$:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

CZYLI DŁUGOŚĆ KRZYWEJ:

$$I=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

ZATEM ROZWIĄZUJEMY R-NIA EULERA-LAGRANGE'A DLA $F=\sqrt{1+y'^2}$:

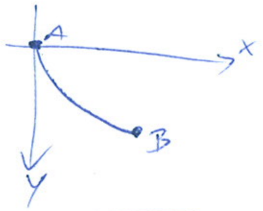
$$0=\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Rightarrow\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\text{const}\Rightarrow y'=\text{const}$$

$$\Rightarrow\underline{y=ax+b}$$

CZYLI ROZWIĄZANIEM JEST LINIA PROSTA.

• PRZYKŁAD 2

BRACHISTOCHRONA – TOR ŁĄCZĄCY PUNKTY A i B TAKI, ŻE PUNKT MATERIALNY PORUSZAJĄCY SIĘ PO NIM BEZ TARCIA, POD WPŁYWEM GRAWITACJI, PRZEMIEŚCI SIĘ OD A DO B W NAJKRÓTSZYM CZASIE.



SZUKAMY MINIMUM CAŁKI:

$$I = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{v} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}\, dx}{v} =$$

Z ZACHOWANIA ENERGII: $\frac{1}{2} m v^2 - mgy = E$; MOŻEMY TAK WYBRAĆ ENERGIĘ POTENCJALNĄ BY $E=0$; WTEDY:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{2gy}}$$

CZYLI $I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx$, $F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$

NIE ZALEŻY JAWNIE OD x, WIĘC MOŻEMY ROZWIĄZAĆ:

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = C = \text{const}$$

$$y' \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{1+y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \quad /^2$$

$$\frac{1}{y(1+y'^2)} = C = \frac{1}{2a}$$

$$y(1+y'^2) = 2a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{2a-y}{y}}} = dx$$

PODSTAWMY $y = a(1-\cos\theta) = 2a \sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow dy = a \sin\theta\, d\theta = 2a \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \Rightarrow \frac{\left(2a \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta\right)\left(\sqrt{2a} \sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{a(1+\cos\theta)}} = dx$

$$\boxed{\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

ALE $\frac{\cos\frac{\theta}{2} \cdot \sqrt{2a}}{\sqrt{a(1+\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\cos\theta}} = 1 \Rightarrow \boxed{2a \sin^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = dx} \quad /\int$

CZYLI $x - x_0 = \int 2a \sin^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = \int a(1-\cos\theta)\, d\theta = a(\theta - \sin\theta)$

• MOŻEMY ZAŁOŻYĆ $x_0 = 0$, ZNAJDUJEMY ROZWIĄZANIE W POSTACI PARAMETRYCZNEJ

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

RÓWNANIE CYKLOIDY!
(KRZYWA JAKĄ ZAKREŚLA PUNKT LEŻĄCY NA OBWODZIE TOCZĄCEGO SIĘ KOŁA)

ZAGADNIENIE BRACHISTOCHRONY ROZWIĄZAŁ BERNOULLI W 1696 r.