14. SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI - POSTULATY, PRZEKSZTAŁCENIA LORENTZA

SFORMUŁOWANA PRZEZ EINSTEINA W 1905 R.

POSTULAT I: PIERWSZA ZASADA DYNAMIKI: ISTNIEJĄ INERCJALNE UKŁADY ODNIESIENIA (CZYLI TAKIE, W KTÓRYCH CIAŁO NA KTÓRE NIE DZIAŁAJĄ ŻADNE SIŁY SPOCZYWA LUB PORUSZA SIĘ RUCHEM JEDNOSTAJNYM PROSTOLINIOWYM).

[TAK JAK W MECHANICE NIERELATYWISTYCZNEJ]
(WE WSZYSTKICH UKŁADACH INERCJALNYCH PRAWA FIZYKI SĄ TAKIE SAME.) ZASADA WZGLĘDNOŚCI EINSTEINA

POSTULAT II: PRĘDKOŚĆ ŚWIATŁA (W PRÓŻNI) MA TAKĄ SAMĄ WARTOŚĆ $c = 299\,792 \ \mathrm{km/s}$ WE WSZYSTKICH INERCJALNYCH UKŁADACH ODNIESIENIA, NIEZALEŻNIE OD KIERUNKU PROPAGACJI.

ANALIZA TYCH POSTULATÓW PROWADZI DO WNIOSKÓW TAKICH JAK DYLATACJA CZASU I SKRÓCENIE (KONTRAKCJA) DŁUGOŚCI. RÓWNOWAŻNIE, ZJAWISKA TE SĄ KONSEKWENCJĄ INNEGO NIŻ W MECHANICE NIERELATYWISTYCZNEJ ZWIĄZKU MIĘDZY WSPÓŁRZĘDNYMI ZDARZEŃ W RÓŻNYCH UKŁADACH ODNIESIENIA U I U'.

DEF. ZDARZENIE - CZAS I WSPÓŁRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE POŁOŻENIA PUNKTU MATERIALNEGO.

POWYŻSZY ZWIĄZEK OKREŚLONY JEST PRZEZ PRZEKSZTAŁCENIA POINCARÉGO:

DLA $(x^\mu) = (c\cdot t, \vec{r})$ $\mu = 0, 1, 2, 3$ - CZTEROWEKTOR POŁOŻENIA W CZASOPRZESTRZENI

MAMY:

$$\boxed{x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L^\mu_{\ \nu} x'^\nu + x^\mu_0}$$

PRZEKSZTAŁCENIA POINCARÉGO TO 10-PARAMETROWA GRUPA; SĄ ZŁOŻENIEM PRZESUNIĘĆ W CZASIE I PRZESTRZENI (4 PARAMETRY x^μ_0) ORAZ PRZEKSZTAŁCEŃ LORENTZA $L^\mu_{\ \nu}$ (3 OBROTY W PRZESTRZENI ORAZ 3 SZCZEGÓLNE PRZEKSZTAŁCENIA LORENTZA).

$$\boxed{\begin{cases} ct = \dfrac{ct' + \frac{\vec{v}}{c}\vec{r}'_{\parallel}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{r}_{\parallel} = \dfrac{\vec{r}'_{\parallel} + \frac{\vec{v}}{c}\cdot ct'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{r}_{\perp} = \vec{r}'_{\perp} \end{cases}} \quad (*)$$

DLA $|\vec{v}| < c$

GDZIE $\parallel$ i $\perp$ TO SKŁADOWE RÓWNOLEGŁE I PROSTOPADŁE DO $\vec{v}$.

UWAGI

1.° PRZEKSZTAŁCENIE ODWROTNE $(\vec{v} \to -\vec{v})$:

$$(**)\quad \begin{cases} ct' = \dfrac{ct - \frac{\bar{v}}{c}\bar{r}_{\parallel}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \bar{r}_{\parallel}' = \dfrac{\bar{r}_{\parallel} - \frac{\bar{v}}{c}ct}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \bar{r}_{\perp}' = \bar{r}_{\perp} \end{cases}$$

2.° W GRANICY NIERELATYWISTYCZNEJ $\frac{v}{c} \ll 1$ SZCZEGÓLNE PRZEKSZTAŁCENIE LORENTZA REDUKUJE SIĘ DO SZCZEGÓLNEGO PRZEKSZTAŁCENIA GALILEUSZA:

$$\begin{cases} t = t' \\ \vec{r} = \bar{r}' + \bar{v}\cdot t \end{cases}$$

3.° PRZY PRZEKSZTAŁCENIACH GALILEUSZA Δt I $|\Delta\bar{r}|$ SĄ NIEZMIENNIKAMI. NATOMIAST NIEZMIENNIKIEM PRZEKSZTAŁCEŃ POINCARÉGO JEST INTERWAŁ CZASOPRZESTRZENNY:

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\bar{r})^2$$

DOWÓD:

$$(\Delta s)^2 = \frac{\left(c\Delta t' + \frac{\bar{v}}{c}\Delta\bar{r}_{\parallel}'\right)^2}{1-v^2/c^2} - \frac{\left(\Delta\bar{r}_{\parallel}' + \frac{\bar{v}}{c}c\Delta t'\right)^2}{1-v^2/c^2} - \left(\Delta\bar{r}_{\perp}'\right)^2 =$$

$$= \frac{c^2(\Delta t')^2\cancel{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - (\Delta\bar{r}_{\parallel}')^2\cancel{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}{\cancel{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \left(\Delta\bar{r}_{\perp}'\right)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta\bar{r}')^2 = (\Delta s')^2$$

4.° DYLATACJA CZASU: ODSTĘP CZASU MIĘDZY DWOMA ZDARZENIAMI W TYM SAMYM PUNKCIE PRZESTRZENNYM W UKŁADZIE U' (PORUSZAJĄCYM SIĘ WZGLĘDEM UKŁADU U Z PRĘDKOŚCIĄ $\bar{v}$) JEST WIĘKSZY ~~NIŻ~~ W UKŁADZIE U:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

5.° SKRÓCENIE (KONTRAKCJA) DŁUGOŚCI: DŁUGOŚĆ PRĘTA MIERZONA W U USTAWIONEGO W KIERUNKU $\bar{v}$ JEST KRÓTSZA NIŻ DŁUGOŚĆ PRĘTA SPOCZYWAJĄCEGO W U':

$$\Delta l \overset{(*)}{=} \frac{\Delta l' + \frac{\bar{v}}{c}(c\cdot\Delta t')}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \overset{(**)}{=} \frac{\Delta l' + \frac{\bar{v}}{c}\dfrac{\left[\cancel{c\Delta t} - \frac{\bar{v}}{c}\Delta l\right]}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta l'\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{c^2}\Delta l}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta l = \Delta l'\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ODLEGŁOŚCI W KIERUNKACH $\perp$ DO $\bar{v}$ NIE ZMIENIAJĄ SIĘ.

6.° PRZEKSZTAŁCENIA POINCARÉGO MOŻEMY TRAKTOWAĆ JAK IZOMETRIE CZASOPRZESTRZENI; INTERWAŁ PEŁNI ROLĘ ODLEGŁOŚCI; MOŻE BYĆ UJEMNA! JEST TO <u>GEOMETRIA MINKOWSKIEGO</u>.

ZAŁÓŻMY, ŻE $\bar{v} = v\bar{e}_x$; WTEDY SZCZEGÓLNE PRZEKSZTAŁCENIE LORENTZA:

$$\begin{cases} ct = \dfrac{ct' + \frac{v}{c}\cdot x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x = \dfrac{x' + \frac{v}{c}ct'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y', \quad z = z' \end{cases}$$

CZYLI MACIERZ DLA TEGO PRZEKSZTAŁCENIA: (TZN. $x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L^\mu{}_\nu x'^\nu$)

$$L^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OZNACZAJĄC: $\cosh\zeta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\sinh\zeta = \frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $(\cosh^2\zeta - \sinh^2\zeta = 1 \ \checkmark)$

MAMY:

$$L^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cosh\zeta & \sinh\zeta & 0 & 0 \\ \sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CZYLI $\operatorname{tgh}\zeta = \frac{\sinh\zeta}{\cosh\zeta} = \frac{v}{c}$

$\Rightarrow \zeta = \operatorname{artgh}\frac{v}{c}$

ANALOGICZNIE JAK MACIERZ OBROTU W PŁASZCZYŹNIE CZASOWO-PRZESTRZENNEJ! TO „KĄT OBROTU" (POSPIESZNOŚĆ RAPIDITY)

7.° <u>CZTEROTENSORY</u>:

- CZTEROSKALARY: (TENSORY RZĘDU 0): NIE ULEGAJĄ ZMIANIE PRZY TRANSFORMACJI LORENTZA: $a = a'$

- CZTEROWEKTORY: WIELKOŚCI KTÓRE PRZEKSZTAŁCAJĄ SIĘ JAK x^μ, TZN.

$$a^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L^\mu{}_\nu a'^\nu$$

- CZTEROTENSORY 2. RZĘDU: PRZEKSZTAŁCAJĄ SIĘ PRZY TRANSFORMACJI LORENTZA:

$$a^{\mu\nu} = \sum_{\varrho,\sigma=0}^{3} L^\mu{}_\varrho L^\nu{}_\sigma a'^{\varrho\sigma}$$

FAKT
- ILOCZYN SKALARNY DWÓCH CZTEROWEKTORÓW (a^μ), (b^μ):

$$(a^\mu | b^\mu) := a^0 b^0 - \bar{a}\,\bar{b} = \sum_{\mu\nu} a^\mu b^\nu g_{\mu\nu} \quad \text{DLA „METRYKI"} \quad g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

JEST CZTEROSKALAREM.

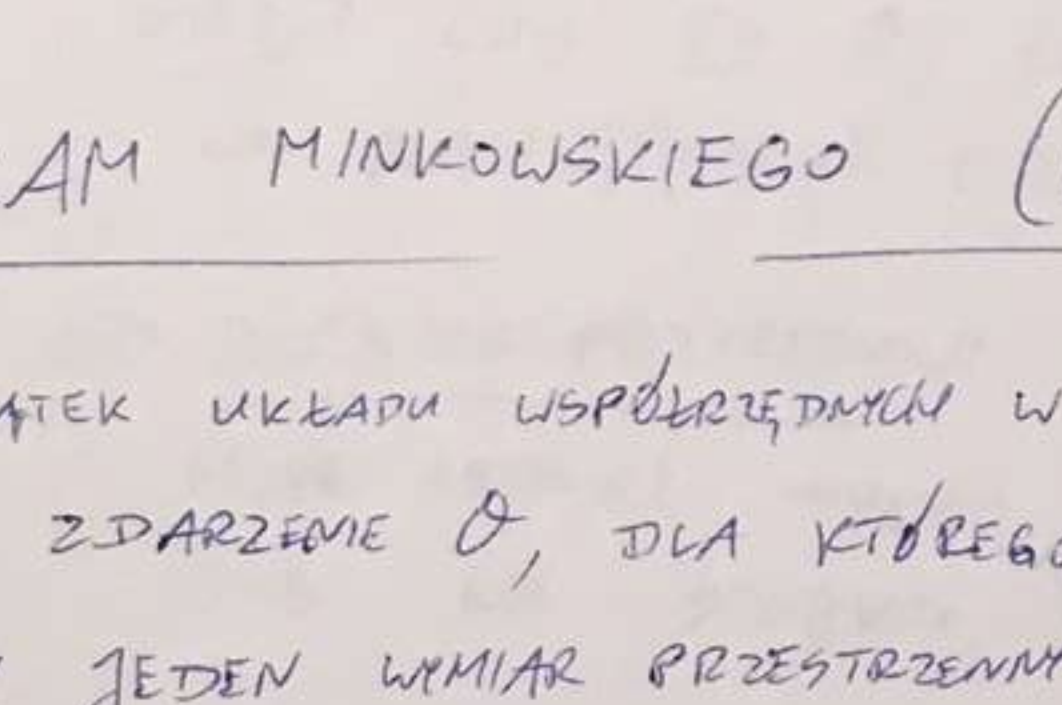
8.° INTERWAŁY CZASOPRZESTRZENNE NAZYWAMY:

- „TYPU CZASOWEGO", JEŚLI $(\Delta s)^2 > 0$; WTEDY ISTNIEJE UKŁAD „INERCJALNY U', W KTÓRYM OBA TE ZDARZENIA ZASZŁY W TYM SAMYM MIEJSCU, ALE INNYM CZASIE, $(\Delta s)^2 = c^2 |\Delta t'|^2$
- „TYPU PRZESTRZENNEGO", JEŚLI $(\Delta s)^2 < 0$; WTEDY ISTNIEJE UKŁAD INERCJALNY U', W KTÓRYM OBA TE ZDARZENIA ZASZŁY JEDNOCZEŚNIE, ALE W RÓŻNYCH MIEJSCACH, $(\Delta s)^2 = -|\Delta \bar{r}'|^2$
- „TYPU ZEROWEGO", $(\Delta s)^2 = 0$; WTEDY W DOWOLNYM UKŁADZIE INERCJALNYM $|\Delta \bar{r}'|^2 = c^2 |\Delta t'|^2$

- DIAGRAM MINKOWSKIEGO (CZASOPRZESTRZENNY)

JAKO POCZĄTEK UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH W CZASOPRZESTRZENI, W UKŁADZIE INERCJALNYM U, WYBIERZMY ZDARZENIE O, DLA KTÓREGO $t=0$, $\bar{r}=0$. DLA UPROSZCZENIA ROZWAŻMY JEDEN WYMIAR PRZESTRZENNY, x. NA OSI POZIOMEJ ZAZNACZMY x, NA PIONOWEJ $x_0 = ct$. TRAJEKTORIA CZĄSTKI NA TAKIM WYKRESIE TO JEJ LINIA ŚWIATA.

LINIA ŚWIATA DLA CZĄSTKI W RUCHU JEDNOSTAJNYM PROSTOLINIOWYM, $\bar{r} = \bar{v}t$, TO PROSTA PRZECHODZĄCA PRZEZ O, NACHYLONA DO OSI PIONOWEJ POD KĄTEM δ T.ŻE. $\operatorname{tg}\delta = \beta = v/c$.

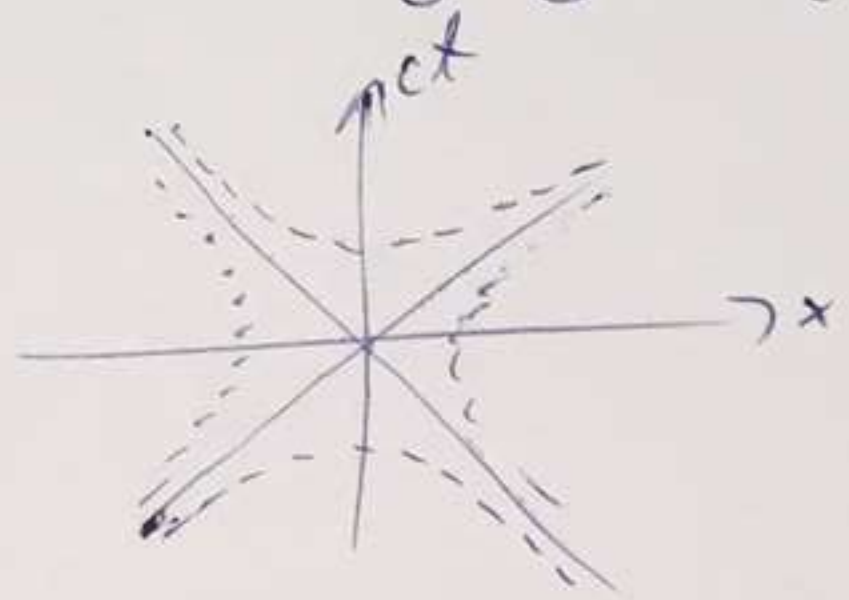


SKORO MAKSYMALNA PRĘDKOŚĆ CZĄSTKI TO c, TO $\beta \leq 1$ – CZYLI TA PROSTA LEŻY WEWNĄTRZ STOŻKA O KĄCIE ROZWARCIA $\pi/2$. POWIERZCHNIA TEGO STOŻKA ODPOWIADA CZĄSTKOM O PRĘDKOŚCI c – JEST TO STOŻEK ŚWIETLNY.

PRZEDZIAŁ CZASOPRZESTRZENNY WZGLĘDEM O JEST:
- ZEROWY DLA ZDARZEŃ NA STOŻKU
- CZASOWY —"— WEWNĄTRZ STOŻKA
- PRZESTRZENNY —"— POZA STOŻKIEM

PRZY PRZEKSZTAŁCENIACH LORENTZA $c^2t'^2 - \vec{r}'^2 = CONST$, (INTERWAŁ CZASOPRZ)

ZATEM WSPÓŁRZĘDNE TEGO SAMEGO ZDARZENIA W RÓŻNYCH UKŁADACH INERCJALNYCH U' ZNAJDUJĄ SIĘ NA HIPERBOLOIDZIE



- DLA ZDARZEŃ WEWNĄTRZ GÓRNEGO STOŻKA MAMY $\Delta t > 0$ W STOSUNKU DO O, I TAKŻE $\Delta t' > 0$ W DOWOLNYM INNYM UKŁADZIE ODNIESIENIA (BEZWZGLĘDNA PRZYSZŁOŚĆ)
- DLA DOLNEGO STOŻKA ANALOGICZNIE, $\Delta t' < 0$, (BEZWZGLĘDNA PRZESZŁOŚĆ)
- DLA ZDARZEŃ POZA STOŻKIEM INTERWAŁ PRZESTRZENNY:
  - W DOWOLNYM UKŁADZIE ODNIESIENIA ZDARZENIA ZACHODZĄ W RÓŻNYCH MIEJSCACH PRZESTRZENI (GDZIE INDZIEJ)
  - DLA KAŻDEGO ZDARZENIA Z TEGO OBSZARU ISTNIEJĄ TAKIE UKŁADY ODNIESIENIA, W KTÓRYCH TO ZDARZENIE ZACHODZI PRZED LUB PO O, LUB JEDNOCZEŚNIE Z O

    → NASTĘPSTWO CZASOWE WZGLĘDNE! ZALEŻY OD WYBORU UKŁADU ODNIESIENIA

⇒ ZWIĄZEK PRZYCZYNOWY MIĘDZY O I INNYM ZDARZENIEM MOŻE ISTNIEĆ TYLKO, JEŚLI TO ZDARZENIE JEST WEWNĄTRZ LUB NA STOŻKU ŚWIETLNYM.