FORMALIZM LAGRANŻOWSKI I HAMILTONOWSKI

DLA CZĄSTKI O MASIE m I ŁADUNKU q, W POLU ELEKTROMAGNETYCZNYM OPISANYM PRZEZ CZTEROPOTENCJAŁ $(A^\mu)=\left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$

LAGRANŻJAN:

$$L(\bar{r},\bar{v},t)=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-q\varphi(\bar{r},t)+q\bar{v}\bar{A}(\bar{r},t)$$

R-NA LAGRANGE'A II RODZAJU: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \bar{v}}=\frac{\partial L}{\partial \bar{r}} \Rightarrow$ R-NIE RUCHU:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=q\left(\bar{E}+\bar{v}\times\bar{B}\right)$$

PĘD UOGÓLNIONY: $\bar{p}=\frac{\partial L}{\partial \bar{v}}=\frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+q\bar{A}$

$$\Rightarrow \bar{v}=\frac{c(\bar{p}-q\bar{A})}{\sqrt{m^2c^2+(\bar{p}-q\bar{A})^2}}$$

HAMILTONIAN:

$$H(p,q)=\bar{p}\bar{v}-L=\left(\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\cancel{q\bar{v}\bar{A}}\right)+\left(mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+q\varphi-\cancel{q\bar{v}\bar{A}}\right)=$$

$$=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+q\varphi=\sqrt{c^2(\bar{p}-q\bar{A})^2+m^2c^4}+q\varphi$$

UWAGA: FORMALIZM HAMILTONOWSKI POZWALA NA OPIS DYNAMIKI CZĄSTKI O MASIE $m=0$ I PRĘDKOŚCI $v=c$; CZĄSTKI TAKIE MAJĄ OKREŚLONY CZTEROPĘD (p^μ).

NATOMIAST RÓWNANIA RUCHU Z II ZASADY DYNAMIKI, CZY TEŻ FORMALIZM LAGRANŻOWSKI, PROWADZĄ DO WYRAŻEŃ $\frac{0}{0}$ LUB ∞.

DZIAŁANIE: $S=\int_{t_0}^{t_1} L\,dt$; JEST TO CZTEROSKALAR! (NIE ZMIENIA SIĘ PRZY PRZEKSZTAŁCENIACH POINCARÉGO; NATOMIAST ZWYKŁY LAGRANŻJAN ~~DZIAŁANIE~~ PRZY PRZEKSZTAŁCENIACH GALILEUSZA ZMIENIAŁ SIĘ O POCHODNĄ ZUPEŁNĄ)

$$L(\bar{r},\bar{v},t)dt=-mc^2d\tau-q\left(A^0dx^0-\bar{A}d\bar{r}\right)=-mc^2d\tau-q\sum_\mu A^\mu dx_\mu$$

ZASADA WARIACYJNA HAMILTONA:

$$\delta S=0 \text{ PRZY } \delta\bar{r}(t_0)=0=\delta\bar{r}(t_1) \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \bar{v}}=\frac{\partial L}{\partial \bar{r}}$$

PRZYKŁAD 1 – RUCH CZĄSTKI O MASIE m, ŁADUNKU q, W STAŁYM POLU ELEKTRYCZNYM $\vec{E}$.

RÓWNANIA RUCHU (*) ZE STR. 62:

$$(**)\begin{cases} m\dfrac{d^2\bar{r}}{d\tau^2} = q\bar{E}\dfrac{dt}{d\tau} \\ mc^2\dfrac{d^2t}{d\tau^2} = q\bar{E}\dfrac{d\bar{r}}{d\tau} \end{cases}$$

CHWILA POCZĄTKOWA: $\left[\begin{array}{l} \tau=0, \quad t(\tau=0)=0, \quad \bar{r}(\tau=0)=\bar{r}_0 \\ \dfrac{dt}{d\tau}(\tau=0)=\dfrac{E_0}{mc^2}, \quad \dfrac{d\bar{r}}{d\tau}(\tau=0)=\dfrac{\bar{p}_0}{m}, \text{ DLA } E_0=\sqrt{\bar{p}_0^2c^2+m^2c^4} \end{array}\right.$

NIECH POCZĄTEK UKŁADU O W POŁOŻENIU $\bar{r}_0$, $\bar{E}=E\bar{e}_z$ ($\bar{E}$ WZDŁUŻ OSI z), OŚ Ox TAK BY PĘD $\bar{p}_0$ LEŻAŁ W PŁASZCZYŹNIE Oxz, TZN.

$$\bar{r}_0=(0,0,0), \quad \bar{E}=(0,0,\bar{E}), \quad \bar{p}_0=(p_{0x},0,p_{0z})$$

WTEDY R-NIA RUCHU (**) PRZYJMUJĄ POSTAĆ:

$$\begin{cases} (1)\ m\dfrac{d^2x}{d\tau^2}=0, \quad (2)\ m\dfrac{d^2y}{d\tau^2}=0, \quad (3)\ m\dfrac{d^2z}{d\tau^2}=qE\dfrac{dt}{d\tau} \\ (4)\ mc^2\dfrac{d^2t}{d\tau^2}=qE\dfrac{dz}{d\tau} \end{cases}$$

OGÓLNE ROZWIĄZANIE DWÓCH PIERWSZYCH R-NAŃ: $x=A_1\tau+B_1$, $y=A_2\tau+B_2$, PO UWZGLĘDNIENIU WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH PRZYJMUJE POSTAĆ:

$$x=\frac{p_{0x}}{m}\tau, \quad y=0 \quad \text{– RUCH PŁASKI W PŁASZCZYŹNIE } (\vec{E},\vec{p}_0)$$

PONADTO $|q|E\dfrac{dt}{d\tau}>0 \Rightarrow$ Z 3. RÓWNANIA $|p_z|=\left|m\dfrac{dz}{d\tau}\right|$ WZRASTA W CZASIE, MOŻEMY WIĘC COFNĄĆ SIĘ DO TAKIEJ CHWILI POCZĄTKOWEJ, GDY $p_{0z}=0$. CAŁKUJĄC JEDNOKROTNIE R-NIA 3. I 4. DOSTAJEMY:

$$\frac{dz}{d\tau}=\frac{qE}{m}t, \quad \frac{dt}{d\tau}=\frac{qE}{mc^2}z+\frac{E_0}{mc^2} \quad \text{GDZIE } E_0=\sqrt{m^2c^4+p_{0x}^2c^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{d^2z}{d\tau^2}=\frac{qE}{m}\frac{dt}{d\tau}=\frac{q^2E^2}{m^2c^2}z+\frac{qE}{m^2c^2}E_0}$$

ROZWIĄZUJĄC $\Rightarrow$ $z=-\dfrac{E_0}{qE}+A\cosh\left(\dfrac{qE\tau}{mc}\right)+B\sinh\left(\dfrac{qE\tau}{mc}\right)$

$$\Rightarrow ct = A\sinh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right)+B\cosh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right)$$

Z warunków początkowych dostajemy $A=\dfrac{E_0}{qE}$, $B=0$
$(z(\tau=0)=0,\ t(\tau=0)=0)$

CZYLI OSTATECZNIE:

$$\begin{cases} x = \frac{p_{0x}}{m}\tau, \quad y=0, \quad z = \frac{E_0}{qE}\left(\cosh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right)-1\right) \\ t = \frac{E_0}{qEc}\sinh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \tau = \frac{mc}{qE}\,\mathrm{arsinh}\left(\frac{qEct}{E_0}\right)$$

$$\left(\cosh\alpha = \sqrt{1+\sinh^2\alpha}\right)$$

CZYLI:

$$(***)\begin{cases} x = \frac{p_{0x}c}{qE}\,\mathrm{arsinh}\left(\frac{qEct}{E_0}\right) \\ y = 0 \\ z = \frac{E_0}{qE}\left(\sqrt{1+\frac{q^2E^2c^2t^2}{E_0^2}}-1\right) \end{cases}$$

TOR RUCHU: LINIA ŁAŃCUCHOWA

$$\boxed{z = \frac{E_0}{E}\left(\cosh\left(\frac{qE}{p_{0x}c}x\right)-1\right)}$$

- DLA MAŁYCH CZASÓW I MAŁEJ PRĘDKOŚCI POCZĄTKOWEJ, GDY $\frac{qEct}{E_0} \ll 1$, $E_0 \simeq mc^2$, DOSTAJEMY WZORY NIERELATYWISTYCZNE:

$$\begin{cases} x \simeq \frac{p_{0x}c}{qE}\cdot\frac{qEct}{E_0} = \frac{p_{0x}}{m}t \\ y=0 \\ z \simeq \frac{mc^2}{qE}\cdot\frac{1}{2}\frac{q^2E^2c^2t^2}{E_0^2} = \frac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$$

TOR PARABOLICZNY: $\boxed{z \simeq \frac{qE}{2m}\cdot\left(\frac{p_{0x}}{m}\right)^{-2}x^2 = \frac{qEm}{2p_{0x}^2}x^2}$

PRZYKŁAD 2 – PODRÓŻ W PRZESTRZENI KOSMICZNEJ. ZAŁÓŻMY PRZYSPIESZENIE STATKU W UKŁADZIE ZWIĄZANYM ZE STATKIEM STAŁE, $\vec{a}' = \vec{g} = 9{,}81 \frac{m}{s^2} = g\vec{e}_z$

ZATEM 4-PRZYSPIESZENIE W UKŁADZIE STATKU: (STR. 59)

$$(b'^\mu) = (0, \vec{g}) = (0; 0, 0, g) \quad ; \quad \vec{g} \parallel \vec{v}$$

CZYLI W UKŁADZIE ZWIĄZANYM Z ZIEMIĄ (TRANSF. LORENTZA – STR. 53, 55)

$$(b^\mu) = \sum L^\mu{}_\nu b'^\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ }} & 0 & 0 & \frac{v/c}{\sqrt{\ }} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{\ }} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\ }} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \left(\frac{vg/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; 0, 0, \frac{g}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

R-NIE RUCHU: $m \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = m b^\mu \Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \left(\frac{vg/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0, \frac{g}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$

$x^\mu = (ct, x, y, z) \Rightarrow$

$v = \frac{dz}{dt} ; \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dz}{d\tau}$

$$\underbrace{c \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{g}{c}, \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} = 0 = \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = g \cdot \frac{dt}{d\tau}}$$

WYGLĄDAJĄ JAK R-NIA (1)-(2)-(3)-(4) NA STR. 64

DLA $\frac{qE}{m} \to g$

W CHWILI POCZĄTKOWEJ TERAZ $p_{0x} = 0$, $E_0 = mc^2$ $\left(\frac{\text{BO}}{p = 0} \right)$

CZYLI ROZWIĄZANIE JAK (***) NA STR. 65:

$$\begin{cases} x = y = 0, \text{ ORAZ: } z = \frac{mc^2}{mg} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2}t^2} - 1 \right) = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{c^2}t^2} - 1 \right) \\ \qquad = \frac{c^2}{g} \left(\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1 \right) \\ \text{ORAZ } t = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right) \end{cases}$$

PO PODSTAWIENIU WARTOŚCI:

	NA STATKU: τ [LATA]	NA ZIEMI: t [LATA]	PRZEBYTA DROGA: z [LATA ŚWIETLNE]
	0	0	0
	1	1,2	0,56
	5	85	83
	10	$1{,}5 \cdot 10^4$	$1{,}5 \cdot 10^4$
	20	$4{,}5 \cdot 10^8$	$4{,}5 \cdot 10^8$
NAJBLIŻSZA GWIAZDA α-CENTAURI	2,3		4,36