

Zygmunt Ajduk

MECHANIKA KLASYCZNA

Wstęp

Mechanika jest działem fizyki zajmującym się badaniem ruchu i odkształceń ciał materialnych oraz ich oddziaływań. Mechanika klasyczna zajmuje się analizą tych problemów w świecie makroskopowym, w świecie mikroskopowym konieczne jest stosowanie ogólniejszej mechaniki kwantowej. Podobnie dla małych prędkości ruchu ciał (w stosunku do prędkości światła w próżni) możemy przejść od ogólniejszej mechaniki relatywistycznej do mechaniki nierelatywistycznej.

Ograniczymy się całkowicie do mechaniki klasycznej, przy czym większość czasu poświęcimy mechanice klasycznej nierelatywistycznej. W mechanice klasycznej nierelatywistycznej zależnie od sytuacji i właściwości ciała traktujemy ciało jako punkt materialny, bryłę sztywną lub odkształcalny ośrodek ciągły.

Mechanice kwantowej będzie poświęcony oddzielny wykład na III roku.

Gmach mechaniki reprezentuje poniższy schemat:

S - działanie v - prędkość	$0 \leq \frac{v}{c} \leq 1$ (dowolne)	$0 \leq \frac{v}{c} \ll 1$
$0 \leq \frac{ S }{\hbar} \leq \infty$ (dowolne)	Mechanika kwantowa	
	relatywistyczna	\Rightarrow nierelatywistyczna
	\Downarrow	\Downarrow
$\frac{ S }{\hbar} \gg 1$	Mechanika klasyczna	
	relatywistyczna	\Rightarrow nierelatywistyczna

Stała Plancka $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 10^{-34}$ J·s, prędkość światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Twórcy podstaw mechaniki i ważne daty:

I. Newton (1687) - mechanika klasyczna nierelatywistyczna

A. Einstein (1905) - mechanika klasyczna relatywistyczna

W. Heisenberg, E. Schrödinger, N. Bohr (1925 - 1926) - mechanika kwantowa nierelatywistyczna

P. Dirac, R. Feynman (1928 - 1949) - mechanika kwantowa relatywistyczna

Podręczniki

1. W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*
2. G. Białkowski, *Mechanika klasyczna*
3. J. R. Taylor, *Mechanika klasyczna*
4. L. Landau, E. Lifszyc, *Mechanika*
5. L. Landau, E. Lifszyc, *Teoria pola*
6. I. I. Olchowski, *Mechanika teoretyczna*
7. J. Ostrowska-Maciejewska, *Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych*
8. B. Średniawa, *Hydrodynamika i teoria sprężystości*
9. L. Landau, E. Lifszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych* lub *Hydrodynamika i Teoria sprężystości*

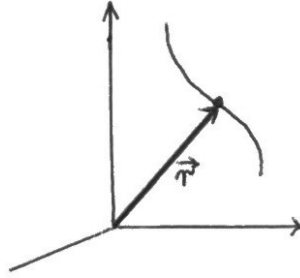
Zbiory zadań

1. G. L. Kotkin, W. G. Serbo, *Zbiór zadań z mechaniki klasycznej*
2. I. I. Olchowski, J. G. Pawlenko, L. S. Kuzmienkow, *Zadaczi po teoreticzeskoj mechanike dla fizikow*
3. A. A. Iliuszyn, W. A. Łomakin, A. P. Szmakow, *Mechanika ośrodków ciągłych w zadaniach i ćwiczeniach*
4. Zadania w podręcznikach 1, 3, 4, 5, 9.

1 Nierelatywistyczna mechanika układu punktów materialnych

1.1 Kinematyka punktu materialnego swobodnego (czyli bez więzów)

Ruch punktu materialnego jest względny, zależy od układu odniesienia wybranego do jego opisu. W wybranym układzie odniesienia (o określonym początku i osiach układu) określenie ruchu wymaga podania zależności wektora położenia punktu materialnego \vec{r} od czasu t , czyli podania $\vec{r} = \vec{r}(t)$.



Krzywą geometryczną, którą zakresła w czasie ruchu punkt materialny, nazywa się torem punktu materialnego.

Prędkość punktu materialnego: $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$.

Przyspieszenie punktu materialnego: $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

Droga przebyta w czasie $[t_0, t]$:

$$s(t) \equiv \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} ds = \int_{t_0}^t v dt, \quad \text{gdzie} \quad ds \equiv |d\vec{r}|, \quad v \equiv |\vec{v}| = \dot{s}.$$

W układzie kartezjańskim (czyli układzie prostokątnym prostoliniowym) z wersorami $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i współrzędnymi x_1, x_2, x_3 :

ruch: $\vec{r} = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + x_3(t)\vec{e}_3 = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$,

prędkość: $\vec{v} = \dot{x}_1(t)\vec{e}_1 + \dot{x}_2(t)\vec{e}_2 + \dot{x}_3(t)\vec{e}_3 = [\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)]$,

przyspieszenie: $\vec{a} = \ddot{x}_1(t)\vec{e}_1 + \ddot{x}_2(t)\vec{e}_2 + \ddot{x}_3(t)\vec{e}_3 = [\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t)]$.

W układzie kulistym (czyli przykładowym układzie prostokątnym krzywoliniowym) z wersorami $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ i współrzędnymi r, ϑ, φ

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi, & \vec{e}_r \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = [\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta], \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi, & \vec{e}_\vartheta \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = [\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta], \\ z = r \cos \vartheta, & \vec{e}_\varphi \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = [-\sin \varphi, \cos \varphi, 0], \end{cases}$$

mamy

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi, \\ \dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \cos \vartheta \vec{e}_\varphi, \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \vartheta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta \end{cases}$$

Ponieważ

$$\vec{r} = r(t)\vec{e}_r(t),$$

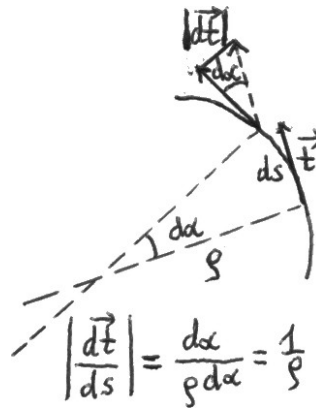
to

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + \\ & +(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2)\vec{e}_\vartheta + \\ & +(r \sin \vartheta \ddot{\varphi} + 2 \sin \vartheta \dot{r}\dot{\varphi} + 2r \cos \vartheta \dot{\vartheta}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

W płaszczyźnie Oxy (odpowiadającej $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ czy $z = 0$) w układzie biegunowym mamy więc

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r(t)\vec{e}_r(t), \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$



W układzie naturalnym (związanym z torem $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$ sparametryzowanym przez drogę $s(t)$) mamy:

wersor styczny $\vec{t} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}$,

wektor normalny $\vec{n} \equiv \frac{d\vec{t}}{ds} / |\frac{d\vec{t}}{ds}| = \rho \frac{d\vec{t}}{ds}$, gdyż promień krzywizny toru $\rho = 1 / |\frac{d\vec{t}}{ds}|$,

wektor binormalny $\vec{b} \equiv \vec{t} \times \vec{n}$

oraz

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}\vec{t}, \text{ czyli } \boxed{v_t = \dot{s} = v \geq 0, \quad v_n = 0, \quad v_b = 0,}$$

$$\vec{a} = \dot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}, \text{ czyli } \boxed{a_t = \ddot{s} = \dot{v}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \geq 0, \quad v_b = 0.}$$

W wypadku **dowolnego układu współrzędnych** (zwłaszcza ukośnokątnego) wprowadza się wektory bazy $\vec{Q}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ i wektory bazy wzajemnej $\vec{Q}^i = \text{grad } q_i$ i wtedy $\vec{Q}^i \vec{Q}_j = \delta_j^i$, gdzie

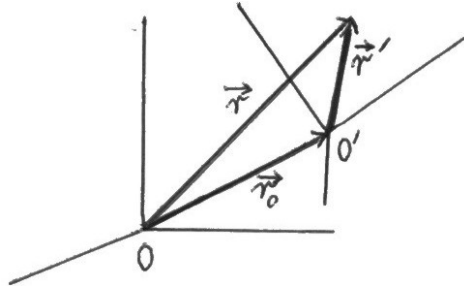
$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ jest deltą Kroneckera, $i, j = 1, 2, 3$. W sposób naturalny pojawiają się więc

kowariantne A_i i kontrawariantne A^i współrzędne dowolnych wektorów \vec{A} : $A_i = \vec{Q}_i \vec{A}$, $A^i = \vec{Q}^i \vec{A}$ i wtedy

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \vec{Q}^i = \sum_{i=1}^3 A^i \vec{Q}_i.$$

Współrzędnych kowariantnych będziemy używać w wykładzie mechaniki klasycznej później (zob. §1.6 i dalsze). (Współrzędne wektorów wprowadzone wyżej w układach prostokątnych z bazą w postaci wersorów \vec{e}_i noszą nazwę współrzędnych fizycznych).

Względność ruchu



Przy przejściu z nieprimowanego układu odniesienia U do primowanego układu odniesienia U'

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) = \vec{r}_0(t) + \sum_{k=1}^3 \vec{e}'_k(t) (\vec{e}'_k \vec{r}'(t))$$

i po zrzutowaniu na wersory układów współrzędnych kartezjańskich

$$\vec{e}_j \vec{r}(t) = \vec{e}_j \vec{r}_0(t) + \sum_{k=1}^3 (\vec{e}_j \vec{e}'_k(t)) (\vec{e}'_k \vec{r}'(t))$$

mamy

$$\boxed{x_j(t) = x_{0j}(t) + \sum_{k=1}^3 \alpha_{jk}(t) x'_k(t)}$$

Ruch $x_j(t)$ w układzie nieprimowanym U jest więc złożeniem ruchu $x'_k(t)$ w układzie primowanym U' , ruchu postępowego $x_{0j}(t)$ początku układu primowanego U' i ruchu obrotowego $\alpha_{jk}(t) = \vec{e}_j \vec{e}'_k(t)$ osi układu U' względem U . Zmiany ruchu przy zmianie układu odniesienia określone są więc przez 6 funkcji czasu: 3 funkcje $x_{0j}(t)$ i 3 niezależne funkcje (np. trzy kąty Eulera $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$) pozwalające scharakteryzować dowolną macierz obrotu $\alpha_{jk}(t)$ (omówimy to dokładnie w rozdziale 2).

Zanim przejdziemy do względności prędkości i przyspieszenia, obliczmy w układzie U pochodną względem czasu jakiegoś wektora $\vec{b}(t)$, który rozpisany w układzie primowanym U' ma postać $\vec{b}(t) = b'_1(t) \vec{e}'_1 + b'_2(t) \vec{e}'_2 + b'_3(t) \vec{e}'_3$:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{db'_1}{dt} \vec{e}'_1 + \frac{db'_2}{dt} \vec{e}'_2 + \frac{db'_3}{dt} \vec{e}'_3 + b'_1 \frac{d\vec{e}'_1}{dt} + b'_2 \frac{d\vec{e}'_2}{dt} + b'_3 \frac{d\vec{e}'_3}{dt} = \frac{d'\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{b},$$

gdzie $\frac{d'\vec{b}}{dt}$ - pochodna czasowa wektora \vec{b} w układzie U' , a $\vec{\omega} = \vec{e}'_1 \left(\frac{d\vec{e}'_2}{dt} \vec{e}'_3 \right) + \vec{e}'_2 \left(\frac{d\vec{e}'_3}{dt} \vec{e}'_1 \right) + \vec{e}'_3 \left(\frac{d\vec{e}'_1}{dt} \vec{e}'_2 \right)$ (warto to sprawdzić - istotne jest skorzystanie ze wzoru

$$\frac{d\vec{e}'_j}{dt} \vec{e}'_k + \vec{e}'_j \frac{d\vec{e}'_k}{dt} = 0,$$

wynikającego z ortonormalności bazy układu primowanego: $\vec{e}'_j \vec{e}'_k = \delta_{jk}$). Wektor $\vec{\omega}$ charakteryzuje obrót osi układu U' względem U i nazywa się prędkością kątową obrotu osi układu U' względem U .

Rozważmy obecnie względność prędkości:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}',$$

czyli prędkość punktu materialnego \vec{v} względem U jest równa sumie prędkości punktu materialnego $\vec{v}' \equiv \frac{d'\vec{r}'}{dt}$ względem U' , prędkości ruchu postępowego $\vec{v}_0 \equiv \frac{d\vec{r}_0}{dt}$ początku układu U' i prędkości $\omega \times \vec{r}'$ odpowiadającej ruchowi obrotowemu osi układu U' względem U . Prostą przechodzącą przez O' i równoległą do prędkości kątovej $\vec{\omega}$ nazywamy osią obrotu - prędkość ruchu obrotowego dla punktów materialnych znajdujących się na osi obrotu jest równa zero.

Przejdźmy teraz do przyspieszenia:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}',$$

czyli

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\gamma} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}'.$$

Przyspieszenie punktu materialnego \vec{a} względem U jest równa sumie przyspieszenia punktu materialnego $\vec{a}' \equiv \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ względem U' , przyspieszenia $\vec{a}_0 = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}$ w ruchu postępowym początku układu U' , przyspieszenia $\vec{\gamma} \times \vec{r}'$ związanego z przyspieszeniem kątowym $\vec{\gamma} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$ ruchu obrotowego osi układu U' , przyspieszenia Coriolisa $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ i przyspieszenia dośrodkowego $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$, gdzie \vec{r}'_{\perp} - składowa wektora \vec{r}' prostopadła do prędkości kątovej $\vec{\omega}$ (przyspieszenie dośrodkowe jest skierowane do osi obrotu).

Wynika stąd bezpośredni wniosek: jeśli $\vec{a}_0 = \vec{0}$ i $\vec{\omega} = \vec{0}$, to $\vec{a} = \vec{a}'$.

1.2 Zasady dynamiki swobodnego punktu materialnego

Pierwsza zasada dynamiki (zasada bezwładności Galileusza (1638))

Istnieją inercjalne układy odniesienia.

Druga zasada dynamiki (równanie ruchu Newtona (1686))

W układzie inercjalnym iloczyn masy m punktu materialnego przez jego przyspieszenie \vec{a} jest równy wypadkowej sile \vec{F} oddziaływania ciał na punkt materialny: $m\vec{a} = \vec{F}$.

Wykorzystane pojęcia

Siła - wektorowa miara oddziaływania i z doświadczenia $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, przy czym $|\vec{F}| \rightarrow 0$ przy oddalaniu punktu materialnego od innych ciał do nieskończoności.

Masa - skalarna dodatnia miara bezwładności punktu materialnego (ciała).

Odosobniony punkt materialny - punkt materialny w dużych (nieskończonych) odległościach od innych ciał, czyli punkt dla którego $\vec{F} = \vec{0}$.

Inercjalny układ odniesienia - układ odniesienia, względem którego odosobniony punkt materialny spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym (czyli układ, względem którego punkt odosobniony ma $\vec{a} = \vec{0}$).

Wnioski

a. Jeśli układ U jest układem inercjalnym, to inercjalnym jest również układ U' , którego początek porusza się względem U ze stałą prędkością ($\vec{a}_0(t) = \vec{0}$) a jego osie nie zmieniają w czasie swego ustawienia, czyli dla tego układu:

$$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0), \quad \vec{\omega}(t) = \vec{0},$$

gdzie \vec{r}_0 i \vec{v}_0 są stałymi wektorami.

Związek między współrzędnymi kartezjańskimi punktów materialnych i czasami w różnych układach inercjalnych określa **przekształcenie (transformacja) Galileusza** ($j = 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} x_j = x_{0j} + v_{0j}t' + \sum_{k=1}^3 \alpha_{jk}x'_k, \\ t = t_0 + t'. \end{cases}$$

Przekształcenia Galileusza tworzą 10-parametrową grupę przekształceń ciągłych (grupę Liego) i są złożeniem przesunięć (translacji) w przestrzeni i czasie (4 parametry x_{0j} i t_0), obrotów (rotacji) w przestrzeni (3 parametry (np. kąty Eulera) parametryzujące macierz obrotu α_{jk}) i szczególnych transformacji Galileusza (pchnięć) (3 parametry v_{0j}).

b. **Zasada względności Galileusza:** prawa mechaniki mają tę samą postać we wszystkich układach inercjalnych, czyli mają postać niezmienniczą względem przekształceń Galileusza: $m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m'\vec{a}' = \vec{F}'$.

Przy przekształceniu Galileusza bowiem: $\vec{a} = \vec{a}'$, $m = m'$, $\vec{F} = \vec{F}'$.

c. **Zasada przyczynowości:** znajomość sił oddziaływania \vec{F} i stanu początkowego ruchu punktu materialnego (dla $t = t_0$: $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_0$) pozwala jednoznacznie wyznaczyć ruch punktu materialnego w chwilach późniejszych. Zasada ta wynika z twierdzenia Cauchy'ego-Lipschitza o jednoznaczności rozwiązań równania różniczkowego.

d. **W układzie nieinercjalnym U' :**

$$m\vec{a}' = \vec{F}' - m\vec{a}_0 - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'),$$

czyli w równaniu ruchu Newtona oprócz sił oddziaływania \vec{F} musimy uwzględnić **siły bezwładności** związane z przyspieszeniem w ruchu postępowym układu ($-m\vec{a}_0$) i przyspieszeniem kątowym w ruchu obrotowym układu ($-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$), siłą Coriolisa ($-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$) i siłą odśrodkową ($-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$). Zgodnie z a. siły bezwładności w układach inercjalnych są równe zero.

Analiza ruchu w układzie nieinercjalnym jest więc zawsze trudniejsza i przeprowadza się ją tylko wtedy, jeśli układ nieinercjalny jest z jakichś powodów bardziej naturalny (np. jest to układ związany z obracającą się Ziemią).

1.3 Zasady zachowania w dynamice swobodnego punktu materialnego

Równanie ruchu punktu materialnego $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ jest po rozpisaniu na współrzędne układem 3 równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Znalezienie ruchu wymaga rozwiązania tych równań z uwzględnieniem warunków początkowych. Duże znaczenie mają sytuacje, gdy przez zastosowanie odpowiednich czynników całkujących daje się uzyskać z równań ruchu lub ich kombinacji pewne równania różniczkowe zupełne $\frac{d}{dt}C(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$ czy nawet $\frac{d}{dt}C(\vec{r}, t) = 0$. Otrzymujemy wtedy zasady zachowania dla pierwszych całek ruchu $C(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = C(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0)$ lub drugich całek ruchu $C(\vec{r}, t) = C(\vec{r}_0, t_0)$. Całki ruchu pozwalają obniżyć rząd układu równań ruchu. Przejście od równania różniczkowego drugiego rzędu do równania pierwszego rzędu pozwala wykorzystać w wielu wypadkach metodę rozdzielania zmiennych przy szukaniu rozwiązań analitycznych.

Zasada zachowania pędu

Pęd: $\vec{p} \equiv m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$.

Z równania ruchu $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.

Jeśli \vec{n} jest stałym wektorem, to $\frac{dp_n}{dt} = F_n$.

Zasada zachowania pędu:

Jeśli $\vec{F} = \vec{0}$, to $\vec{p} = \text{const} = \vec{p}_0$ (trzy pierwsze całki ruchu) i kolejne całkowanie daje trzy drugie całki ruchu $\vec{r} - \frac{\vec{p}_0}{m}t = \vec{r}_0 - \frac{\vec{p}_0}{m}t_0$.

Jeśli $F_n = 0$, to $p_n = \text{const} = p_{0n}$ (pierwsza całka ruchu) i kolejne całkowanie daje drugą całkę ruchu $x_n - \frac{p_{0n}}{m}t = x_{0n} - \frac{p_{0n}}{m}t_0$.

Przykłady:

W ruchu w polu siły o ustalonym kierunku (np. w jednorodnym polu siły) mamy zachowanie składowych pędu \vec{p}_\perp prostopadłych do kierunku siły.

Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu względem ustalonego punktu \vec{r}_0 : $\vec{L} \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{r}}$.

Z równań ruchu $\frac{d\vec{L}}{dt} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \ddot{\vec{r}} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} = \vec{M}$, gdzie $\vec{M} \equiv (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$ nazywamy momentem siły względem \vec{r}_0 .

Jeśli \vec{n} jest stałym wektorem, to $\frac{dL_n}{dt} = M_n$.

Zasada zachowania momentu pędu:

Jeśli $\vec{M} = \vec{0}$, to $\vec{L} = \text{const} = \vec{L}_0$.

Jeśli $M_n = 0$, to $L_n = \text{const} = L_{0n}$.

Dla siły osiowej o osi w kierunku \vec{n} przechodzącej przez \vec{r}_0 , dla której w płaszczyźnie prostopadłej do \vec{n} spełniony jest warunek $\vec{F}_\perp \parallel (\vec{r} - \vec{r}_0)_\perp$, mamy $M_n = 0 \Rightarrow L_n = \text{const}$ (M_n i L_n są obliczone względem \vec{r}_0).

Dla siły centralnej z centrum w \vec{r}_0 , czyli jeśli $\vec{F} \parallel (\vec{r} - \vec{r}_0)$, mamy $\vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$ (\vec{M} i \vec{L} są obliczone względem \vec{r}_0).

Przykłady:

Siłami osiowymi są np. siła działająca na ładunek w polu elektrostatycznym nieskończonego walca naładowanego jednorodnie o osi w kierunku \vec{n} lub pole siły jednorodnej w kierunku \vec{n} .

Siłą centralną jest siła przyciągania grawitacyjnego jednorodnej kuli lub siła elektrostatyczna jednorodnie naładowanej kuli - centrum takiej siły znajduje się w środku kuli.

Ruch w polu siły centralnej zachodzi w płaszczyźnie przechodzącej przez centrum siły i prostopadłej do \vec{L} . Wprowadzając w płaszczyźnie ruchu układ biegunowy o początku w centrum siły (oś z jest więc w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny i $\vec{L} = L_z \vec{e}_z = \text{const}$), otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r, \\ mr^2\dot{\varphi} &= L_z, \\ z &= 0 \end{aligned}$$

(zapis $z = 0$ jest czytelniejszy niż bardziej naturalny dla układu kulistego zapis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$).

Układ równań szóstego rzędu po uwzględnieniu trzech całek ruchu \vec{L} redukuje się więc do układu równań trzeciego rzędu. Ponieważ $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2}$, to pierwsze z tych równań można sprowadzić do postaci (zwanej wzorem Bineta):

$$m\ddot{r} = F_r + \frac{L_z^2}{mr^3}.$$

Jeśli $F_r = F_r(r)$, to wzór Bineta odpowiada jednowymiarowemu ruchowi radialnemu w polu efektywnej siły $F_r + \frac{L_z^2}{mr^3}$. Po wyznaczeniu z tego równania $r = r(t)$ znalezienie ruchu obrotowego sprowadza się do obliczenia całki:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \frac{L_z}{mr^2(t)} dt.$$

Dla $L_z = 0$ torem ruchu jest odcinek prostej w kierunku radialnym ($\varphi = \text{const}$). Dla $L_z \neq 0$ tor $r = r(\varphi)$ możemy wyznaczyć bezpośrednio przez przekształcenie wzoru Bineta do nowej postaci.

Ponieważ $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{L_z}{m} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}$ i $\ddot{r} = -\frac{L_z^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r}$, to

$$-\frac{L_z^2}{m^2 r^2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = F_r.$$

Zasada zachowania energii

Energia kinetyczna punktu materialnego: $T \equiv \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Z równań ruchu: $\frac{dT}{dt} = m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$, czyli pochodna energii kinetycznej po czasie równa jest mocy siły $\vec{F}\vec{v}$. Stąd

$$T - T_0 = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r},$$

czyli zmiana energii kinetycznej równa jest pracy $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$ wykonanej przez siłę \vec{F} .

Jeśli $\vec{F} \perp \vec{v}$, to moc siły jest równa zero i energia kinetyczna jest całką ruchu - takie siły nazywa się siłami giroskopowymi. Jeśli $\vec{F} \parallel \vec{v}$ i wektory te są przeciwnie skierowane, to moc siły jest ujemna i energia kinetyczna maleje - takie siły nazywa się siłami dysypatywnymi.

Przykład: Siłami giroskopowymi są siła Lorentza w polu magnetycznym $q\vec{v} \times \vec{B}$ lub siła Coriolisa $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$. Siłą dysypatywną jest siła oporu $\vec{F} = -\alpha v^n \frac{\vec{v}}{v}$ ($\alpha, n > 0$) przy ruchu w ośrodku materialnym.

Spośród sił niezależnych od \vec{v} warto wyróżnić klasę sił potencjalnych, czyli dających się zapisać w postaci $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\text{grad} V(\vec{r}, t)$, gdzie funkcja $V(\vec{r}, t)$ nosi nazwę energii potencjalnej punktu materialnego.

Twierdzenie matematyczne dla obszaru jednospójnego (w tym dla trójwymiarowej przestrzeni):
 $(\vec{F}$ jest potencjalna) $\Leftrightarrow (\text{rot } \vec{F} = \vec{0})$.

Dla sił potencjalnych $\vec{F}_{pot}\vec{v} = -\text{grad} V\vec{v} = -\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$ i stąd dla energii mechanicznej $E \equiv T + V$ mamy:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_{niepot.niegir.}\vec{v} + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Jeśli $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, to siłę potencjalną nazywa się siłą zachowawczą, gdyż przy braku $\vec{F}_{niepot.niegir.}$ mamy wtedy prawo zachowania energii mechanicznej.

Przykłady:

Siła $\vec{F}(t)$ jest potencjalna i $V = -\vec{F}(t)\vec{r}$ (w szczególności $\vec{F}(t) = \text{const}$ jest zachowawcza).

Siła $\vec{F} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r}$ jest potencjalna i zachowawcza oraz $V = -\int F_r(r)dr$.

Siła odśrodkowa jest potencjalna i $V = -\frac{1}{2}m(\vec{\omega} \times \vec{r})^2$ (jest ona zachowawcza, jeśli $\vec{\omega} = \text{const}$).

Siła bezwładności $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ nie jest potencjalna, gdyż $\text{rot}(-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) = -2m\dot{\vec{\omega}}$.

Jeśli siła centralna jest zachowawcza ($\text{rot}(F_r\vec{e}_r) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} = 0 = \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \Leftrightarrow F_r = F_r(r)$), czyli $F_r = -\frac{dV(r)}{dr}$, to uwzględnienie zasady zachowania energii E sprowadza układ trzeciego rzędu (omówiony przy zasadzie zachowania momentu pędu) do układu drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L_z^2}{2mr^2} &= E, \\ mr^2\dot{\varphi} &= L_z, \\ z &= 0, \end{aligned}$$

który można sprowadzić do kwadratur (obliczenia całek):

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{ef}(r))}} \Rightarrow r = r(t),$$

$$\varphi = \frac{L_z}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)},$$

gdzie efektywna energia potencjalna dla ruchu radialnego wynosi $V_{ef}(r) = V(r) + \frac{L_z^2}{2mr^2}$.

Całka energii pozwala też przy $L_z \neq 0$ uzyskać (po wykorzystaniu znanego wzoru $\dot{r} = -\frac{L_z}{m} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}$) scałkowany jednokrotnie wzór Bineta dla toru $r = r(\varphi)$:

$$\frac{L_z^2}{2m} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 + V_{ef}(r) = E,$$

który wtedy sprowadza problem wyznaczenia toru do kwadratur:

$$\varphi = \pm \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2m}{L_z^2}(E - V_{ef}(r))}}.$$

Ruch radialny jest możliwy tylko w obszarze, gdzie $V_{ef}(r) \leq E$, i wiele informacji o przebiegu ruchu wynika z wykresu $V_{ef}(r)$. W następnym podrozdziale rozważymy przykład ruchu w potencjale keplerowskim (lub kulombowskim) $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ z $\alpha > 0$.

1.4 Dynamika układu punktów materialnych swobodnych (czyli bez więzów)

Rozważmy układ n punktów materialnych o masach m_i , położeniach \vec{r}_i , siłach wewnętrznych \vec{F}_{ij} oddziaływania j -tego punktu na i -ty i siłach zewnętrznych \vec{F}_{i0} oddziałujących na i -ty punkt ($i, j = 1, \dots, n$). Z doświadczenia wiemy, że siły wewnętrzne często spełniają **trzecią zasadę dynamiki**:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

(stąd automatycznie otrzymujemy $\vec{F}_{ii} = \vec{0}$ dla siły samooddziaływania), ale zasada ta nie jest tak uniwersalna jak pierwsza i druga zasada dynamiki (wrócimy do tego zagadnienia w mechanice relatywistycznej w rozdziale 4).

Równania ruchu Newtona w układzie inercyjnym są układem $3n$ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu na $3n$ niewiadomych $\vec{r}_i(t)$:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i0} + \sum_{j=1}^n {}' \vec{F}_{ij} \equiv \vec{F}_i$$

gdzie $'$ oznacza sumowanie po $j \neq i$.

W układzie nieinercyjnym do \vec{F}_{i0} trzeba włączyć siły bezwładności.

Środek masy układu n punktów materialnych:

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \text{ gdzie całkowita masa układu } M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Przy zmianie układu odniesienia z U do U' : $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'_i \Rightarrow \vec{R} = \vec{r}_0 + \vec{R}'$. W układzie S związanym z środkiem masy mamy $\vec{r}_0 = \vec{R}$, $\vec{R}^{(S)} = \vec{0}$.

Pęd układu punktów materialnych

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}}$$

i z równań ruchu oraz trzeciej zasady dynamiki mamy:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n {}' \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i0} \equiv \vec{F},$$

czyli

$$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F},}$$

gdzie \vec{F} jest wypadkową siłą zewnętrzną działającą na układ. Otrzymane równanie wskazuje, że opis ruchu jakiegoś ciała (układu punktów materialnych) jako ruchu punktu materialnego odpowiada ściśle opisowi ruchu środka masy tego ciała.

Jeśli wypadkowa siła zewnętrzna \vec{F} jest równa zero, to pęd układu zachowuje się $\vec{P} = \text{const} = \vec{P}_0$ i wtedy środek masy układu porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}_0}{M}(t - t_0).$$

Zachowanie pędu prowadzi więc do 6 całek ruchu: $\vec{P} = \vec{P}_0$, $\vec{R} - \frac{\vec{P}_0}{M}(t - t_0) = \vec{R}_0$.

Przy zmianie układu odniesienia: $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'_i$ otrzymujemy $\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_0 + \vec{P}'$. W układzie środka masy S mamy $\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{R}} \Rightarrow \vec{P}^{(S)} = \vec{0}$.

Moment pędu układu względem początku układu odniesienia

$$\boxed{\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i}$$

i stąd

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i + \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{i0} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n {}' \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{i0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n {}' (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}. \end{aligned}$$

Jeśli siły wewnętrzne są centralne, czyli $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, to znika moment sił wewnętrznych i

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{i0} \equiv \vec{M}.}$$

Jeśli moment sił zewnętrznych $\vec{M} = \vec{0}$, to moment pędu się zachowuje: $\vec{L} = \text{const}$ i mamy 3 całki ruchu.

Przy zmianie układu odniesienia:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}'_i) \times (\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}'_i) = M\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + M\vec{r}_0 \times \dot{\vec{R}}' + M\dot{\vec{R}}' \times \vec{r}_0 + \vec{L}'.$$

Jeśli nowy układ odniesienia jest układem środka masy S , czyli $\dot{\vec{R}}' = \vec{0}$, $\vec{r}_0 = \vec{R}$, to

$$\boxed{\vec{L} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{L}^{(S)} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}^{(S)}.}$$

Możemy stąd łatwo wykazać, że $\frac{d\vec{L}^{(S)}}{dt} = \vec{M}^{(S)}$, gdzie $\vec{M}^{(S)}$ jest momentem sił zewnętrznych względem środka masy.

Energia układu

Energia kinetyczna układu:

$$T \equiv \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

i stąd

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \dot{\vec{r}}_i.$$

Jeśli siły \vec{F}_i są potencjalne, to istnieje taka funkcja $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$, zwana energią potencjalną układu, że $\vec{F}_i = -\text{grad}_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$, i wtedy:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \text{grad}_i V \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Stąd dla sił potencjalnych otrzymujemy $\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$ i oznaczając przez $E \equiv T + V$ energię mechaniczną układu mamy:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Jeśli siły potencjalne są zachowawcze, czyli $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, to zachowuje się energia mechaniczna układu: $E = \text{const}$ i mamy jedną całkę ruchu E .

Przy zmianie układu odniesienia:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}_i')^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2 + M \dot{\vec{r}}_0 \dot{\vec{R}}' + T'.$$

Jeśli primowany układ odniesienia jest układem środka masy S , to otrzymujemy twierdzenie Königa:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T^{(S)}.$$

Dla układu n punktów materialnych (ciał), oddziałujących ze sobą siłami centralnymi zachowawczymi spełniającymi trzecią zasadę dynamiki, przy braku sił zewnętrznych mamy więc 10 całek ruchu (czyli 10 zasad zachowania) i możemy zredukować rząd układu równań ruchu z $6n$ do $(6n - 10)$. Dla zagadnienia dwóch ciał pozostaje nam układ rzędu $6 \cdot 2 - 10 = 2$.

Zagadnienie dwóch ciał oddziałujących siłami spełniającymi trzecią zasadę dynamiki. Równania ruchu stanowią układ równań rzędu 12 (6 równań drugiego rzędu):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_{12}. \end{cases}$$

Jeśli wprowadzimy zmienne \vec{R} i \vec{r} :

$$\begin{aligned} \vec{R} &\equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, & \text{czyli} & \quad \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \\ \vec{r} &\equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2, & & \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}, \end{aligned}$$

gdzie $M \equiv m_1 + m_2$, to równania te przyjmują postać:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{0},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}.$$

Pierwsze równanie prowadzi nas do zasady zachowania pędu $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$ i można je od razu dwukrotnie scałkować:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}_0}{M}(t - t_0).$$

Problem dwóch ciał redukuje się więc do problemu ruchu jednego ciała o masie μ :

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}, \text{ gdzie masa zredukowana } \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Możemy wykorzystać teraz analizę ruchu przeprowadzaną w podrozdziale 1.3. Jeśli siła \vec{F}_{12} jest centralna, czyli $\vec{F}_{12} = F_r \frac{\vec{r}}{r}$, to zachowuje się moment pędu względem $\vec{r} = \vec{0}$, równy (jak łatwo sprawdzić) momentowi pędu układu w układzie środka masy S . Wybierając płaszczyznę Oxy jako płaszczyznę ruchu, otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \mu(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r, \\ \mu r^2 \dot{\varphi} &= L_z^{(S)}, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli siła jest dodatkowo zachowawcza i $F_r = -\frac{dV(r)}{dr}$, to uzyskujemy równania:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef}(r) &= E^{(S)}, \\ \mu r^2 \dot{\varphi} &= L_z^{(S)}, \\ z &= 0, \end{aligned}$$

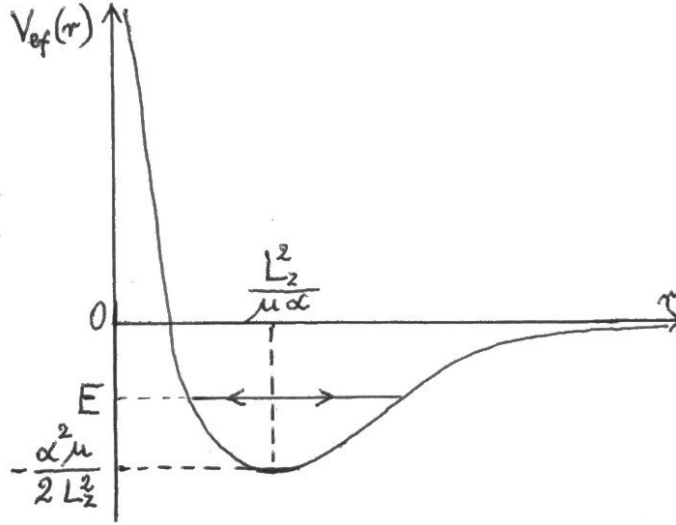
gdzie $E^{(S)} = T^{(S)} + V(r)$ jest zachowywaną energią układu w układzie środka masy, a

$V_{ef}(r) \equiv V(r) + \frac{(L_z^{(S)})^2}{2\mu r^2}$ - efektywną energią potencjalną w ruchu radialnym. Układ ten zawiera dwa równania pierwszego rzędu i można sprowadzić je do kwadratur. W szczególności wyznaczenie toru sprowadza się do obliczenia całki wynikającej ze scałkowanego wzoru Bineta:

$$\varphi = \pm \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2\mu}{(L_z^{(S)})^2}(E^{(S)} - V_{ef}(r))}}.$$

Przykład: Ruch dwóch ciał oddziałujących siłami o energii potencjalnej $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$, czyli ruch ciała w polu grawitacyjnym słońca (niekoniecznie w Układzie Słonecznym) ($\alpha = Gm_1 m_2$) lub ruch "klasycznego" elektronu w polu elektrostatycznym jądra ($\alpha = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$).

Rozważmy ruch z $L_z^{(S)} \neq 0$ i pomińmy dla uproszczenia zapisu wskaźnik (S) przy $E^{(S)}$ i $L_z^{(S)}$. Efektywna energia potencjalna $V_{ef}(r)$ ma minimum $V_{ef0} = -\frac{\mu\alpha^2}{2L_z^2}$ dla $r_0 = \frac{L_z^2}{\mu\alpha}$. Dla $E < V_{ef0}$ ruch nie jest możliwy. Dla $V_{ef0} \leq E < 0$ ruch jest ograniczony. Dla $E \geq 0$ ruch staje się nieograniczony. Przy dowolnej energii E , jeśli $L_z \neq 0$, punkt materialny nie spada na centrum ze względu na pojawienie się w V_{ef} energii odśrodkowej $\frac{L_z^2}{2\mu r^2}$.



Przejdźmy teraz do wyznaczenia toru ruchu. Całka wynikająca ze scałkowanego wzoru Bineta przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \pm \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L_z^2} + \frac{2\mu\alpha}{L_z^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}}.$$

Wykorzystując z tablic całek wzór $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C$ (dla $a < 0$ i $b^2 - 4ac > 0$), otrzymujemy po uproszczeniu ($C = \delta$):

$$\varphi - \delta = \pm \arccos \frac{1 - \frac{L_z^2}{\mu\alpha} \frac{1}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{\mu\alpha^2}}},$$

skąd

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\varphi - \delta)}, \text{ gdzie } p \equiv \frac{L_z^2}{\mu\alpha}, \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{\mu\alpha^2}}.$$

Jest to równanie biegunowe krzywej stopnia drugiego (czyli elipsy, paraboli, hiperboli) z parametrem p i mimośrodem ϵ o ognisku w $\vec{r} = \vec{0}$. Elipsie odpowiada $0 \leq \epsilon < 1$, co oznacza $-\frac{\mu\alpha^2}{2L_z^2} \leq E < 0$, paraboli $\epsilon = 1$ ($E = 0$) i hiperboli $\epsilon > 1$ ($E > 0$). Półosie wielka i mała elipsy czy hiperboli wyrażają się wzorami

$$a = \frac{p}{|1 - \epsilon^2|} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{|1 - \epsilon^2|}} = \frac{|L_z|}{\sqrt{2\mu|E|}}.$$

Wynik ten stanowi uogólnienie pierwszego prawa Keplera dla ruchu planet. Warto też zauważyć, jak prosto parametry geometryczne toru a i b wyrażają się przez parametry mechaniczne układu $|E|$ oraz $|L_z|$ i na odwrót:

$$|E| = \frac{\alpha}{2a}, \quad |L_z| = \sqrt{2\mu|E|}b = \sqrt{\frac{\mu\alpha}{a}}b.$$

Zasada zachowania momentu pędu $L_z = \mu r^2 \dot{\varphi}$ umożliwia teraz wyznaczenie ruchu, czyli zależności czasowej $\varphi = \varphi(t)$:

$$t = \frac{\mu}{L_z} \int r^2(\varphi) d\varphi.$$

Sama zasada stanowi treść drugiego prawa Keplera, gdyż stała $\frac{|L_z|}{2\mu} = \frac{1}{2}r^2|\dot{\varphi}| = \frac{dS}{dt}$ jest prędkością połową ciała w jego ruchu wokół słońca. Pełna analiza czasowa ruchu jest przedstawiona w podręczniku Królikowskiego i Rubinowicza (wygodnie jest wtedy przejść od zmiennej φ (zwanej w astronomii anomalią prawdziwą) do zmiennej u (anomali mimośrodowej)). Tutaj wyprowadzimy tylko ściśłą postać trzeciego prawa Keplera, czyli udowodnimy

proporcjonalność kwadratu okresu obiegu planety do sześcienu wielkiej półosi jej orbity eliptycznej. W ciągu okresu T planeta obiega elipsę i stąd

$$\frac{|L_z|}{2\mu}T = \pi ab.$$

Po podniesieniu do kwadratu i wyrażeniu $|L_z|$ przez a i b otrzymujemy końcowy wynik

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha}a^3.$$

W problemie keplerowskim współczynnik $\frac{\mu}{\alpha} = \frac{1}{G(m_1+m_2)}$ dla układu słonecznego z dominującą masą słońca ($m_2 \gg m_1$) jest w dobrym przybliżeniu taki sam dla wszystkich planet układu słonecznego.

Ruch punktu materialnego o zmiennej masie (np. rakiety)

Jeśli masa $M(t)$ punktu materialnego w czasie dt zmienia się o dM , to zmiana pędu \vec{P} punktu materialnego wynosi:

$$d\vec{P} = \vec{F}dt + dM(\dot{\vec{R}} + \vec{W}),$$

gdzie \vec{R} określa położenie punktu materialnego (jego środka masy), a \vec{W} jest prędkością masy dM w układzie spoczynkowym punktu materialnego (jego układzie środka masy). Stąd $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} + \dot{M}(\dot{\vec{R}} + \vec{W})$. Ponieważ $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$, to $\dot{M}\dot{\vec{R}} + M\ddot{\vec{R}} = \vec{F} + \dot{M}(\dot{\vec{R}} + \vec{W})$ i ostatecznie równania ruchu mają postać:

$$\begin{cases} M\ddot{\vec{R}} = \vec{F} + \dot{M}\vec{W}, \\ M = M(t), \end{cases}$$

gdzie oprócz siły zewnętrznej \vec{F} pojawia się siła odrzutu $\dot{M}\vec{W}$.

Przykład: Rozważmy w jednorodnym polu grawitacyjnym Ziemi o przyspieszeniu $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ ruch rakiety z $M = M_0 - \rho t$ i $\vec{W} = -w\vec{e}_z$ ($\rho, w = \text{const}$), która w $t = 0$ startuje z $\vec{r} = (0, 0, 0)$ na powierzchni Ziemi.

Równania ruchu mają postać:

$$M\ddot{x} = 0,$$

$$M\ddot{y} = 0,$$

$$M\ddot{z} = -Mg + \rho w,$$

$$M = M_0 - \rho t.$$

Stąd $x = 0$, $y = 0$ i warunkiem startu ($\dot{z} > 0$) jest $w > \frac{Mg}{\rho}$. Równanie ruchu w kierunku pionowym przyjmuje postać

$$\ddot{z} = -g + \frac{\rho w}{M_0 - \rho t}$$

i można je dwukrotnie scałkować:

$$\dot{z} = -gt - w \ln\left(1 - \frac{\rho}{M_0}t\right) = -gt - w \ln\frac{M(t)}{M_0},$$

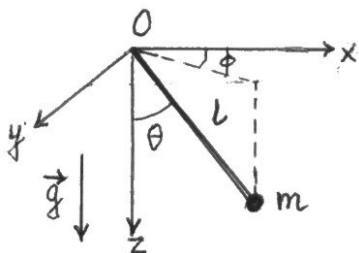
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{M_0 w}{\rho} \left\{ \left[1 - \frac{\rho}{M_0}t\right] \cdot \left[\ln\left(1 - \frac{\rho}{M_0}t\right) - 1\right] + 1 \right\}.$$

1.5 Więzy doskonałe, równania Lagrange'a I rodzaju

Przejdziemy teraz o układów nieswobodnych, czyli układów, w których na położenia i prędkości nałożone są pewne ograniczenia, zwane więzami.

Przykłady:

a. Sferyczne wahadło matematyczne: punkt materialny znajduje się na końcu nieważkiego pręta o długości l , którego drugi koniec jest zawieszony w początku układu odniesienia. W czasie ruchu położenie \vec{r} punktu materialnego musi spełniać równanie więzów $r^2 - l^2 = 0$, czyli punkt materialny musi zawsze znajdować się na powierzchni kuli o promieniu l . Z tego ograniczenia na położenia wynikają również ograniczenia na prędkości: $\vec{r}\vec{r} = 0$ i na przyspieszenia $\vec{r}\vec{r} + \dot{r}^2 = 0$. Więzy wymuszają więc pojawienie się pewnych sił reakcji, które zapewniają spełnienie tego warunku.

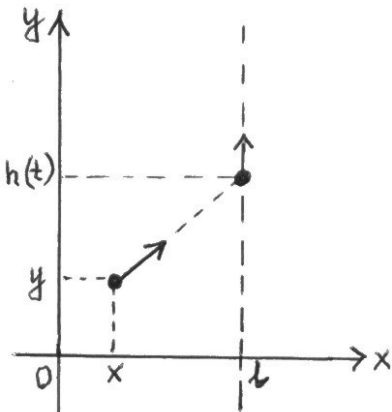


b. Więzy jak w a., ale zamiast pręta jest nić o długości l . Równanie więzów ma wtedy postać $l^2 - r^2 \geq 0$, czyli punkt materialny musi pozostawać wewnątrz kuli o promieniu l . Gdy występuje nierówność, ruch jest swobodny, a gdy równość - więzy mogą zadziałać (napiąć się), działając tylko w jedną stronę (nie odpychają punktu). Gdy $l^2 - r^2 = 0$, to na prędkość otrzymujemy warunek $-2r\dot{r} \geq 0$ i jeśli wtedy $\dot{r} = 0$, to pojawia się ograniczenie na przyspieszenie: $-r\ddot{r} - \dot{r}^2 \geq 0$.

c. Zagadnienie pogoni: pies goni zająca, który biegnie wzdłuż prostej $x = l$ i w chwili t znajduje się w $y = h(t)$. Prędkość psa jest skierowana w kierunku uciekającego zająca, czyli na prędkość psa nałożone są więzy:

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} - \frac{l-x}{h(t)-y} = 0.$$

Ograniczenie to prowadzi do ograniczeń na przyspieszenie psa, ale zwykle (chyba że $h(t) = \text{const}$ lub $x = l$) nie stanowi ograniczenia na jego położenie - każdy punkt płaszczyzny Oxy jest dostępny dla ruchu.



Zanim przejdziemy do ogólnej analizy więzów nałożonych na układy punktów materialnych, wprowadzimy pojęcie przestrzeni konfiguracyjnej układu. Przestrzeń konfiguracyjna układu n punktów materialnych to iloczyn kartezjański n przestrzeni położeń poszczególnych punktów materialnych. Położenie układu n punktów materialnych określa w $3n$ -wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej wektor $\vec{r} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ i tor układu jest krzywą w tej przestrzeni.

Klasyfikacja więzów nałożonych na układ n punktów materialnych
Więzy są dwustronne, jeśli równanie więzów ma postać $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$.

Więzy są jednostronne, jeśli ich równanie ma postać $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \geq 0$ (nierówność ze znakiem \leq można zawsze zapisać przy użyciu znaku \geq zmieniając znak funkcji f).

Więzy są holonomiczne (całkowalne), jeśli ich równanie można sprowadzić do postaci $f(\vec{r}, t) = 0$ (lub ≥ 0) nie zawierającej prędkości.

Więzy są nieholonomiczne (niecałkowalne), jeśli nie dają się sprowadzić do powyższej postaci.

Dla więzów holonomicznych z równania $f(\vec{r}, t) = 0$ przez różniczkowanie możemy otrzymać liniowe w prędkości równanie $\dot{\vec{r}} \text{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. W wypadku więzów nieholonomicznych ograniczamy się zwykle także do więzów liniowych w prędkościach, czyli postaci $\vec{b}(\vec{r}, t) \dot{\vec{r}} + b_0(\vec{r}, t) = 0$. Równanie zarówno więzów holonomicznych jak i nieholonomicznych liniowych można więc zapisać w tej ogólnej postaci (lub $\vec{b} d\vec{r} + b_0 dt = 0$), przy czym współczynniki \vec{b} i b_0 dla więzów nieholonomicznych nie dają się zapisać w postaci $\text{grad} f$ i $\frac{\partial f}{\partial t}$ jakiegokolwiek funkcji f .

Więzy są skleronomiczne (nieruchome), jeśli f nie zależy jawnie od czasu t lub \vec{b} nie zależy od t oraz $b_0 = 0$.

W przeciwnym wypadku więzy są reonomiczne (ruchome).

Więzy w przykładzie a. są holonomiczne dwustronne skleronomiczne, w przykładzie b. - holonomiczne jednostronne skleronomiczne, w przykładzie c. - na ogół nieholonomiczne dwustronne reonomiczne.

Obecnie ograniczymy się do więzów dwustronnych. Wielkości $d\vec{r}$ spełniające ogólne równanie więzów $\vec{b} d\vec{r} + b_0 dt = 0$ nazywamy przesunięciami możliwymi. Przesunięciami wirtualnymi nazywamy przesunięcia $\delta\vec{r}$, które spełniają równanie $\vec{b} \delta\vec{r} = 0$ (odpowiadające "zamrożonym" więzom z $dt = 0$). Z równania $\vec{b} \dot{\vec{r}} + b_0 = 0$ przez różniczkowanie otrzymujemy warunek $\dot{\vec{b}} \dot{\vec{r}} + \ddot{\vec{b}} \vec{r} + \dot{b}_0 = 0$, będący warunkiem na składowe przyspieszeń w kierunku \vec{b} (dla więzów holonomicznych w kierunkach $\text{grad} f$, czyli w kierunku normalnym do "zamrożonej" powierzchni więzów). Przyspieszenia $\frac{\vec{F}_i}{m_i}$ mogą nie spełniać tego typu ograniczeń i wtedy więzy oddziałują na punkty materialne pewnymi dodatkowymi siłami \vec{F}_{Ri} , zwanymi siłami reakcji więzów, by przyspieszenia $\frac{(\vec{F}_i + \vec{F}_{Ri})}{m_i}$ spełniały te ograniczenia.

Równania Newtona dla układu n punktów materialnych nieswobodnych z p niezależnymi równaniami więzów holonomicznych i p' niezależnymi równaniami więzów nieholonomicznych ($p + p' < 3n$):

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{Ri} & (i = 1, \dots, n), \\ f^{(k)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & (k = 1, \dots, p), \\ \sum_{i=1}^n \vec{b}_i^{(l)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) \dot{\vec{r}}_i + b_0^{(l)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & (l = 1, \dots, p'). \end{array} \right.$$

Wielkość $f = (3n - p - p')$ nazywa się liczbą stopni swobody układu punktów materialnych i interesuje nas przypadek $f > 0$.

Liczba niewiadomych: $3n$ położeń, $3n$ sił reakcji, czyli $6n$.

Liczba równań: $3n$ równań ruchu, $p + p'$ równań więzów, czyli $3n + p + p' = 6n - f < 6n$.

Trzeba więc dołączyć dodatkowe informacje o siłach reakcji i zmniejszyć liczbę niewiadomych w tych siłach do $(p + p')$, odpowiadającej liczbie warunków nałożonych na przyspieszenia przez równania więzów.

Więzy doskonałe

Zacniemy od rozważenia najprostszycy więzów, zwanych więzami doskonałymi (doskonale gładkimi). Więzy nazywamy doskonałymi, jeśli praca sił reakcji dla tych więzów jest równa zero

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ri} \delta\vec{r}_i \equiv \vec{F}_R \delta\vec{r} = 0$$

przy dowolnych przesunięciach wirtualnych $\delta\vec{r}$ określonych przez warunki $\text{grad} f^{(k)}\delta\vec{r} = 0$, $\vec{b}^{(l)}\delta\vec{r} = 0$. Wynika stąd, że siły reakcji więzów \vec{F}_R muszą być kombinacją wektorów $\vec{b}^{(l)}$ i $\text{grad} f^{(k)}$ prostopadłych do $\delta\vec{r}$:

$$\vec{F}_{Ri} = \sum_{k=1}^p \lambda^{(k)} \text{grad}_i f^{(k)} + \sum_{l=1}^{p'} \mu^{(l)} \vec{b}_i^{(l)}.$$

Mamy wtedy tylko $(p + p')$ niewiadomych $\lambda^{(k)}$ i $\mu^{(l)}$, zwanych mnożnikami Lagrange'a, które określają siły reakcji więzów doskonałych.

Równania ruchu Newtona przechodzą wtedy w **układ równań Lagrange'a I rodzaju** zawierający $(3n + p + p')$ równań na $3n$ niewiadomych $\vec{r}_i(t)$ oraz $(p + p')$ niewiadomych $\lambda^{(k)}(t)$ i $\mu^{(l)}(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^p \lambda^{(k)} \text{grad}_i f^{(k)} + \sum_{l=1}^{p'} \mu^{(l)} \vec{b}_i^{(l)} & (i = 1, \dots, n), \\ f^{(k)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & (k = 1, \dots, p), \\ \sum_{i=1}^n \vec{b}_i^{(l)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) \dot{\vec{r}}_i + b_0^{(l)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & (l = 1, \dots, p'). \end{array} \right.$$

Jeśli pojawiają się dodatkowo siły reakcji wykonujące pracę przy przesunięciach wirtualnych, to te dodatkowe siły nazywa się siłami tarcia, a więzy nazywa się **więzami niedoskonałymi** (szorstkimi). Siły te zależą od dodatkowych fizycznych parametrów charakteryzujących szorstkość powierzchni więzów - współczynników tarcia. (Ścisłej mówiąc, chodzi tu o siły tarcia kinetycznego, gdyż siły tarcia statycznego są siłami reakcji odpowiadającymi dodatkowym więzom doskonałym unieruchamiającym ciało i nie są zależne od współczynników tarcia statycznego - współczynniki te określają jedynie warunki istnienia takich więzów (zob. podrozdział 1.8).)

Równania Lagrange'a I rodzaju są równoważne **zasadzie d'Alemberta**: dla ruchu układu punktów materialnych z zadanymi więzami doskonałymi dla dowolnych przesunięć wirtualnych $\delta\vec{r}_i$ zgodnych z więzami:

$$\sum_{i=1}^n \text{grad}_i f^{(k)} \delta\vec{r}_i = 0, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{b}_i^{(l)} \delta\vec{r}_i = 0, \quad l = 1, \dots, p'$$

zachodzi równanie

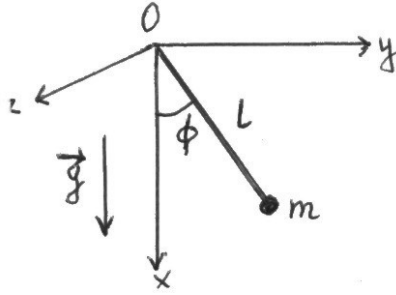
$$\sum_{i=1}^n (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \delta\vec{r}_i = 0.$$

Dowód

Z równań Lagrange'a wynika zasada d'Alemberta, gdyż dla więzów doskonałych $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{Ri} \delta\vec{r}_i = 0$. Z zasady d'Alemberta wynikają równania Lagrange'a, gdyż wynika z niej, że w przestrzeni konfiguracyjnej $m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i$ muszą być kombinacją liniową wektorów prostopadłych do $\delta\vec{r}_i$. \square

Zasada d'Alemberta jest dynamicznym uogólnieniem statycznej **zasady prac wirtualnych (zasady prac przygotowanych, zasady Lagrange'a)** $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0$, która jest bardzo przydatna przy wyznaczaniu położenia równowagi układu z więzami skleronomicznymi i siłami niezależnymi jawnie od czasu (wtedy dla położenia równowagi mamy $\dot{\vec{r}}_i = \vec{0}$).

Przykład: Wahadło matematyczne płaskie, czyli jeden punkt materialny w jednorodnym polu siły ciężkości o przyspieszeniu $\vec{g} = (g, 0, 0)$, z więzami holonomicznymi (dwustronnymi skleronomicznymi): $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$, $z = 0$. Układ ten ma $f = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ stopni swobody i założmy, że nie ma sił tarcia (więzy są doskonałe).



Równania ruchu Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda_1 \text{grad}(r^2 - l^2) + \lambda_2 \text{grad} z$$

we współrzędnych kartezjańskich mają postać:

$$m\ddot{x} = mg + 2\lambda_1 x,$$

$$m\ddot{y} = 2\lambda_1 y,$$

$$m\ddot{z} = 2\lambda_1 z + \lambda_2.$$

Uwzględniając równanie więzów $z = 0$, z trzeciego równania otrzymujemy $\lambda_2 = 0$, czyli nie pojawia się siła reakcji związana z więzami utrzymującymi ruch wahadła w płaszczyźnie pionowej. Pozostaje nam więc problem ruchu w płaszczyźnie Oxy opisany dwoma pierwszymi równaniami ruchu i równaniem więzów $x^2 + y^2 - l^2 = 0$.

Wygodnie jest przepisać te równania w układzie biegunowym:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = mg \cos \varphi + 2\lambda_1 r,$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = -mg \sin \varphi,$$

$$r^2 - l^2 = 0.$$

Równanie więzów i pierwsze równanie ruchu pozwalają wyznaczyć siłę reakcji więzów

$$\vec{F}_R = 2\lambda_1 l \vec{e}_r = (-ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi) \vec{e}_r,$$

skierowaną wzdłuż pręta i równoważącą siłę odśrodkową i radialną składową siły ciężkości. Drugie równanie przyjmuje postać równania ruchu jednowymiarowego

$$ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0$$

i umożliwia wyznaczenie ruchu $\varphi(t)$ (uwzględnienie zasady zachowania energii pozwala sprowadzić ten problem do kwadratur). Zrobimy to w ogólnym wypadku w podrozdziale 1.10, a obecnie rozważymy otrzymane równanie ruchu tylko dla małych drgań ($|\varphi| \ll 1$), gdy można je przybliżyć przez:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Potrąfimy podać ogólne rozwiązanie tego równania liniowego:

$$\varphi = a \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + b \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) = A \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta), \quad , \quad a, b, A, \delta - \text{stałe.}$$

Otrzymujemy drgania harmoniczne. Istotną właściwością drgań harmonicznycch jest izochroniczność, czyli niezależność częstości $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (a stąd i okresu $T = \frac{2\pi}{\omega}$) od amplitudy drgań A .

Rozdzielenie równań na siły reakcji i równań na ruch (już bez sił reakcji) można przeprowadzić dla dowolnego układu z więzami holonomicznymi i zrobimy to w następnym podrozdziale. Takie podejście jest bardzo przydatne, gdyż często jesteśmy zainteresowani znalezieniem tylko ruchu, a siły reakcji nie są nam potrzebne.

1.6 Układy z więzami holonomicznymi doskonałymi, równania Lagrange'a II rodzaju

Wiemy już, że równania Lagrange'a I rodzaju dla układu n punktów materialnych z p więzami holonomicznymi doskonałymi mają postać

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^p \lambda^{(k)} \text{grad}_i f^{(k)} & (i = 1, \dots, n), \\ f^{(k)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = 0 & (k = 1, \dots, p). \end{cases}$$

Układ ma $f = 3n - p$ stopni swobody i mamy $(3n + p)$ równań na $(3n + p)$ niewiadomych. Im więcej więzów, tym więcej równań, bo więcej mnożników $\lambda^{(k)}$. Jeżeli nie interesują nas siły reakcji, a tylko ruch, to warto niewiadome $\lambda^{(k)}$ wyeliminować i otrzymać f równań ruchu na niezależne współrzędne określające ten ruch. W tym celu wprowadzamy więc **współrzędne uogólnione zgodne z więzami**, czyli takie niezależne współrzędne $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$ zdefiniowane związkami $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$, $i = 1, \dots, n$, aby równania więzów były tożsamościowo spełnione, czyli aby rząd macierzy $(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j})$ wynosił f oraz $f^{(k)}(\vec{r}(q, t), t) \equiv 0$.

Przykład

Rozważmy sferyczne wahadło matematyczne o długości zmiennej w czasie, czyli punkt materialny na sferze o promieniu $l(t)$, co odpowiada więzom $x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0$. Wprowadzamy współrzędne sferyczne ϑ, φ określone wzorami

$$\begin{aligned} x &= l(t) \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= l(t) \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= l(t) \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Współrzędne te identyfikują jednoznacznie wszystkie punkty na powierzchni kuli (rząd macierzy $(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j})$ wynosi 2), a równanie więzów jest tożsamościowo spełnione:

$$l^2(t)(\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta) - l^2(t) \equiv 0.$$

Współrzędne ϑ, φ są więc współrzędnymi uogólnionymi zgodnymi z więzami - więzy nie nakładają na nie żadnych ograniczeń.

Po wprowadzeniu współrzędnych uogólnionych mamy więc $f^{(k)}(\vec{r}(q, t), t) \equiv 0$ i wobec tego także $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \text{grad}_i f^{(k)} \equiv 0$. Po przejściu do współrzędnych uogólnionych z równań Lagrange'a I rodzaju pozostaje $3n$ równań na $f = 3n - p$ współrzędnych q_l i p mnożników Lagrange'a $\lambda^{(k)}$. Przekształcimy teraz równania ruchu tak, aby wyeliminować z nich $\lambda^{(k)}$, czyli oddzielić wyznaczanie ruchu od wyznaczania sił reakcji. Mnożymy obie strony równań ruchu przez $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$ i sumując po i uzyskujemy równania:

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} + \sum_{k=1}^p \lambda^{(k)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \text{grad}_i f^{(k)} \quad (l = 1, \dots, f)$$

w których współczynniki przy $\lambda^{(k)}$ znikają i wszystkie mnożniki $\lambda^{(k)}$ zostają wyeliminowane.

Wielkości $Q_l(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$ nazywamy **siłami uogólnionymi**.

Wykażemy, że

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l},$$

gdzie $T(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2(q, \dot{q}, t)$.

Dowód: Ponieważ

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t), \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial t} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l},$$

to

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} + \frac{\partial T}{\partial q_l}.$$

□

Równania Lagrange'a II rodzaju (1788)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l, \quad (l = 1, \dots, f),$$

$$\text{gdzie } T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2(q, \dot{q}, t),$$

$$Q_l(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}.$$

Uzyskane w ten sposób równania Lagrange'a II rodzaju są układem f równań różniczkowych zwyczajnych, każde drugiego rzędu, na f niewiadomych $q(t)$. Są one słuszne przy dowolnym wyborze współrzędnych uogólnionych zgodnych z więzami (w szczególności także dla układów bez więzów przy dowolnych współrzędnych w przestrzeni konfiguracyjnej układu punktów swobodnych).

Jeśli siły \vec{F}_i są potencjalne, to $\vec{F}_i = -\text{grad}_i V(\vec{r}, t)$, gdzie V jest energią potencjalną układu. Wtedy $Q_l = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = -\sum_{i=1}^n \text{grad}_i V(\vec{r}, t) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l}$, gdzie $V(q, t) \equiv V(\vec{r}(q, t), t)$. Po wprowadzeniu

lagranżjanu (funkcji Lagrange'a) $L(q, \dot{q}, t) \equiv T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$ równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują wtedy prostszą postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, \dots, f.$$

Dowód:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_l} = \frac{\partial T}{\partial q_l} - \frac{\partial V}{\partial q_l} = \frac{\partial T}{\partial q_l} + Q_l. \quad \square$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dają zapisać się w tej postaci dla ogólniejszej klasy sił, mianowicie dla sił mających **uogólnioną energię potencjalną** $U(q, \dot{q}, t)$, czyli jeśli:

$$Q_l(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial U}{\partial q_l}.$$

Przyjmując $L(q, \dot{q}, t) \equiv T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t)$, równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują znaną nam już postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, \dots, f.$$

Przy braku zależności U od \dot{q} mamy $U = V$. Zależność U od \dot{q} może być co najwyżej liniowa, gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy siły uogólnione Q zależne od \ddot{q} , co jest niemożliwe.

Ważną klasą sił mających uogólnioną energię potencjalną są siły elektromagnetyczne i dlatego jest ona tak ważna. Siła elektromagnetyczna jest potencjalna w zwykłym sensie tylko w polu elektrostatycznym.

Siła elektromagnetyczna działająca na punkt materialny o ładunku elektrycznym q jest określona wzorem Lorentza:

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)),$$

gdzie

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad } \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t),$$

ϕ i \vec{A} - potencjał skalarny i wektorowy pola elektromagnetycznego.

Uogólniona energia potencjalna dla tej siły jest równa

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\phi(\vec{r}, t) - q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t),$$

gdź:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{d}{dt}(-qA_x) - q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q(\dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x}) = \\ &= -q(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x}) = \\ &= -q(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y}(\text{rot } \vec{A})_z - \dot{z}(\text{rot } \vec{A})_y) \\ &= -q(\text{grad } \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})_x + q(\dot{\vec{r}} \times \text{rot } \vec{A})_x = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})_x. \end{aligned}$$

Przy zmianie cechowania potencjałów: $\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$, $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad} \chi$ (przekształcenie to nie zmienia \vec{E} i \vec{B}) lagranżjan $L \rightarrow L + \frac{d}{dt}(q\chi)$, a równania ruchu (zawierające tylko \vec{E} i \vec{B}) nie ulegają zmianie.

Ogólne twierdzenie:

Równania ruchu odpowiadające lagranżjanom różniącym się o $\frac{d}{dt}\Phi(q, t)$ z dowolną funkcją $\Phi(q, t)$ są takie same.

Dla ogólniejszych układów z doskonałymi więzami holonomicznymi i nieholonomicznymi można zamiast lagranżjanu wprowadzić funkcję przyspieszeń, a zamiast równań Lagrange'a II rodzaju używać równań Appella. Podstawowe informacje o analizie ruchu takich układów są w podręczniku Białkowskiego.

1.7 Lagranżjan i zasady zachowania

Jak wiemy, przy całkowaniu równań ruchu przydatne są całki ruchu odpowiadające odpowiednim zasadom zachowania.

Pędy uogólnione $p_l(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_l}$.

Jeśli $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x, t)$, to $p_x = m\dot{x}$ jest składową zwykłego pędu. W ogólnym wypadku nie musi to być zwykły pęd. Jeśli $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r, t)$, to $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = L_z$, czyli pęd uogólniony p_φ jest składową L_z momentu pędu. Jeśli $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\varphi(\vec{r}, t) + q\vec{r}\vec{A}(\vec{r}, t)$, to pęd uogólniony $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}(\vec{r}, t)$.

Z równań ruchu $\frac{d}{dt}p_l = \frac{\partial L}{\partial q_l}$.

Jeśli lagranżjan nie zależy od q_l (q_l jest zmienną cykliczną), to pęd uogólniony układu p_l zachowuje się.

Energia uogólniona $G(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_{l=1}^f \dot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}(q, \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)$.

Z równań ruchu $\frac{d}{dt}G = \sum_{l=1}^f (\ddot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} + \dot{q}_l \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial L}{\partial t} \ddot{q}_l) - \frac{\partial L}{\partial t}$, czyli

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Jeśli lagranżjan nie zależy jawnie od t (t jest zmienną cykliczną), to zachowuje się energia uogólniona układu.

Czym jest energia uogólniona układu?

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t), \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_{l=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} T(q, \dot{q}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f a_{kl}(q, t) \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{l=1}^f a_l(q, t) \dot{q}_l + a_0(q, t) = T_2 + T_1 + T_0 \geq 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$a_{kl}(q, t) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = a_{lk}(q, t),$$

$$a_l(q, t) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$

$$a_0(q, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

$$U(q, \dot{q}, t) = \sum_{l=1}^f b_l(q, t) \dot{q}_l + V(q, t) = U_1 + V.$$

$$\begin{aligned} G(q, \dot{q}, t) &= \sum_{l=1}^f \dot{q}_l \left(\sum_{k=1}^f a_{kl} \dot{q}_k + a_l - b_l \right) - T_2 - T_1 - T_0 + U_1 + V = \\ &= 2T_2 + T_1 - U_1 - T_2 - T_1 - T_0 + U_1 + V = T_2 - T_0 + V. \end{aligned}$$

Jeśli więzy są skleronomiczne i współrzędne uogólnione zostały wybrane w postaci $\vec{r} = \vec{r}(q)$, a siły są potencjalne, to $T_1 = T_0 = 0$, $T = T_2$, $U = V$ i energia uogólniona jest zwykłą energią $E = T + V$.

Wróćmy do ogólnej postaci lagranżjanu:

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk}(q, t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^f (a_j(q, t) - b_j(q, t)) \dot{q}_j + a_0(q, t) - V(q, t).$$

Macierz $a_{jk}(q, t) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ jest symetryczna i dodatnio określona.

Dowód dodatniej określoności:

Z definicji

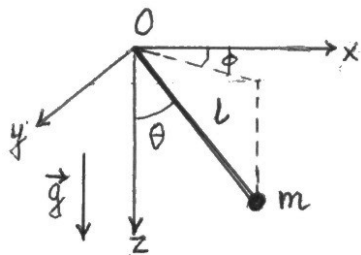
$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \geq 0,$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, jeśli $\sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = 0$ dla $i = 1, \dots, n$. Ponieważ jednak rząd macierzy $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ tego jednorodnego układu równań liniowych wynosi f , to jego rozwiązaniami są tylko $\dot{q}_j = 0$. \square

Lagranżjan odgrywa ważną rolę w mechanice, gdyż w tej pojedynczej funkcji zawarta jest pełna informacja dynamiczna o układzie mechanicznym. W lagranżjanie, jak widzieliśmy, zakodowane są informacje pozwalające znaleźć równania ruchu układu oraz zasady zachowania. Okazuje się, że lagranżjan można wprowadzić także dla innych układów fizycznych i tak np. w elektrodynamice lagranżjan zawiera informację o równaniach Maxwella, czyli równaniach pola elektromagnetycznego, itd. We współczesnej fizyce lagranżjan stanowi zwykle punkt startowy teorii dowolnych układów fizycznych.

Przykład: Sferyczne wahadło matematyczne, czyli punkt materialny o masie m na sferze o promieniu l w jednorodnym polu siły ciężkości o przyspieszeniu $\vec{g} = g\vec{e}_z$.

Równanie więzów: $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$ (więzy skleronomiczne), liczba stopni swobody $f = 3 - 1 = 2$, współrzędne uogólnione ϑ i φ :



$$\begin{cases} x = l \sin \vartheta \cos \varphi, & \dot{x} = l \cos \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi} - l \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ y = l \sin \vartheta \sin \varphi, & \dot{y} = l \cos \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi} + l \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ z = l \cos \vartheta, & \dot{z} = -l \sin \vartheta \dot{\vartheta}. \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2),$$

$$V = -m\vec{g}\vec{r} = -mgz = -mgl \cos \vartheta,$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \vartheta.$$

Wypiszmy równania Lagrange'a II rodzaju:

$$ml^2\ddot{\vartheta} - ml^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 + mgl \sin \vartheta = 0,$$

$$ml^2 \sin^2 \vartheta \ddot{\varphi} + 2ml^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi} = 0.$$

Dla $\varphi = \text{const}$ równania te przechodzą w znane nam równanie dla wahadła płaskiego $ml^2\ddot{\vartheta} + mgl \sin \vartheta = 0$. W ogólnym wypadku równania są bardzo złożone. Aby je rozwiązać, wykorzystamy zasady zachowania. Lagranżjan nie zależy od φ i stąd zachowuje się pęd uogólniony

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const} = L_z,$$

czyli składowa L_z momentu pędu ($L_z = m(xy\dot{z} - yz\dot{x}) = \dots = ml^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$).

Lagranżjan nie zależy od t i stąd zachowuje się energia uogólniona

$$G = T + V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \vartheta = \text{const} = E.$$

Zasady zachowania pozwalają sprowadzić układ równań do dwóch równań pierwszego rzędu dla $\vartheta(t)$ i $\varphi(t)$:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + V_{ef}(\vartheta) = E, \quad \text{gdzie} \quad V_{ef}(\vartheta) = \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \vartheta} - mgl \cos \vartheta,$$

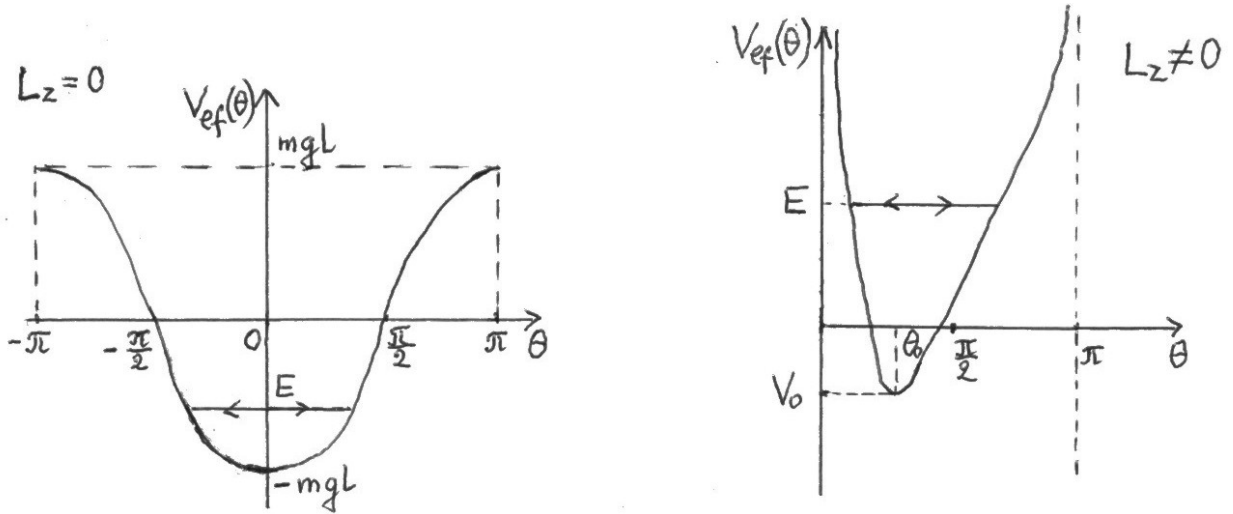
$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \vartheta},$$

które można sprowadzić do kwadratur

$$t - t_0 = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(E - V_{ef}(\vartheta))}} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \vartheta(t),$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \frac{L_z dt}{ml^2 \sin^2 \vartheta(t)}.$$

Wiele informacji o ruchu możemy uzyskać z analizy $V_{ef}(\vartheta)$.



- a. Jeśli $L_z = 0$, czyli $\dot{\varphi} = 0$, co odpowiada wahadłu płaskiemu z $\varphi = const$, to ruch jest możliwy dla $E \geq -mgl$.
 Dla $E = -mgl$ wahadło spoczywa w $\vartheta = 0$.
 Dla $-mgl < E < mgl$ wahadło drga wokół $\vartheta = 0$.
 Dla $E = mgl$ mamy ruch pełzający wahadła ($\vartheta \rightarrow \pm\pi$ przy $t \rightarrow \infty$).
 Dla $E > mgl$ wahadło wykonuje ruch obrotowy.
- b. Jeśli $L_z \neq 0$, to $V_{ef}(\vartheta)$ ma minimum V_0 dla $\cos \vartheta_0 = \frac{m^2 g l^3}{L_z^2} \sin^4 \vartheta_0$, $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$.
 Dla $E = V_0$ mamy $\vartheta = \vartheta_0$ i $\dot{\varphi} = const$, czyli wahadło porusza się jednostajnie po poziomym okręgu (pręt wahadła zakreśla powierzchnię stożka o połówkowym kącie rozwarcia ϑ_0) (precesja regularna).
 Dla $E > V_0$ kąt ϑ zmienia się między ϑ_{min} i ϑ_{max} (nutacja), a φ zmienia się ze zmienną prędkością kątową $\dot{\varphi}$ (precesja nieregularna).

1.8 Więzy holonomiczne dwustronne szorstkie - siły tarcia

Zagadnienie to omówimy na prostym przykładzie pojedynczego punktu materialnego o masie m poruszającego się po nieruchomej powierzchni $f(\vec{r}) = 0$ (skleronomiczne więzy holonomiczne).
 Równania ruchu Lagrange'a I rodzaju w wypadku więzów doskonałych (doskonale gładkich) mają postać:

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_{RN}, \\ f(\vec{r}) = 0, \end{cases}$$

gdzie siła reakcji więzów $\vec{F}_{RN} = \lambda \text{grad } f$ jest prostopadła (normalna) do powierzchni więzów.
 W wypadku więzów szorstkich dochodzą składowe styczne siły reakcji, czyli siły tarcia związane z szorstkością powierzchni:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_{RN} + \vec{F}_{RT}.$$

Z doświadczenia wiemy, że obowiązują następujące prawa dla siły tarcia \vec{F}_{RT} :

- a. siła tarcia statycznego: jeśli punkt materialny nie porusza się względem powierzchni więzów w chwili początkowej i składowa styczna siły $|\vec{F}_T| \leq \mu_0 |\vec{F}_{RN}|$, gdzie μ_0 - współczynnik tarcia statycznego, to $\vec{F}_{RT} = -\vec{F}_T$ i $\ddot{\vec{r}}_T = \vec{0}$, czyli punkt materialny pozostaje w spoczynku względem powierzchni więzów. Siła tarcia statycznego odpowiada więc dodatkowym więzom: $\ddot{\vec{r}}_T = \vec{0}$.
- b. siła tarcia kinetycznego: jeśli punkt materialny porusza się względem powierzchni więzów, to $\vec{F}_{RT} = -\mu |\vec{F}_{RN}| \frac{\vec{v}}{v}$, gdzie μ - współczynnik tarcia kinetycznego i z doświadczenia $\mu \leq \mu_0$. Równania ruchu mają wtedy postać:

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \text{grad } f - \mu |\lambda \text{grad } f| \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}, \\ f(\vec{r}) = 0. \end{cases}$$

Jeśli $\mu_0 = 0$, to więzy są doskonałe (doskonale gładkie).

Jeśli $\mu_0 = \infty$, to więzy są doskonale szorstkie.

1.9 Więzy holonomiczne jednostronne doskonałe

Rozważmy takie więzy na przykładzie jednego punktu materialnego o masie m przy sile \vec{F} i równaniu więzów $f(\vec{r}, t) \geq 0$. Zachodzą wtedy wzory:

$$f(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) = f(\vec{r}, t) + \frac{df}{dt} dt + \frac{d^2 f}{dt^2} dt^2 + \dots,$$

gdzie

$$\frac{df}{dt} = \text{grad } f \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = \text{grad } f \cdot \ddot{\vec{r}} + D_2 f, \quad D_2 f \equiv \left(\frac{d}{dt} \text{grad } f \right) \dot{\vec{r}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Więzy jednostronne działają w następujący sposób:

- Obszar $f(\vec{r}, t) < 0$ jest zabroniony dla punktu materialnego w chwili t .
- Jeśli $f(\vec{r}, t) > 0$ lub $[f(\vec{r}, t) = 0, \frac{df}{dt}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) > 0]$ lub $[f(\vec{r}, t) = 0, \frac{df}{dt}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0, \text{grad } f \frac{\vec{F}}{m} + D_2 f \geq 0]$, to ruch jest swobodny i równanie ruchu ma postać $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.
- Jeśli $f(\vec{r}, t) = 0, \frac{df}{dt}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$ i $\text{grad } f \frac{\vec{F}}{m} + D_2 f < 0$, to więzy się napinają i równanie ruchu ma postać jak dla więzów dwustronnych $f(\vec{r}, t) = 0$:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \text{grad } f.$$

Ponieważ dla takiego ruchu $\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$, więc:

$$\text{grad } f(\vec{F} + \lambda \text{grad } f) + m D_2 f = 0,$$

i na λ otrzymujemy wzór:

$$\lambda = - \frac{m D_2 f + \vec{F} \text{grad } f}{|\text{grad } f|^2},$$

czyli $\lambda > 0$ i siła reakcji jest jednostronna.

- Jeśli $f(\vec{r}, t) = 0, \frac{df}{dt}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) < 0$, to następuje uderzenie o powierzchnię więzów powodujące **nagłą** zmianę prędkości $\dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{r}}'$, aby $\frac{df}{dt}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}', t) \geq 0$ i dalej ruch odbywa się zgodnie z b. lub c. Dla więzów doskonałych uderzeniowa siła reakcji więzów musi być prostopadła do powierzchni f , czyli podczas zderzenia składowa styczna prędkości nie zmienia się: $\dot{\vec{r}}'_T = \dot{\vec{r}}_T$, a składowa normalna zmienia się w zależności od sprężystości uderzenia. Z doświadczenia wiemy, że wtedy

$$\frac{df}{dt}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}', t) = -\epsilon \frac{df}{dt}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Współczynnik sprężystości przyjmuje wartości $0 \leq \epsilon \leq 1$; dla uderzenia szkła o szkło $\epsilon = \frac{15}{16}$, żelaza o żelazo $\epsilon = \frac{5}{9}$.

Jeśli $\epsilon = 0$, to uderzenie jest doskonale niesprężyste i punkt materialny przylega do więzów. Jeśli $\epsilon = 1$, to uderzenie jest doskonale sprężyste i wtedy dla więzów skleronomicznych mamy $\dot{\vec{r}}'_N = -\dot{\vec{r}}_N$.

1.10 Położenia równowagi układu i małe drgania wokół położenia równowagi trwałej

Rozważmy układ ze skleronomicznymi więzami holonomicznymi doskonałymi, współrzędnymi uogólnionymi określonymi przez $\vec{r} = \vec{r}(q)$ i siłami zachowawczymi z energią potencjalną $V(q)$. Lagranżjan ma wtedy postać

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k - V(q) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

i równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują postać:

$$\sum_{j=1}^f a_{jl}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial a_{jl}(q)}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}(q)}{\partial q_l} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial V(q)}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, \dots, f.$$

W układzie tym zachowuje się energia $E = T(q, \dot{q}) + V(q)$.

Położeniem równowagi układu mechanicznego nazywamy takie jego położenie q , że jeśli układ znajdzie się w nim w pewnej chwili z $\dot{q} = 0$, to pozostanie w nim nieskończenie długo, czyli stale będą znikać \dot{q} i \ddot{q} . Z równań Lagrange'a II rodzaju wynika, że warunkiem koniecznym i dostatecznym dla położenia równowagi jest znikanie w tym położeniu pierwszej pochodnej energii potencjalnej, czyli sił uogólnionych:

$$\frac{\partial V}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, \dots, f.$$

Położenie równowagi jest **położeniem równowagi trwałej**, jeśli przy dostatecznie małych odchyleniach od niego i dostatecznie małych prędkościach w chwili początkowej układ w dowolnej chwili czasu znajduje się w dowolnie małym otoczeniu położenia równowagi. Ścisłej: dla dowolnie małych dodatnich stałych ϵ_q i $\epsilon_{\dot{q}}$ istnieją takie dodatnie stałe δ_q i $\delta_{\dot{q}}$, że jeśli początkowo (w $t = t_0$) mamy $|q_{j0} - q_{jr}| < \delta_{q_j}$ i $|\dot{q}_{j0}| < \delta_{\dot{q}_j}$, $j = 1, \dots, f$, to dla dowolnego czasu spełnione są nierówności $|q_j - q_{jr}| < \epsilon_{q_j}$ i $|\dot{q}_j| < \epsilon_{\dot{q}_j}$, $j = 1, \dots, f$.

W przeciwnym wypadku mamy **położenie równowagi chwiejnej**.

Twierdzenie Dirichleta

Jeśli położenie równowagi odpowiada minimum energii potencjalnej, to jest położeniem równowagi trwałej.

Dowód:

Jeśli w położeniu równowagi mamy minimum energii potencjalnej V_r , to w dowolnie małym otoczeniu tego położenia możemy wybrać hiperpowierzchnię z energią potencjalną $V_r + \Delta$ z $\Delta > 0$. W czasie ruchu zachowuje się energia układu i stąd, jeśli układ jest wewnątrz tej hiperpowierzchni i prędkości są na tyle małe, że $E < V_r + \Delta$, to układ nie wyjdzie poza tę hiperpowierzchnię. Układ wykonuje więc **małe drgania** wokół położenia równowagi trwałej. \square

Dobierzmy tak współrzędne uogólnione, aby w położeniu równowagi trwałej mieć $q = 0$. W czasie ruchu q i \dot{q} będą małe i rozwińmy L w otoczeniu $q = 0 = \dot{q}$ w szereg potęgowy w tych małych. Rozważmy najpierw ważny przypadek, gdy w rozwinięciu energii potencjalnej wokół położenia równowagi trwałej

$$V(q) = V(0) + \sum_{j=1}^f \frac{\partial V}{\partial q_j}(0)q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}(0)q_j q_k + \dots$$

(drugi składnik znika!) minimum energii potencjalnej wiąże się z dodatnią określonością formy kwadratowej $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f b_{jk} q_j q_k$, gdzie $b_{jk} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}(0)$, czyli spełnione jest kryterium Sylwestra dodatniej określoności:

$$b_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1f} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{1f} & \dots & b_{ff} \end{vmatrix} > 0.$$

Dla dostatecznie małych amplitud drgań można więc ograniczyć się do wyrazów kwadratowych w rozwinięciu $L(q, \dot{q})$:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f (a_{jk}(0) \dot{q}_j \dot{q}_k - b_{jk} q_j q_k) - V(0)$$

i równania ruchu stają się układem równań liniowych:

$$\boxed{\sum_{k=1}^f (a_{lk}(0) \ddot{q}_k + b_{lk} q_k) = 0, \quad l = 1, \dots, f,}$$

który potrafimy rozwiązać analitycznie. Ruch układu jest wtedy złożeniem f drgań harmonicznym. Przez przekształcenie liniowe można obie macierze $a_{jk}(0)$ i b_{jk} sprowadzić równocześnie do postaci diagonalnej z dodatnimi wartościami własnymi na przekątnej i wtedy dla nowych współrzędnych (określonych przez wektory własne), zwanych współrzędnymi normalnymi, mamy układ f niesprzężonych drgań harmonicznym (drgań normalnym), każde z jedną częstością (określoną przez odpowiednie wartości własne). W ogólnym wypadku takie przekształcenie liniowe jest złożeniem trzech przekształceń:

1. obrotu diagonalizującego macierz a_{jk} - ze względu na dodatnią określoność tej macierzy na jej przekątnej otrzymujemy dodatnie wartości własne,
2. dylatacji sprowadzającej otrzymaną diagonalną macierz a_{jk} do macierzy jednostkowej (lub proporcjonalnej do jednostkowej),
3. obrotu diagonalizującego przekształconą (w wyniku przekształceń 1. i 2.) macierz b_{jk} - jednostkowa macierz a_{jk} nie ulega wtedy zmianie.

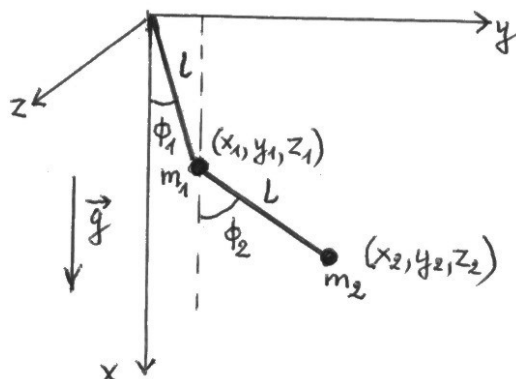
Dla większym amplitud drgań trzeba uwzględnić dalsze wyrazy rozwinięcia i ujawnia się nieliniowość równań ruchu i anharmoniczność drgań (często stosuje się wtedy rachunek zaburzeń). W wypadku, jeśli minimum energii potencjalnej nie wiąże się z dodatnią określonością formy kwadratowej $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{k=1}^f b_{jk} q_j q_k$, trzeba od początku uwzględnić wyższe wyrazy rozwinięcia i nawet dla bardzo małych amplitud od razu pojawiają się nieliniowe równania ruchu i drgania anharmoniczne.

Przykład 1. Podwójne wahadło matematyczne płaskie - do wahadła matematycznego o masie m_1 i długości l podwieszono jest drugie wahadło o masie m_2 i identycznej długości, drgające w tej samej płaszczyźnie $z = 0$, przyspieszenie grawitacyjne $\vec{g} = g\vec{e}_x$.

Równania więzów:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \\ z_2 &= 0, \\ x_1^2 + y_1^2 - l^2 &= 0, \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 &= 0. \end{aligned}$$

Liczba stopni swobody: $f = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, współrzędne uogólnione φ_1, φ_2 :



$$\begin{cases} x_1 = l \cos \varphi_1, & x_2 = l \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2, \\ y_1 = l \sin \varphi_1, & y_2 = l \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2, \\ z_1 = 0, & z_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1, & \dot{x}_2 = -l \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - l \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2, \\ \dot{y}_1 = l \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1, & \dot{y}_2 = l \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + l \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2, \\ \dot{z}_1 = 0, & \dot{z}_2 = 0. \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2),$$

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -m_1 g l \cos \varphi_1 - m_2 g l (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2).$$

Położenia równowagi:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = (m_1 + m_2) g l \sin \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \pi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = m_2 g l \sin \varphi_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \pi,$$

czyli 4 położenia równowagi.

Położenia równowagi trwałe:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_j \partial \varphi_k} \right) = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) g l \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l \cos \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0 : \begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix} \Rightarrow \text{minimum, położenie trwałe}$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi : \begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix} \Rightarrow \text{punkt siodłowy, położenie chwiejne}$$

$$\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0 : \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix} \Rightarrow \text{punkt siodłowy, położenie chwiejne}$$

$\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = \pi : \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix} \Rightarrow$ maksimum, położenie chwiejne

Stąd mamy tylko jedno położenie równowagi trwałe: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$. Dla małych drgań wokół tego położenia:

$$L = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) + \\ + m_1gl + 2m_2gl - \frac{1}{2}m_1gl\varphi_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl\varphi_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl\varphi_2^2.$$

Równania ruchu:

$$m_1l^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l^2\ddot{\varphi}_2 + m_1gl\varphi_1 + m_2gl\varphi_1 = 0,$$

$$m_2l^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l^2\ddot{\varphi}_1 + m_2gl\varphi_2 = 0,$$

czyli oznaczając $\alpha \equiv \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}} < 1, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$:

$$\ddot{\varphi}_1 + \alpha^2\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2\varphi_1 = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2\varphi_2 = 0.$$

Poszukujemy niezależnych rozwiązań postaci:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} (-\omega^2) e^{i\omega t},$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha^2\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Niezerowe rozwiązania dla A_1, A_2 istnieją tylko, gdy:

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \alpha^2\omega^4 = 0,$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2 - \alpha\omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2 + \alpha\omega^2) = 0,$$

czyli wzbudzają się jedynie drgania z częstościami:

$$\omega = \pm\omega_>, \pm\omega_<, \quad \text{gdzie} \quad \omega_> = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad \omega_< = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\alpha}}.$$

Dodatkowo mamy jeszcze równania:

$$\text{dla } \omega = \pm\omega_>: -\frac{\alpha}{1-\alpha}A_1 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}A_2 \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{\alpha}A_1,$$

$$\text{dla } \omega = \pm\omega_<: \frac{\alpha}{1+\alpha}A_1 = \frac{\alpha^2}{1+\alpha}A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{\alpha}A_1.$$

Ogólne rozwiązanie ma więc postać:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} (Ae^{i\omega_>t} + Be^{-i\omega_>t}) + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} (Ce^{i\omega_<t} + De^{-i\omega_<t}) = \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} (a \cos(\omega_>t) + b \sin(\omega_>t)) + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} (c \cos(\omega_<t) + d \sin(\omega_<t)).$$

Jeśli od współrzędnych φ_1, φ_2 przeszlibyśmy do nowych współrzędnych

$$u_1 = \varphi_1 - \alpha\varphi_2, \quad u_2 = \varphi_1 + \alpha\varphi_2,$$

to u_1 drgałaby z częstością $\omega_>$, a u_2 - z częstością $\omega_<$ (u_1, u_2 są więc współrzędnymi normalnymi). Łatwo sprawdzić, że w tych współrzędnych normalnych równania ruchu są niesprężone:

$$\ddot{u}_1 + \omega_>^2 u_1 = 0, \quad \ddot{u}_2 + \omega_<^2 u_2 = 0,$$

a macierze $a_{jk}(0)$ i b_{jk} występujące w L są diagonalne.

Stałe a, b, c, d wyznaczamy z warunków początkowych. Jeśli w $t = 0$ wychylenia φ_1 i φ_2 przyjmują swoje maksymalne wartości φ_{10} i φ_{20} , czyli $\dot{\varphi}_{10} = 0 = \dot{\varphi}_{20}$, to:

$$\begin{cases} a + c = \varphi_{10}, & -\frac{1}{\alpha}(a - c) = \varphi_{20}, \\ b\omega_{>} + d\omega_{<} = 0, & -\frac{1}{\alpha}(b\omega_{>} - d\omega_{<}) = 0. \end{cases}$$

Stąd:

$$a = \frac{1}{2}(\varphi_{10} - \alpha\varphi_{20}), \quad c = \frac{1}{2}(\varphi_{10} + \alpha\varphi_{20}), \quad b = d = 0$$

i rozwiązanie ma postać:

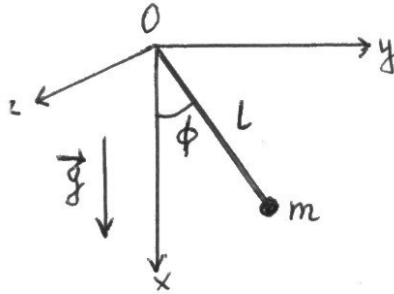
$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_{10} - \alpha\varphi_{20}) \cos(\omega_{>}t) + \frac{1}{2}(\varphi_{10} + \alpha\varphi_{20}) \cos(\omega_{<}t), \\ \varphi_2 = -\frac{1}{2\alpha}(\varphi_{10} - \alpha\varphi_{20}) \cos(\omega_{>}t) + \frac{1}{2\alpha}(\varphi_{10} + \alpha\varphi_{20}) \cos(\omega_{<}t). \end{cases}$$

Jeśli $\varphi_{10} = \alpha\varphi_{20}$, to pojawiają się tylko drgania z częstotnością $\omega_{<}$, a jeśli $\varphi_{10} = -\alpha\varphi_{20}$ - tylko z częstotnością $\omega_{>}$, co zgodne jest z naszą intuicją fizyczną (okres bardziej "majestatycznego" ruchu jest dłuższy). Przy $\alpha \rightarrow 0$, czyli $m_1 \gg m_2$, otrzymujemy drgania dwóch niezależnych wahań z częstotnością ω_0 .

Przykład 2: Wahadło matematyczne płaskie o masie m i długości l drgające w płaszczyźnie Oxy pod wpływem jednorodnej siły grawitacyjnej z $\vec{g} = g\vec{e}_x$.

Równania więzów: $z = 0, x^2 + y^2 - l^2 = 0$ (więzy skleronomiczne holonomiczne).

Liczba stopni swobody $f = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Współrzędna uogólniona φ :



$$\begin{cases} x = l \cos \varphi, & \dot{x} = -l \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ y = l \sin \varphi, & \dot{y} = l \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ z = 0, & \dot{z} = 0. \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2,$$

$$V = -m\vec{g}\vec{r} = -mgx = -mgl \cos \varphi,$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju ma postać:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0,$$

czyli

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Znaleźliśmy już wcześniej ruch wahadła dla małych drgań, teraz przeanalizujemy go dla dowolnych amplitud. Do znalezienia rozwiązania równania wykorzystamy zasadę zachowania energii ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, więzy skleronomiczne, $\vec{r} = \vec{r}(q)$, siły potencjalne):

$$T + V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = E,$$

skąd po rozdzieleniu zmiennych problem znalezienia ruchu sprowadza się do obliczenia całki:

$$t - t_0 = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}(E + mgl \cos \varphi)}}.$$

Wybierając tak chwilę początkową $t_0 = 0$, aby w niej $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 \geq 0$, mamy $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_0^2 - mgl$ i stąd:

$$t = \pm \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - 2\frac{g}{l}(1 - \cos \varphi)}},$$

czyli

$$\dot{\varphi}_0 t = \pm \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \text{ gdzie } k \equiv \sqrt{\frac{l\dot{\varphi}_0^2}{4g}}.$$

(przy wzroście φ znak +, przy maleniu znak -).

Drganiom odpowiada $E < mgl$, czyli $\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_0^2 < 2mgl \Rightarrow l\dot{\varphi}_0^2 < 4g \Rightarrow k < 1$.

Ruchowi pełzającemu odpowiada $E = mgl \Rightarrow k = 1$.

Ruchowi obrotowemu odpowiada $E > mgl \Rightarrow k > 1$.

a. $k < 1$. Ruch odpowiada wtedy drganiom z amplitudą φ_1 określoną przez osiągnięcie zera przez wyrażenie podpierwiastkowe: $1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = 0$, czyli $\sin \frac{\varphi_1}{2} = k$.

Wprowadźmy nową zmienną α wzorem: $\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = k \cos \alpha d\alpha$ i wtedy:

$$\dot{\varphi}_0 t = \int_0^{\alpha} \frac{2k \cos \alpha d\alpha}{\cos \frac{\varphi}{2} \cos \alpha} = 2k \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \equiv 2kF(k, \alpha),$$

gdzie $F(k, \alpha)$ jest funkcją specjalną zwaną całką eliptyczną pierwszego rodzaju - jej tablice są np. w poradniku Bronsztejna. Mamy więc

$$F(k, \alpha) = \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

i wykorzystując funkcję odwrotną, zwaną amplitudą całki eliptycznej pierwszego rodzaju, możemy napisać:

$$\alpha = \text{am}(k, \sqrt{\frac{g}{l}} t),$$

czyli

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \text{am}(k, \sqrt{\frac{g}{l}} t) \equiv k \text{sn}(k, \sqrt{\frac{g}{l}} t),$$

gdzie sn oznacza funkcję specjalną, zwaną sinusem eliptycznym Jacobiego.

Ostatecznie drgania o dowolnej amplitudzie (w ogólnosci anharmoniczne) opisuje wzór:

$$\varphi = 2 \arcsin(k \text{sn}(k, \sqrt{\frac{g}{l}} t)).$$

Okres ruchu T jest więc określony wzorem:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} T = 4F(k, \frac{\pi}{2}) \equiv 4K(k), \text{ czyli } T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(\sin \frac{\varphi_1}{2}),$$

gdzie $K(k)$ jest funkcją specjalną zwaną całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju. Okres drgań zależy więc od amplitudy drgań (anizochronizm). Zbadajmy nieco tę zależność:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \alpha] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right],$$

czyli

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_1}{2} \right] = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + \dots \right].$$

Z tablic w poradniku Bronsztejna mamy:

amplituda φ_1	$\frac{T}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = [\dots]$
0°	1
30°	1,017
60°	1,073
90°	1,180
120°	1,373
150°	1,762
180°	∞

Widzimy więc, że nawet przy amplitudzie 90° okres drgań wzrasta o mniej niż 20% w stosunku do okresu przy małych amplitudach.

Anharmoniczność drgań prowadzi więc do zmiany okresu (a więc i częstości) drgań i do ruchu niesinusoidalnego, który możemy przedstawić w postaci szeregu Fouriera, czyli złożenia (superpozycji) drgań harmonicznym z częstością podstawową i jej wielokrotnościami. W ogólnym wypadku do analizy ruchu przy niezbyt dużych amplitudach stosuje się rachunek zaburzeń, pozwalający bezpośrednio obliczać kolejne człony takiego rozwinięcia. Rachunek zaburzeń dla drgań anharmonicznych jest szczegółowo omówiony w podręczniku *Mechanika* L. Landaua i E. Lifszycy. b. $k = 1$ - ruch pełzający.

$$\dot{\varphi}_0 t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} = 2 \ln \operatorname{tg} \left[\frac{1}{4} (\pi + \varphi) \right],$$

$$\varphi = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\frac{\dot{\varphi}_0 t}{2}} - \pi = 2 \operatorname{arcsin} \left(\operatorname{tgh} \frac{\dot{\varphi}_0 t}{2} \right).$$

Kąt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jest osiągnięty w $t = \infty$.

c. $k > 1$ - ruch obrotowy.

$$\frac{\dot{\varphi}_0 t}{2} = F \left(\frac{1}{k}, \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\varphi = 2 \operatorname{am} \left(\frac{1}{k}, \frac{\dot{\varphi}_0 t}{2} \right).$$

Czas pełnego obrotu (przyrostu φ o 2π) obliczamy ze wzoru:

$$\frac{\dot{\varphi}_0 T}{2} = 2F \left(\frac{1}{k}, \frac{\pi}{2} \right) = 2K \left(\frac{1}{k} \right),$$

czyli

$$T = \frac{4}{\dot{\varphi}_0} K \left(\sqrt{\frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2}} \right).$$

Dla bardzo dużych energii mamy $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ i $K(0) = \frac{\pi}{2}$, czyli $T \rightarrow \frac{2\pi}{\dot{\varphi}_0}$, co odpowiada w granicy ruchowi jednostajnemu.

Przykład 3. Jednowymiarowe drgania w polu sił o potencjale $V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$; $\alpha > 0$. Potencjał ma minimum dla $x = 0$, ale $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_0 = 0$ dla $n > 1$ i nie ma wtedy drgań harmonicznym dla małych amplitud drgań (od razu pojawiają się drgania anharmoniczne).

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\alpha x^{2n}.$$

Równanie ruchu jest nieliniowe dla $n > 1$:

$$m\ddot{x} + n\alpha x^{2n-1} = 0.$$

Aby je scałkować, skorzystamy z zasady zachowania energii:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha x^{2n} = E = \frac{1}{2}\alpha x_1^{2n},$$

gdzie x_1 - amplituda (maksymalne wychylenie) drgań.

Ze względu na symetrię potencjału interesuje nas ruch od $x = 0$ w $t = 0$ do x w chwili t , gdzie $0 \leq x \leq x_1$:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{m}}t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x_1^{2n} - x^{2n}}}.$$

Wprowadzając nową zmienną y wzorem: $x = y^{\frac{1}{2n}}x_1 \Rightarrow y = \left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n}$, $dx = \frac{1}{2n}y^{\frac{1}{2n}-1}x_1 dy$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha}{m}}t &= \int_0^{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n}} \frac{1}{2n}x_1 y^{\frac{1}{2n}-1} dy (1-y)^{-\frac{1}{2}} x_1^{-n} = \frac{1}{2nx_1^{n-1}} \int_0^{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n}} y^{\frac{1}{2n}-1} (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2nx_1^{n-1}} B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{x_1}\right)^{2n}\right), \end{aligned}$$

gdzie $\int_0^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \equiv B(\alpha, \beta; x)$ jest funkcją specjalną zwaną niepełną funkcją beta Eulera. Okres drgań wynosi

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \frac{1}{2nx_1^{n-1}} B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{nx_1^{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right)},$$

gdzie $B(\alpha, \beta) \equiv B(\alpha, \beta; 1)$ i $\Gamma(\alpha)$ są funkcjami beta i gamma Eulera. Okres drgań dla $n > 1$ zależy od amplitudy drgań x_1 , a dla $n = 1$ (drgania harmoniczne) otrzymujemy $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$, gdyż $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$.