I kolokwium z Mechaniki i STW
20 kwietnia 2020
Szkicowe rozwiązania zadań

Zadanie 1. Cząstka o masie m porusza się wzdłuż prostej OX pod działaniem siły $\vec{F}$ zależnej od położenia w następujący sposób:

$$\vec{F} = A \sin\left(\frac{2\pi x}{B}\right)\vec{e}_x,$$

gdzie A i B są dodatnimi stałymi.

1. Znaleźć potencjał siły $\vec{F}$ i naszkicować jego wykres.
2. Na podstawie znajomości potencjału przedyskutować ruch cząstki.
3. Znaleźć przybliżoną postać potencjału dla małych wychyleń z wybranego położenia równowagi trwałej (stabilnej). Podać częstość oraz okres małych drgań wokół tego położenia.

Rozwiązanie.

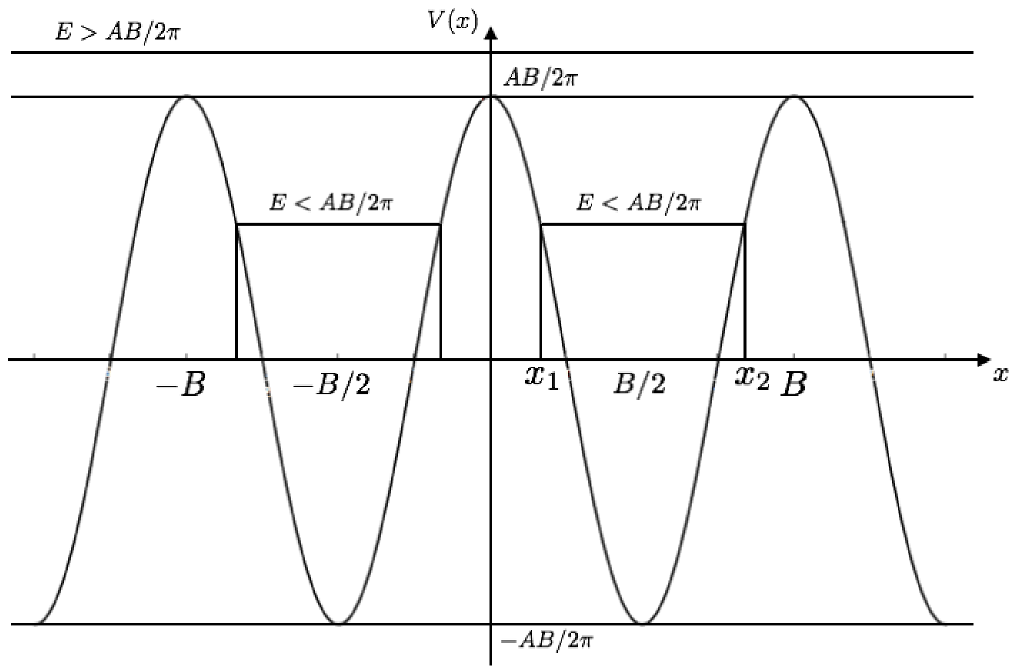
a) Rozpatrywana siła jest potencjalna zachowawcza, zatem jej potencjał wynosi:

$$V(x) = -\int A \sin\left(\frac{2\pi x}{B}\right) dx = \frac{AB}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{B}\right), \tag{1}$$

gdzie założyliśmy, że stała całkowania wynosi zero.

b) Omówmy teraz ruch cząstki:

- jeśli $E > AB/2\pi$ to ruch cząstki będzie nieograniczony, a maksymalną prędkość cząstka osiąga w punktach $x = B/2 + Bk$.
- jeśli $E \in (-AB/2\pi, AB/2\pi)$ to ruch cząstki jest ograniczony, a punkty zwrotne ($v = 0$) to rozwiązania równania $\frac{AB}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{B} = E$.
- przypadek $E < -AB/2\pi$ nie jest możliwy.
- punkty $x_n = Bk$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, są niestabilnymi punktami równowagi. Cząstka o energii $E = AB/2\pi$ spoczywa w tych punktach. Jednak małe zaburzenie spowoduje wytrącenie cząstki z jej położenia i zacznie się ona od niego oddalać.
- cząstka o energii $E = -AB/2\pi$ będzie spoczywać w jednym z punktów równowagi stabilnej, tj. $x_s = B/2 + Bk = B(1/2 + k)$. Małe zaburzenie spowoduje, że cząstka zacznie oscylować wokół danego punktu równowagi.



Rysunek 1: Wykres energii potencjalnej $V(x)$.

c) Rozważymy teraz małe drgania wokół punktu równowagi trwałej. Zamiast wybrać konkretny punkt równowagi, jak polecono w treści zadania, rozpatrzymy dowolny punkt równowagi trwałej określony wzorem:

$$x_s = B\left(\frac{1}{2} + k\right). \tag{2}$$

Wygodnie jest dokonać następującej zamiany zmiennych:

$$y = x - B\left(\frac{1}{2} + k\right), \tag{3}$$

wtedy potencjał będzie miał następującą postać:

$$V = \frac{AB}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{B}\left(y + B\left(\frac{1}{2} + k\right)\right)\right) = \frac{AB}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi y}{B} + 2\pi\left(\frac{1}{2} + k\right)\right). \tag{4}$$

Punkty równowagi trwałej odpowiadają $y = 0$, a zatem możemy rozwinąć funkcję cosinus dla punktu $y = 0$, korzystając z:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{x-a}{1!}f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) \tag{5}$$

gdzie w naszym przypadku $(a = y = 0)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= V(0) = \frac{AB}{2\pi}\cos\pi = -\frac{AB}{2\pi} \\ f^{(1)}(0) &= \ldots\sin\pi = 0 \\ f^{(2)}(0) &= -\frac{AB}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{B}\right)^2\cos\pi = \frac{AB}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{B}\right)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Stąd otrzymujemy:

$$V \approx \frac{AB}{2\pi}\left(-1 + \frac{2\pi^2}{B^2}y^2\right). \tag{7}$$

Następnie liczymy wartość siły:

$$F = -2\pi\frac{A}{B}y, \tag{8}$$

a równanie ruchu ma postać

$$\ddot{y} + 2\pi\frac{A}{mB}y = 0, \tag{9}$$

skąd wiemy, że:

$$\omega = \sqrt{2\pi\frac{A}{mB}}$$
$$T = \sqrt{2\pi\frac{mB}{A}}$$

Zamiana zmiennych nie była tutaj oczywiście konieczna. Powracając do:

$$V(x) = \frac{AB}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{B}\right), \tag{10}$$

uzyskujemy następujące przybliżenie:

$$V(x) \approx V(x_s) + \frac{(x-x_s)^2}{2}V^{(2)}(x_s) \tag{11}$$

gdzie $x_s = B(1/2+k)$, a zatem:

$$V(x) \approx -\frac{AB}{2\pi} + \frac{AB}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{B}\right)^2\frac{(x-x_s)^2}{2} = \frac{AB}{2\pi}\left(-1 + \frac{2\pi^2}{B^2}(x-x_s)^2\right). \tag{12}$$

Stąd otrzymujemy:

$$F = -2\pi\frac{A}{B}(x-x_s), \tag{13}$$

a zatem równanie ruchu ma postać:

$$\ddot{x} + 2\pi\frac{A}{B}x = 2\pi\frac{A}{B}. \tag{14}$$

Jego rozwiązanie możemy zapisać następująco:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{2\pi\frac{A}{mB}}\right) + 1 \tag{15}$$

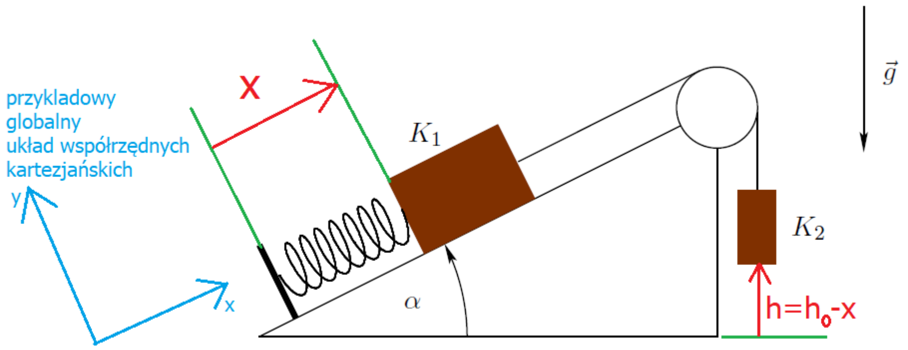
W związku z tym, że czynnik $+1$ w powyższym wzorze nie wpływa na częstość drgań oraz ich okres, wynik jest zgodny z tym uzyskanym poprzez zamianę zmiennych.

□

Zadanie 2. Na równi pochyłej o kącie nachylenia α znajduje się klocek K_1 o masie m_1, przyczepiony do sprężyny o stałej sprężystości k, której drugi koniec jest unieruchomiony. Klocek K_1 jest połączony nierozciągliwą nicią (przełożoną przez nieważki bloczek) ze zwisającym pionowo w dół klockiem K_2 o masie m_2. Nie ma tarcia pomiędzy klockiem K_1 a równią ani pomiędzy nicią a bloczkiem. Zakładamy ponadto, że nić pozostaje przez cały czas naprężona. Całość znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym opisanym przyspieszeniem $\vec{g}$:

1. Wprowadzić współrzędną uogólnioną opisującą układ i napisać równania Lagrange'a II rodzaju.

2. Wyznaczyć częstość drgań układu.



Rozwiązanie. Pierwszą kluczową sprawą jest zidentyfikowanie, ile stopni swobody występuje w układzie (ile współrzędnych uogólnionych jest potrzebne, aby w pełni opisać stan układu). Występują dwa klocki, z których każdy może poruszać się w jednym wymiarze. Ruchy te jednak nie są niezależne – stała długość nici sprawia, że położenie drugiego klocka jest jednoznacznie zdeterminowane przez położenie pierwszego. Widzimy, że do opisu układu wystarczy jedna współrzędna.

Wybierzmy jako tę współrzędną x (jak na obrazku). Wówczas położenie drugiego klocka (mierzone np. odległością od podłoża) dane jest jako $h_0 - x$ (gdzie h_0 to pewna stała). Istotne jest to, że kiedy pierwszy klocek idzie "do góry", drugi opada na dół (brzmi dość oczywiście, ale spora część z Państwa miała trudności z uwzględnieniem tego w rachunkach).

Ponieważ każdy klocek porusza się wzdłuż prostej, energię kinetyczną najłatwiej jest tu podać **bez** wprowadzania globalnego układu współrzędnych kareztańskich. Klocek pierwszy posiada niezerową składową prędkości wyłącznie wzdłuż powierzchni równi i wynosi ona $\dot{x}$, zatem $T_1 = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2}$; podobnie drugi posiada niezerową składową prędkości wyłącznie w pionie (i wynosi $\dot{(h_0 - x)} = -\dot{x}$), więc $T_2 = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2}$. Ostatecznie:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{(m_1 + m_2)\dot{x}^2}{2}. \tag{16}$$

Dygresja

Część z państwa zdecydowała się wprowadzić globalny układ współrzędnych kartezjańskich

– oczywiście nie jest to błąd, ale zwiększa on ilośc rachunków. Np. dla układu zaznaczonego na obrazku na niebiesko wyglądałoby to następująco:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \dot{x} \\ \dot{y}_1 &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_2 &= -\dot{x}\sin(\alpha) \\ \dot{y}_2 &= -\dot{x}\cos(\alpha) \end{cases} \tag{17}$$

(widzimy, że gdy x wzrasta, drugi klocek opada i wartości obydwu jego współrzędnych maleją). Widać, że po przeliczeniu wszystkiego do końca (i skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej) otrzymalibyśmy ten sam wynik.
Koniec dygresji

Dalej przejdźmy do energii potencjalnej. Na każdy z klocków działa siła grawitacji. Ponadto wstępuje naprężenie spreżyny. Mamy zatem:

$$V = xm_1 g\sin(\alpha) + (h_0 - x)m_2 g + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \tag{18}$$

gdzie x_0 to długość nierozciągniętej spreżyny. Pojawiające się w energii potencjalnej grawitacji drugiego klocka h_0 nie ma znaczenia (dodanie stałej do potencjału nie wpływa na ruch), ale istotny jest znak minus przed x (spora cześć z Państwa o nim zapominała). Kończymy zatem z Lagranżjanem postaci:

$$L = T - V = \frac{(m_1 + m_2)\dot{x}^2}{2} - xm_1 g\sin(\alpha) - (h_0 - x)m_2 g - \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \tag{19}$$

Wypisujemy równanie EL:

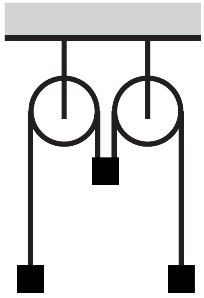
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{20}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = -kx + (-m_1\sin(\alpha) + m_2)g + kx_0 \tag{21}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m_1 + m_2}x + \underbrace{\frac{(-m_1\sin(\alpha) + m_2)g + kx_0}{m_1 + m_2}}_{\text{const.}}, \tag{22}$$

w czym rozpoznajemy równanie oscylatora o częstości $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ (jeśli ktoś nie rozpoznaje, to należy rozwiązać równanie używając standardowych metod).
Warto zwrócić uwagę, że częstość drgań byłaby taka sama, gdybyśmy na tej samej sprężynie zaczepili obiekt o masie $m_1 + m_2$. Nie zależy od kąta α, ani w ogóle od geometrii układu. Zainteresowanych zachęcam do zastanowienia się, dlaczego tak jest (jakie jest naprężenie nici? jaka w związku tym informacja "dociera" do sprężyny? ...). □

Zadanie 3. Rozważmy układ dwóch bloczków i trzech jednakowych ciężarków przedstawiony na poniższym rysunku. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym — siła ciężkości skierowana jest ku dołowi rysunku. Bloczki nie wykonują ruchu postępowego, mogą jednak obracać się wokół własnych ustawionych poziomo osi. Oba bloczki są identyczne, nieważkie i obracają się wokół własnej osi bez tarcia. Nici przerzucone przez bloczki są nierozciągliwe i nieważkie. Znaleźć przyspieszenie każdego z ciężarków oraz naprężenie każdej z nici.



Rozwiązanie. Przyjmijmy zwrot „do góry” jako dodatni. Niech m będzie masą każdego z ciężarków, N_L – naciągiem lewej nici, zaś N_P – naciągiem prawej nici. Ponumerujmy ciężarki kolejno od lewej i oznaczmy przyspieszenie i-tego ciężarka przez a_i, gdzie $i = 1, 2, 3$.

Na każdy z ciężarków działają dwie siły: skierowany do dołu ciężar o wartości identycznej dla każdego ciężarka, wynoszącej $Q = mg$, oraz skierowany do góry naciąg nici, równy N_L dla pierwszego (lewego) ciężarka, $N_L + N_P$ dla drugiego (środkowego) i N_P dla trzeciego (prawego). Zgodnie z II zasadą dynamiki równania ruchu mają zatem postać

$$\begin{aligned} N_L - mg &= ma_1, \\ N_L + N_P - mg &= ma_2, \\ N_P - mg &= ma_3. \end{aligned} \tag{23}$$

Przemieszczenia ciężarków są ze sobą powiązane: gdy na przykład pociągniemy środkowy ciężarek w taki sposób, że przemieści się on o 3 cm do dołu, oba ciężarki zewnętrzne przemieszczą się o 3 cm do góry. Oznaczając przemieszczenie i-tego ciężarka przez d_i, możemy zatem napisać dwa równania:

$$d_1 = -d_2 = d_3. \tag{24}$$

Różniczkując te związki dwukrotnie względem czasu, otrzymujemy dwie równości wiążące przyspieszenia ciężarków:

$$a_1 = -a_2 = a_3. \tag{25}$$

Zależności (23) i (25) tworzą układ pięciu równań na pięć niewiadomych: a_1, a_2, a_3, N_L i N_P. Rozwiązując go, otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1 = a_3 &= -\frac{1}{3}g, \\ a_2 &= \frac{1}{3}g, \\ N_L = N_P &= \frac{2}{3}mg. \end{aligned} \tag{26}$$

Rozumowanie powyższe można nieco uprościć, zauważając na samym początku, że $N_L = N_P$. Równość ta wynika z faktu, że na końcach obu nici zawieszono ciężarki o identycznych masach, obie nici są więc naprężane przez takie same siły. Nawet bez tego spostrzeżenia równania ruchu nie są jednak skomplikowane i dają się łatwo rozwiązać.

□