- PRAWO TRANSFORMACYJNE PRĘDKOŚCI PRZY SZCZEGÓLNYM PRZEKSZTAŁCENIU LORENTZA

TZN. JAK PRĘDKOŚĆ PUNKTU MATERIALNEGO $\vec{w} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ TRANSFORMUJE SIĘ W $\vec{w}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ WYNIKA Z RÓŻNICZEK TRANSFORMACJI LORENTZA:

$$\begin{cases} \vec{w}_{\parallel} = \frac{d\vec{r}_{\parallel}}{dt} = \frac{d\bar{r}_{\parallel}' + \frac{\bar{v}}{c} c\, dt'}{dt' + \frac{\bar{v}}{c^2} d\bar{r}_{\parallel}'} = \frac{\bar{w}_{\parallel}' + \bar{v}}{1 + \frac{\bar{v}\bar{w}'}{c^2}} \\ \bar{w}_{\perp} = \frac{d\bar{r}_{\perp}}{dt} = \frac{d\bar{r}_{\perp}'}{\left(dt' + \frac{\bar{v}}{c^2} d\bar{r}'\right) / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\bar{w}_{\perp}' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{\bar{w}' \cdot \bar{v}}{c^2}} \end{cases}$$

UWAGI:

- RÓWNOCZEŚNIE, JEST TO PRAWO SKŁADANIA PRĘDKOŚCI.
- DLA $\frac{v}{c}, \frac{w'}{c} \ll 1$ OTRZYMUJEMY NIERELATYWISTYCZNE SKŁADANIE PRĘDKOŚCI

$$\boxed{\bar{w} = \bar{w}' + \bar{v}}$$

- NIECH $w' = c$, ORAZ $\vec{w}' \parallel \bar{v}$; UTEDY: (TZN. $\bar{w}' = c\frac{\bar{v}}{v}$)

$$\bar{w}_{\parallel} = \frac{c\frac{\bar{v}}{v} + \bar{v}}{1 + \frac{\bar{v}}{c^2} \cdot c\frac{\bar{v}}{v}} = \frac{\bar{v}\left(1 + \frac{c}{v}\right)}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c\frac{\bar{v}}{v}\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{1 + \frac{v}{c}} = c \cdot \frac{\bar{v}}{v}$$

CZYLI TAKŻE $w = c$; RZECZYWIŚCIE PRĘDKOŚĆ ŚWIATŁA JEST TAKA SAMA WE WSZYSTKICH UKŁADACH ODNIESIENIA (JEST CZTEROSKALAREM)!

- PRĘDKOŚĆ NIE TRANSFORMUJE SIĘ LINIOWO ($\bar{w}'$ W MIANOWNIKU), GDYŻ $\bar{r}$ ORAZ $t$ NIE MAJĄ RELATYWISTYCZNYCH PRAW TRANSFORMACJI
- ALE ROZWAŻMY $ds = \sqrt{(c\,dt)^2 - dr^2} = c\,dt \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 / c^2} = c \cdot dt \cdot \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}$ – CZTEROSKALAR

ZDEFINIUJMY CZAS WŁASNY $d\tau = \frac{ds}{c} = dt \cdot \sqrt{1 - w^2/c^2}$, TEŻ CZTEROSKALAR

DEF. CZTEROPRĘDKOŚĆ:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left(\frac{c\,dt}{d\tau}, \frac{d\bar{r}}{d\tau}\right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}, \frac{\vec{w}}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}\right)$$

TRANSFORMUJE SIĘ JAK CZTEROWEKTOR $u^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} L^{\mu}{}_{\nu} u'^{\nu}$ (LINIOWO)

$u^{\mu}$ MA STAŁĄ DŁUGOŚĆ: $u^{\mu} u_{\mu} = (u^0)^2 - (\vec{u})^2 = \frac{c^2}{1 - \frac{w^2}{c^2}} - \frac{w^2}{1 - \frac{w^2}{c^2}} = c^2 = \text{CONST}$

- CZAS WŁASNY $= dt$ W UKŁADZIE ODNIESIENIA, W KTÓRYM PUNKT MATERIALNY SPOCZYWA ($\bar{w} = 0$).

• DEF. CZTEROPRZYSPIESZENIE

$$b^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}, \quad \text{CZTEROWEKTOR}$$

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = \frac{du^\mu}{d\tau}\cdot u_\mu = b^0 u^0 - \bar{u}\,\bar{b} \quad \left(\text{CZYLI } (b^\mu) \perp (u^\mu)\right)$$

$$\Longrightarrow b^0 = \frac{\bar{u}\,\bar{b}}{u^0} = \frac{\frac{\bar{w}}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\cdot\bar{b}}{\frac{c}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}} = \frac{\bar{w}\cdot\bar{b}}{c}$$

CZTEROPRZYSPIESZENIE WYRAŻA SIĘ PRZEZ PRZYSPIESZENIE $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$:

$$(b^\mu) = \left(\frac{\bar{w}\cdot\bar{a}/c}{\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)^2}, \frac{\bar{a}\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right) + \frac{\bar{w}}{c^2}(\bar{w}\cdot\bar{a})}{\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)^2}\right)$$

• DEF. CZTEROPĘD (OBIEKTU PORUSZAJĄCEGO SIĘ Z PRĘDKOŚCIĄ $\bar{v}$) I ENERGIA

$$p^\mu = m \cdot u^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$p^\mu$ – CZTEROWEKTOR; $m$ – CZTERO-SKALAR; $u^\mu$ – CZTEROPRĘDKOŚĆ (CZTEROWEKTOR)

ZEROWA SKŁADOWA ZWIĄZANA Z CAŁKOWITĄ ENERGIĄ RELATYWISTYCZNĄ:

$$\boxed{E = c\cdot p^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \approx \underbrace{mc^2}_{\text{ENERGIA SPOCZYNKOWA}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2 + \ldots\right)}_{\text{ENERGIA KINETYCZNA}}$$

ENERGIA KINETYCZNA $= E - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$

PODOBNIE DLA $v \ll c$ $\quad \vec{p} \simeq m\vec{v}$

CZTEROPĘD JEST TEŻ NAZYWANY WEKTOREM ENERGII-PĘDU.

KWADRAT CZTEROWEKTORA TO CZTEROSKALAR:

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \bar{p}^2 = \frac{m^2c^2}{1-v^2/c^2} - \frac{m^2v^2}{1-v^2/c^2} = m^2c^2 \quad ✓$$

CZYLI: $\boxed{\frac{E^2}{c^2} - \bar{p}^2 = m^2c^2} \Leftrightarrow \underbrace{E^2 = m^2c^4 + \bar{p}^2c^2, \quad E = \sqrt{m^2c^4 + \bar{p}^2c^2}}$

• DLA FOTONU, $m=0$: $E^2 = \bar{p}^2c^2 \Rightarrow |\bar{p}| = \frac{E}{c}$, JEŚLI MA ENERGIĘ TO MA PĘD! $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \bar{p}\right) = (|\bar{p}|, \bar{p}) \Rightarrow p^\mu p_\mu = 0$, $E = h\nu$

• ZEROWA SKŁADOWA $p^0$ ZWIĄZANA Z TZW. MASĄ RELATYWISTYCZNĄ $\frac{p^0}{c} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,
ALE TO NIE JEST CZTEROSKALAR, LEPIEJ TEGO POJĘCIA NIE UŻYWAĆ, TYLKO HISTORYCZNE

• ZASADA ZACHOWANIA CZTEROPĘDU (ENERGII-PĘDU): $\sum_i p_i^\mu = \text{CONST}$ DLA CIAŁ $i = 1, 2, \ldots$ (ZDERZENIA SPRĘŻYSTE)

ZDERZENIA NIESPRĘŻYSTE: ZACHOWANY PĘD

## • CZTEROSIŁA, II ZASADA DYNAMIKI

$\hookrightarrow K^\mu = (K^0, \vec{K})$

DEF. CZTEROSIŁA – RELATYWISTYCZNA MIARA ODDZIAŁYWANIA, ODPOWIADAJĄCA W MECHANICE RELATYWISTYCZNEJ SILE $\vec{F}$. Z DEFINICJI PROSTOPADŁA DO CZTEROPRĘDKOŚCI:

$$0 = K^\mu u_\mu = K^0 u^0 - \vec{K}\vec{u} \Rightarrow K^0 = \frac{\vec{K}\vec{u}}{u^0} = \frac{\vec{K}\cdot\vec{v} / \sqrt{1-v^2/c^2}}{c / \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\vec{K}\vec{v}}{c}$$

TZN. $K^\mu = \left( \frac{\vec{K}\vec{v}}{c}, \vec{K} \right)$

### II ZASADA DYNAMIKI

$$\boxed{\underset{\text{CZTEROPRZYSPIESZENIE}}{m b^\mu} \equiv m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu}$$

ZAPISANE JAKO RÓWNANIE NA CZTEROWEKTORY, ZGODNE Z PRZEKSZTAŁCENIAMI LORENTZA – PRZY ZMIANIE UKŁADU ODNIESIENIA DOSTAJEMY:

$$m \frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} = K'^\mu$$

CZYLI RZECZYWIŚCIE WE WSZYSTKICH INERCJALNYCH UKŁADACH ODNIESIENIA TO PRAWO MA TAKĄ SAMĄ POSTAĆ (ZGODNIE Z ZASADĄ WZGLĘDNOŚCI EINSTEINA)

• SKORO CZTEROPĘD $p^\mu = m u^\mu$; $b^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$, TO II ZASADA MOŻE BYĆ ZAPISANA:

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu}$$

• DLA SKŁADOWYCH PRZESTRZENNYCH:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{K} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \equiv \vec{F}$$

POSTAĆ ANALOGICZNA JAK W MECHANICE NIERELATYWISTYCZNEJ; ALE TERAZ $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

• SKŁADOWA ZEROWA: $\frac{dp^0}{d\tau} = K^0 = \frac{\vec{K}\vec{v}}{c} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \vec{K}\vec{v} \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = \vec{K}\vec{v}$

CZYLI ZMIANA ENERGII RELATYWISTYCZNEJ ZWIĄZANA Z DZIAŁANIEM SIŁ!

$\Rightarrow$ NIE MOŻNA UZYSKAĆ PRĘDKOŚCI $v=c$, GDYŻ WYMAGAŁOBY TO NIESKOŃCZONEJ PRACY

**UWAGA:** W MECHANICE RELATYWISTYCZNEJ NIE MA III ZASADY DYNAMIKI, NIE MOŻNA ZDEFINIOWAĆ BRYŁY SZTYWNEJ (ODDZIAŁYWANIA ROZCHODZĄ SIĘ $\infty$ SZYBKO)

## • ELEKTRODYNAMIKA

WSZYSTKIE WIELKOŚCI ROZPATRYWANE DOTYCHCZAS (ENERGIA, PĘD, PRĘDKOŚĆ, ETC.) SĄ SKŁADOWYMI CZTERO-TENSORÓW (-SKALARÓW, -WEKTORÓW). CO Z POLAMI ELEKTRYCZNYM / MAGNETYCZNYM? I POTENCJAŁAMI?

DEF. CZTEROPOTENCJAŁ ELEKTROMAGNETYCZNY $\quad (A^\mu) = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$

POTENCJAŁ SKALARNY $\qquad$ POTENCJAŁ WEKTOROWY

DEF. CZTEROTENSOR POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO: (2. RZĘDU)

$$F^{\mu\nu} \equiv (\text{CZTERO-ROTACJA CZTEROPOTENCJAŁU}) = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$$

(ANTYSYMETRYCZNY $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$)

$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x})$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ E_x/c & 0 & -B_z & -B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 6 \text{ SKŁADOWYCH}$$

NP. $F^{01} = -\frac{E_x}{c} = \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} = +\frac{\partial A^1}{c\,\partial t} + \frac{\partial \phi/c}{\partial x^1} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial A^1}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A^1}{\partial t} \\ E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A^2}{\partial t} \\ E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A^3}{\partial t} \end{cases} \quad / \quad \boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$$F^{12} = -B_z = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A^1}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^1} \Leftrightarrow B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}}$$

CZYLI POLE ELEKTRYCZNE I MAGNETYCZNE TO SKŁADOWE CZTERO-TENSORA (2. RZĘDU), NIE SĄ ODDZIELNYMI BYTAMI, ALE RÓŻNYMI FORMAMI JEDNEGO POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO. ICH POSTAĆ ZALEŻY OD UKŁADU ODNIESIENIA - PRZY ZMIANIE UKŁADU POLE ELEKTRYCZNE MOŻE ZAMIENIĆ SIĘ NA MAGNETYCZE, ETC.

• WZÓR LORENTZA – CZTEROSIŁA ODDZIAŁYWANIA ELEKTROMAGNETYCZNEGO NA CZĄSTKĘ O ŁADUNKU $q$ I CZTEROPRĘDKOŚCI $u^\mu$:

$$K^\mu = q\sum_{\nu=0}^{3} F^{\mu\nu} u_\nu \quad ; \quad (u_\nu) = (u^0, -\vec{u}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

CZYLI:

$$K^0 = \frac{q\vec{E}\cdot\vec{v}/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad , \quad \vec{K} = \frac{q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

TAKŻE $K^0 = \frac{\vec{v}}{c}\vec{K}$; $\vec{K} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$; CZYLI $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}$

RELATYWISTYCZNE RÓWNANIE RUCHU:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \rightarrow \cancel{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}{\cancel{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \quad (\text{SKŁADOWE } \vec{p})$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{q\vec{E}\vec{v}}{\cancel{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

OSTATECZNIE:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = q\vec{E}\cdot\vec{v} \end{cases} \quad , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

NIELINIOWE RÓWNANIA 2. RZĘDU NA $\vec{r}(t)$, TRUDNE!

DZIELĄC JE PRZEZ $\sqrt{1-v^2/c^2}$, MOŻEMY ZAPISAĆ JAKO LINIOWE RÓWNANIA NA $\vec{r}(\tau)$ I $t(\tau)$, JEŚLI ZAPISZEMY PRZY UŻYCIU CZASU WŁASNEGO

$$\boxed{\begin{cases} m\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = q\left(\vec{E}\frac{dt}{d\tau} + \frac{d\vec{r}}{d\tau}\times\vec{B}\right) \\ mc^2\frac{d^2t}{d\tau^2} = q\vec{E}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\tau} \end{cases}} \quad (*)$$

OCZYWIŚCIE ZGODNE Z ZAPISEM II ZASADY DYNAMIKI: $\boxed{m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = q\sum_\nu F^{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{d\tau}}$