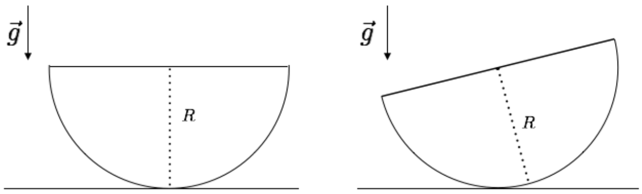
II kolokwium z Mechaniki i STW
18 maja 2020

Zeskanowane lub sfotografowane i **podpisane** imieniem i nazwiskiem rozwiązania należy załadować do godziny 13:00 za pośrednictwem strony

`https://kampus-student2.ckc.uw.edu.pl/course/view.php?id=1410` .

Każde rozwiązane zadanie należy załadować w oddzielnym formularzu (zgodnie z numerem zadania). Komentarze do obliczeń w rozwiązaniach zadań są istotne i mają wpływ na ocenę.

Zadanie 1. Leżący na płaszczyźnie jednorodny półwalec o promieniu R, długości l i masie m może wykonywać małe drgania wokół położenia równowagi (rys. 1). Znaleźć położenie środka masy półwalca. Wypisać równanie ruchu półwalca i znaleźć częstość małych drgań wokół położenia równowagi, zakładając brak polizgu pomiędzy walcem a płaszczyzną.



Rys. 1: Półwalec

Rozwiązanie. Zadanie rozwiązać można na różne sposoby, a w zaprezentowanym poniżej wykorzystujemy formalizm Lagrange'a. Układ nieprimowany U wybieramy tak, że płaszczyzna XOY będzie pokrywała się z płaszczyzną, na której ruch wykonuje półwalec. Natomiast oś OZ jest skierowana pionowo do góry. Z kolei układ primowany będzie układem związanym z półwalcem w taki sposób, że jego środek znajduje się w punkcie środka masy, a osie $O'X'$, $O'Y'$ i $O'Z'$ pozostają równoległe odpowiednio do OX, OY i OZ. Zaczniemy od znalezienia położenia środka masy półwalca (**3 pkt.**), a mówiąc ściślej, znajdziemy położenie $(\mathbf{x}_{SM}, \mathbf{y}_{SM}, \mathbf{z}_{SM})$ środka masy półwalca w układzie U w *położeniu równowagi.*

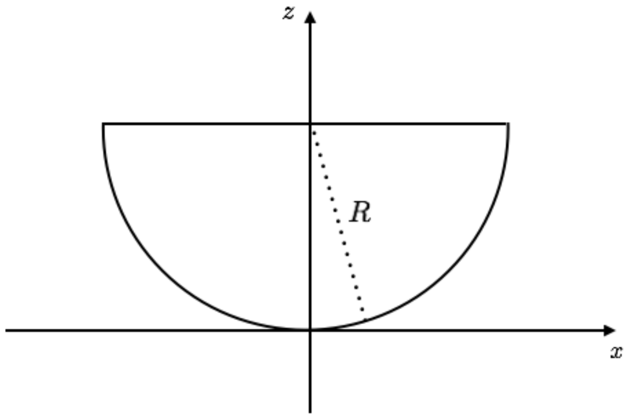
Z symetrii półwalca (rys. 2) wnioskujemy, że:

$$\mathbf{x}_{SM} = 0, \qquad \mathbf{y}_{SM} = l/2. \tag{1}$$

Ostatnią współrzędną liczymy standardowo:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{SM} &= \frac{1}{m}\int_B z dm = \frac{\rho}{m}\int_B z dV = \frac{\rho}{m}\int_0^l dy \int_0^R dz z \int_{-\sqrt{2Rz-z^2}}^{\sqrt{2Rz-z^2}} dx \\ &= \frac{\rho l}{m}\left(\frac{\pi R^3}{2} - \frac{2R^3}{3}\right) = R - \frac{4R}{3\pi}\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że gęstość półwalca wynosi $\rho = \frac{2m}{\pi R^2 l} = \text{const.}$

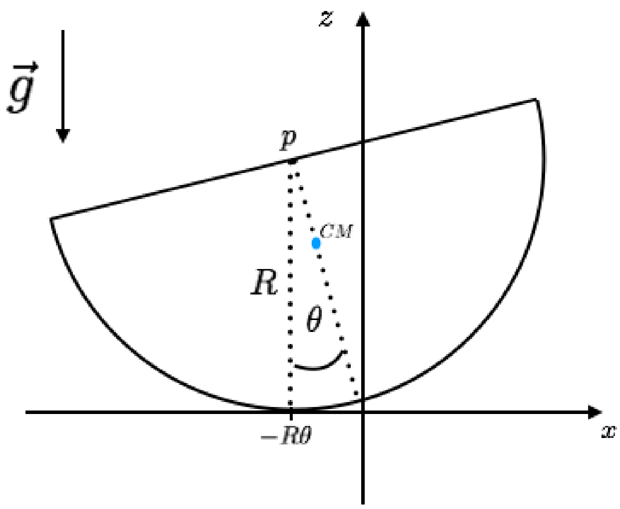


Rys. 2: Półwalec w położeniu równowagi

Ogólne wyrażenie na energię kinetyczną ma postać:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_0^2 + M\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}') + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{I}' \cdot \boldsymbol{\omega}). \tag{3}$$

W związku z tym, że za układ primowany U' wybraliśmy układ środka masy ($\mathbf{R}' = 0$), niezerowy wkład do energii kinetycznej może pochodzić tylko z pierwszego i ostatniego wyrazu po prawej stronie równości [3]. Zatem musimy znaleźć wyrażenia na $\mathbf{v}_0$, $\boldsymbol{\omega}$ oraz $\mathbf{I}'$. W tym celu wprowadzamy współrzędną uogólnioną θ (rys. 3).



Rys. 3: Wychylenie półwalca o kąt θ

W układzie inercjalnym U współrzędne (x_{SM}, y_{SM}, z_{SM}) środka masy półwalca wychylonego z położenia równowagi o kąt θ (patrz rys. (3)) mają postać:

$$x_{SM} = -R\theta + D\sin\theta, \qquad y_{SM} = \mathbf{y}_{SM} = \tfrac{1}{2}l, \qquad z_{SM} = R - D\cos\theta, \tag{4}$$

gdzie

$$D \equiv R - \mathbf{z}_{SM}.$$

Różniczkując po czasie znajdujemy składowe wektora prędkości $\mathbf{v}_0$:

$$\dot{x}_{SM} = -R\dot{\theta} + D\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \dot{y}_{SM} = 0, \qquad \dot{z}_{SM} = D\dot{\theta}\sin\theta. \tag{5}$$

Pozostaje nam teraz policzyć odpowiednie składowe tensora momentu bezwładności (**2 pkt**). Z uwagi na fakt, że jedyną niezerową składową prędkości kątowej jest $\omega_y = \dot{\theta}$ wystarczy znaleźć I'_{yy}. W tym celu posłużymy się twierdzeniem Steinera:

$$I'_{zz} = I_p - mD^2, \tag{6}$$

gdzie $I_p = \frac{1}{2}mR^2$ (tak jak dla pełnego walca). Mamy już wszystkie elementy potrzebne do policzenia energii kinetycznej i potencjalnej:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2_{CM} + \dot{z}^2_{CM}) + \frac{1}{2}\omega_y^2 I_{yy} \\
&= \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 - 2RD\dot{\theta}^2\cos\theta + D^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{2}R^2 - D^2\right) \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2}R^2 - 2RD\cos\theta\right), \qquad (7) \\
V &= mgz_{CM} = mg(R - D\cos\theta). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Stąd lagranżjan ma postać:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2}R^2 - 2RD\cos\theta\right) - mg(R - D\cos\theta). \tag{9}$$

Przystąpimy teraz do zapisania równania Eulera-Lagrange'a (**3 pkt.** - znalezienie równania ruchu):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\theta} &= mRD\dot{\theta}^2\sin\theta - mgD\sin\theta = mD\sin\theta(R\dot{\theta}^2 - g), \qquad (10) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= m\ddot{\theta}\left(\frac{3}{2}R^2 - 2RD\cos\theta\right) + 2mRD\dot{\theta}^2\sin\theta \qquad (11)
\end{aligned}$$

stąd dostajemy:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = m\ddot{\theta}\left(\frac{3}{2}R^2 - 2RD\cos\theta\right) + mD\sin\theta(R\dot{\theta}^2 + g) \tag{12}$$

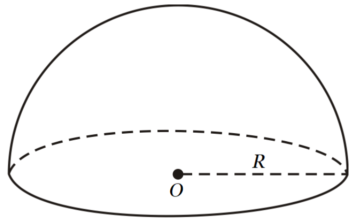
Aby znaleźć częstość małych drgań w powyższym równaniu pozostawimy tylko wyrazy (co najwyżej) liniowe w θ, $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$ (wcześniej rozwijając funkcje $\sin\theta$ i $\cos\theta$ w szereg):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}R^2 - 2RD\right)\ddot{\theta} + Dg\theta &= 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{g}{\frac{3R^2}{2D} - 2R}\theta &= 0, \qquad (13)
\end{aligned}$$

skąd odczytujemy częstość małych drgań wokół położenia równowagi (**2 pkt.**):

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{3R^2}{2D} - 2R}} = \sqrt{\frac{8g}{R\,(9\pi - 16)}}. \tag{14}$$

□



Rys. 4: Półkula

Zadanie 2. Rozważmy jednorodną półkulę o masie m i promieniu R, czyli bryłę powstałą w wyniku przecięcia jednorodnej kuli płaszczyzną przechodzącą przez jej środek (rys. 4). Znaleźć (i) położenie środka masy półkuli oraz (ii) tensor momentu bezwładności względem środka podstawy półkuli (czyli środka kuli, w wyniku przecięcia której powstała półkula; punkt O na rys. 4) w układzie osi głównych.

Wskazówka. Wygodnie jest wprowadzić współrzędne sferyczne (r, θ, φ), zdefiniowane równościami

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

Element objętości w tych współrzędnych to $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$.

Rozwiązanie. Umieśćmy półkulę w kartezjańskim układzie współrzędnych w taki sposób, by początek układu pokrywał się z punktem O, oś Oz była prostopadła do podstawy półkuli, zaś osie Ox i Oy leżały w płaszczyźnie jej podstawy. Wykonując obliczenia, skorzystamy ze wspomnianych we wskazówce do zadania współrzędnych sferycznych (r, θ, φ). Półkula jest w nich opisana nierównościami

$$\begin{aligned} &0 \le r \le R, \\ &0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \\ &0 \le \varphi \le 2\pi, \end{aligned} \tag{15}$$

całki po jej obszarze będą zatem miały postać

$$\int_{\text{półkula}} dV = \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin\theta. \tag{16}$$

Objętość półkuli jest oczywiście równa połowie objętości kuli; możemy ją również łatwo obliczyć bezpośrednio, całkując po obszarze półkuli stałą funkcję $f(x, y, z) = 1$:

$$V = \int_{\text{półkula}} dV = \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin\theta = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Półkula jest jednorodna, jej gęstość jest więc stała w całym jej obszarze i wynosi

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{2\pi R^3}. \tag{17}$$

Element masy półkuli ma postać $dm = \varrho \, dV$.

Położenie środka masy Niech $\mathbf{r}_{\mathrm{SM}} = (x_{\mathrm{SM}}, y_{\mathrm{SM}}, z_{\mathrm{SM}})$ będzie położeniem środka masy półkuli. Masa bryły rozłożona jest symetrycznie względem osi Oz, jej środek masy leży zatem na tej osi:

$$x_{\mathrm{SM}} = y_{\mathrm{SM}} = 0. \tag{18}$$

Współrzędną z_{SM} obliczymy bezpośrednio, posługując się wzorem z wykładu:

$$\begin{aligned}
z_{\mathrm{SM}} &= \frac{1}{m}\int_{\text{półkula}} z\,dm = \frac{\varrho}{m}\int_{\text{półkula}} z\,dV \\
&= \frac{\varrho}{m}\int_0^R dr\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\, r\cos\theta\, r^2\sin\theta = \frac{\varrho}{m}\int_0^R r^3\,dr\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{\varrho}{m}\frac{\pi R^4}{4} = \frac{1}{m}\frac{3}{2\pi R^3}\frac{\pi R^4}{4} = \frac{3}{8}R.
\end{aligned} \tag{19}$$

Abstrahując od układu współrzędnych, w którym wykonywaliśmy obliczenia, możemy powiedzieć, że środek masy jednorodnej półkuli o promieniu R leży na jej osi symetrii w odległości $3R/8$ od jej podstawy.

Tensor momentu bezwładności Składowe tensora momentu bezwładności obliczymy, korzystając z podanych na wykładzie wzorów.

Na początku wyznaczymy składowe diagonalne. Składowe I_{xx} i I_{yy} muszą być równe ze względu na symetrię obrotową półkuli względem osi Oz. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_{\text{półkula}} (y^2+z^2)\,dm = \varrho\int_{\text{półkula}} (y^2+z^2)\,dV \\
&= \varrho\int_0^R dr\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,(r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta)r^2\sin\theta \\
&= \varrho\int_0^R dr\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,(\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)r^4\sin^2\theta = \frac{2}{5}mR^2,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$I_{yy} = I_{xx} = \frac{2}{5}mR^2. \tag{21}$$

Pozostaje nam do wyznaczenia składowa I_{zz}:

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_{\text{półkula}} (x^2+y^2)\,dm = \varrho\int_{\text{półkula}} (x^2+y^2)\,dV \\
&= \varrho\int_0^R dr\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,(r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)r^2\sin\theta \\
&= \varrho\int_0^R dr\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\, r^4\sin^3\theta = \frac{2}{5}mR^2.
\end{aligned} \tag{22}$$

Pozadiagonalne składowe tensora momentu bezwładności półkuli znikają na mocy symetrii. Półkula ma symetrię obrotową względem osi Oz, jest więc w szczególności symetryczna względem płaszczyzn $x = 0$ oraz $y = 0$; z symetrii względem płaszczyzny $x = 0$ wynika, że $I_{xy} = I_{xz} = 0$, zaś z symetrii względem płaszczyzny $y = 0$ – że $I_{yx} = I_{yz} = 0$. Wszystkie składowe pozadiagonalne tensora momentu bezwładności półkuli są zatem równe zeru.

Macierz tensora momentu bezwładności w układzie, który wybraliśmy, ma więc postać

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}mR^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}mR^2\mathbf{1}_3, \tag{23}$$

gdzie $\mathbf{1}_3$ jest macierzą jednostkową 3×3. Macierz $\mathbb{I}$ jest diagonalna, wybrany przez nas układ współrzędnych okazał się zatem być układem osi głównych, zaś (23) jest szukaną macierzą tensora momentu bezwładności półkuli w układzie osi głównych.

$\square$

Zadanie 3. Wzdłuż linii prostej poruszają się trzy cząstki o masach m_1, m_2, m_3. Każda cząstka oddziałuje z dwiema pozostałymi potencjałem zależnym wyłącznie od ich wzajemnej odległości, tzn. całkowita energia potencjalna układu jest równa $V(x_1 - x_2) + V(x_2 - x_3) + V(x_3 - x_1)$. Podać lagranżjan i hamiltonian dla takiego układu, a także policzyć nawiasy Poissona $\{p_1 + p_2 + p_3, H\}$, $\{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3, H\}$ i skomentować wynik.

Rozwiązanie.

Lagranżjan i Hamiltonian (4 pkt.) Położenie każdej z trzech cząstek wyznaczone jest przed odpowiednią współrzędną x_i, stąd ich prędkości równe są $\dot{x}_i$, a zatem Lagranżjan przyjmuje postać:

$$L = T - V = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_3\dot{x}_3^2}{2} - V(x_1 - x_2) - V(x_2 - x_3) - V(x_3 - x_1). \quad (24)$$

Pędy uogólnione $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i\dot{x}_i$. Hamiltonian:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{x}_i - L = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(x_1 - x_2) + V(x_2 - x_3) + V(x_3 - x_1). \quad (25)$$

Przypominam, że Hamiltonian jest funkcją położeń i pędów uogólnionych $H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$, a nie położeń i prędkości, zatem kluczowe było wyrazić go w takiej właśnie postaci (m.in. dlatego, że tylko taka postać pozwala nam dalej liczyć nawiasy Poissona).

Nawiasy Poissona (3 pkt.) Nawiasy Poissona liczymy z definicji:

$$\{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3, H\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} m_i\frac{2p_i}{2m_i} = p_1 + p_2 + p_3 \quad (26)$$

$$\{p_1 + p_1 + p_3, H\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(p_1 + p_2 + p_3)}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial(p_1 + p_2 + p_3)}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial V(x_1 - x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial V(x_3 - x_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial V(x_1 - x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial V(x_2 - x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial V(x_2 - x_3)}{\partial x_3} - \frac{\partial V(x_3 - x_1)}{\partial x_3} \quad (27)$$

Uproszczenie wyrażenia (27) **i interpretacja wyniku (3 pkt.)** Ta część sprawiła Państwu najwięcej trudności, dlatego opiszę ją tutaj nieco szerzej (i, mam nadzieję, intuicyjnie). Zauważmy, że dla każdej pary współrzędnych w argumencie funkcji V pojawia się różniczkowanie po obydwu tych zmiennych, tzn. dla x_1, x_2 mamy zarówno $-\frac{\partial V(x_1-x_2)}{\partial x_1}$ jak i $-\frac{\partial V(x_1-x_2)}{\partial x_2}$. Ile będzie równa suma tych wyrażeń?

Zastanówmy się przez chwilę. Pochodna po x_1 mówi nam, jak szybko zwiększa się wartość danej funkcji wraz z przyrostem x_1. Zatem gdy zwiększamy x_1 o Δx, mamy:

$$V((x_1+\Delta x)-x_2) \approx V(x_1-x_2) + \frac{\partial V(x_1-x_2)}{\partial x_1}\Delta x. \tag{28}$$

Zauważmy jednak, że z punktu widzenia lewej strony powyższego równania nie ma znaczenia, czy zwiększyliśmy o Δx zmienną x_1, czy też zmniejszyliśmy zmienną x_2, gdyż $(x_1+\Delta x)-x_2 = x_1-(x_2-\Delta x)$, mamy zatem również:

$$V(x_1+(x_2-\Delta x)) \approx V(x_1-x_2) + \frac{\partial V(x_1-x_2)}{\partial x_2}(-\Delta x). \tag{29}$$

Z równości lewych stron obu równań wynika $\frac{\partial V(x_1-x_2)}{\partial x_2} = -\frac{\partial V(x_1-x_2)}{\partial x_1}$.

Chcąc wyprowadzić powyższą zależność w nieco bardziej formalny sposób (nie odwołując się do pojęcia "około" $\approx$), możemy użyć twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej.

$$V(x_1-x_2) = V(r(x_1,x_2)), \quad \text{gdzie} \quad r(x_1,x_2) = x_1-x_2 \tag{30}$$

Wówczas mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(r(x_1,x_2))}{\partial x_1} &= \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial (x_1-x_2)}{\partial x_1} = \frac{dV(r)}{dr} \\ \frac{\partial V(r(x_1,x_2))}{\partial x_2} &= \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial (x_1-x_2)}{\partial x_2} = -\frac{dV(r)}{dr}. \end{aligned} \tag{31}$$

W związku z tym, odpowiednio grupując wyrazy w (27) "wyzerujemy" je wszystkie i ostatecznie mamy:

$$\begin{aligned} &\{p_1+p_2+p_3, H\} = 0 \\ &\{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3, H\} = p_1+p_2+p_3, \end{aligned} \tag{32}$$

co możemy zinterpretować następująco: całkowity pęd układu $p_1+p_2+p_3$ jest zachowany (pozostaje stały podczas ruchu), a środek masy układu $\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$ porusza się ze stałą prędkością $\frac{p_1+p_2+p_3}{m_1+m_2+m_3}$ (drugi z tych wniosków nie był wymagany do uzyskania pełnej liczby punktów). □