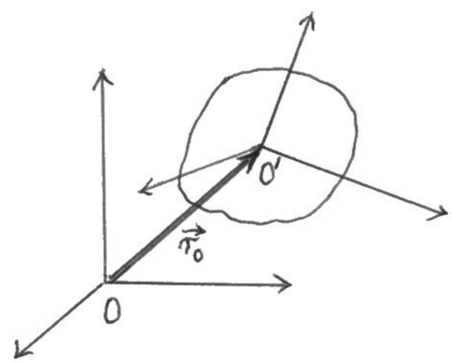
Zygmunt Ajduk

MECHANIKA KLASYCZNA

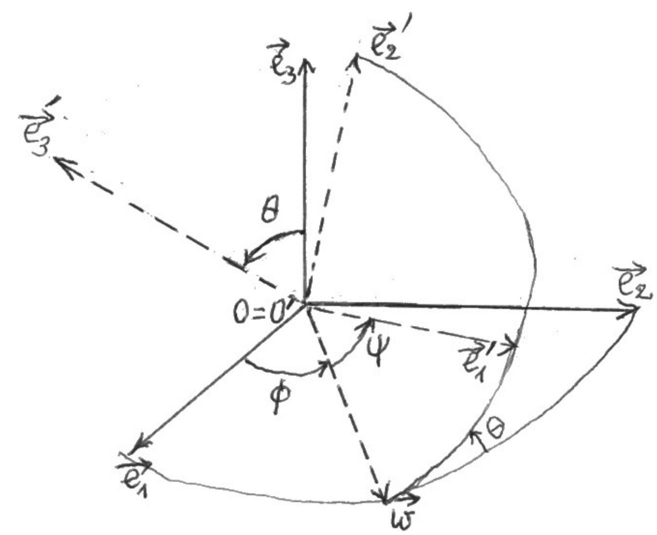
2 Mechanika (nierelatywistyczna) bryły sztywnej

2.1 Kinematyka bryły sztywnej

Bryłą sztywną nazywamy układ punktów materialnych, których wzajemne odległości są wielkościami stałymi. Jeśli na taki układ nie są nałożone żadne więzy oprócz tych zapewniających stałe odległości między punktami materialnymi układu, to bryłę sztywną nazywamy **swobodną**, w przeciwnym wypadku - **nieswobodną**.
Do opisu ruchu bryły sztywnej wprowadza się dwa układy współrzędnych. Jeden **nieruchomy układ współrzędnych** U - związany z używanym do opisu ruchu układem odniesienia (zwykle inercjalnym) - o początku w O i wersorach $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ i drugi **ruchomy układ współrzędnych** U' - związany z bryłą sztywną (poruszający się razem z nią) - o początku w O' i wersorach $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$.



Położenie bryły sztywnej (czyli położenie dowolnego jej punktu) jest określone przez podanie położenia układu U', czyli położenia $\vec{r}_0$ jego początku O' i trzech kątów określających orientacji osi układu $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$. Swobodna bryła sztywna ma więc 6 stopni swobody. Jako współrzędnych używamy zwykle wektora $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ opisującego ruch postępowy bryły sztywnej i trzech kątów Eulera ϑ, φ, ψ $[0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \psi \le 2\pi]$ opisujących jej ruch obrotowy wokół O'.



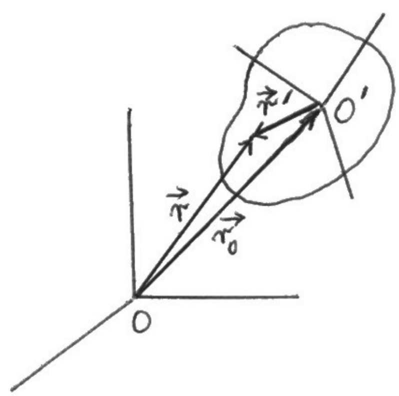
Z rysunku definiującego kąty Eulera widzimy, że ogólny obrót przeprowadzający osie układu U w osie układu U' jest złożeniem trzech obrotów składowych: obrotu o kąt φ wokół osi $\vec{e}_3$, obrotu o kąt ϑ wokół linii węzłów (o kierunku określonym przez wersor $\vec{w}$) i obrotu o kąt ψ wokół osi $\vec{e}_3'$ (zwrot osi węzłów wybieramy zgodnie ze zwrotem iloczynu wektorowego $\vec{e}_3 \times \vec{e}_3'$). I na odwrót: wersory układu U' przejdą w wersory układu U po obrocie będącym złożeniem trzech obrotów: o kąt $-\psi$ wokół $\vec{e}_3'$, o kąt $-\vartheta$ wokół osi $\vec{e}_1'$ i na koniec obrotu o kąt $-\varphi$ wokół $\vec{e}_3'$:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{pmatrix},$$

czyli

$$\boxed{\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & -\cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi & \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{pmatrix}.}$$

Pojawiająca się w tym równaniu $\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\vec{e}_j'$ macierz $\alpha_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j'$ jest ogólną parametryzacją macierzy ortogonalnej obrotu (pojawiającej się także w podrozdziale 1.1), opisującej wzajemną orientację wersorów rozważanych układów. W wierszach tej macierzy mamy współrzędne wersorów układu nieprimowanego U w układzie primowanym U', a w kolumnach współrzędne wersorów układu primowanego U' w układzie nieprimowanym U (macierzą odwrotną do macierzy ortogonalnej jest macierz trasponowana).



Położenia punktów bryły sztywnej w układzie U określa wzór $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$, czyli

$$\boxed{x_i(t) = x_{0i}(t) + \textstyle\sum_{j=1}^{3}(\vec{e}_i\vec{e}_j'(t))x_j' = x_{0i}(t) + \sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}(t))x_j',}$$

gdzie wektor $\vec{r}'$, reprezentowany w układzie primowanym przez stałe współrzędne (x_1', x_2', x_3'), numeruje poszczególne punkty bryły sztywnej ($\frac{d'\vec{r}'}{dt} = \vec{0}$).
Prędkości punktów bryły sztywnej w układzie U określa wzór (zob. podrozdzał 1.1):

$$\boxed{\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}',}$$

czyli jest sumą prędkości ruchu postępowego z prędkością $\vec{r}_0$ i ruchu obrotowego z prędkością kątową $\vec{\omega}$, gdzie

$$\boxed{\vec{\omega} \equiv \vec{e}_1'(\tfrac{d\vec{e}_2'}{dt}\vec{e}_3') + \vec{e}_2'(\tfrac{d\vec{e}_3'}{dt}\vec{e}_1') + \vec{e}_3'(\tfrac{d\vec{e}_1'}{dt}\vec{e}_2') = \omega_1'\vec{e}_1' + \omega_2'\vec{e}_2' + \omega_3'\vec{e}_3',}$$

czyli

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \omega'_1 & \equiv & \vec{e}'_1\vec{\omega} = \vec{e}'_3\frac{d\vec{e}'_2}{dt} = \alpha_{13}\frac{d\alpha_{12}}{dt} + \alpha_{23}\frac{d\alpha_{22}}{dt} + \alpha_{33}\frac{d\alpha_{32}}{dt} = ... = \cos\psi\dot{\vartheta} + \sin\vartheta\sin\psi\dot{\varphi}, \\ \omega'_2 & \equiv & \vec{e}'_2\vec{\omega} = \vec{e}'_1\frac{d\vec{e}'_3}{dt} = \alpha_{11}\frac{d\alpha_{13}}{dt} + \alpha_{21}\frac{d\alpha_{23}}{dt} + \alpha_{31}\frac{d\alpha_{33}}{dt} = ... = -\sin\psi\dot{\vartheta} + \sin\vartheta\cos\psi\dot{\varphi}, \\ \omega'_3 & \equiv & \vec{e}'_3\vec{\omega} = \vec{e}'_2\frac{d\vec{e}'_1}{dt} = \alpha_{12}\frac{d\alpha_{11}}{dt} + \alpha_{22}\frac{d\alpha_{21}}{dt} + \alpha_{32}\frac{d\alpha_{31}}{dt} = ... = \cos\vartheta\dot{\varphi} + \dot{\psi}. \end{array}}$$

W układzie primowanym mamy: $\vec{e}'_3 = (0, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = (\sin\vartheta\sin\psi, \sin\vartheta\cos\psi, \cos\vartheta)$, $\vec{w} = (\cos\psi, -\sin\psi, 0)$, czyli

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\vec{w} + \dot{\varphi}\vec{e}_3 + \dot{\psi}\vec{e}'_3}.$$

Prędkość kątowa bryły sztywnej jest więc po prostu sumą prędkości kątowych dla składowych obrotów przeprowadzających wersory układu U w U'.
Mniej przydatne współrzędne prędkości kątowej w układzie U wyrażają się wzorami:

$$\begin{array}{rcl} \omega_1 & \equiv & \vec{e}_1\vec{\omega} = \cos\varphi\,\dot{\vartheta} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\dot{\psi}, \\ \omega_2 & \equiv & \vec{e}_2\vec{\omega} = \sin\varphi\,\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\varphi\,\dot{\psi}, \\ \omega_3 & \equiv & \vec{e}_3\vec{\omega} = \dot{\varphi} + \cos\vartheta\,\dot{\psi}. \end{array}$$

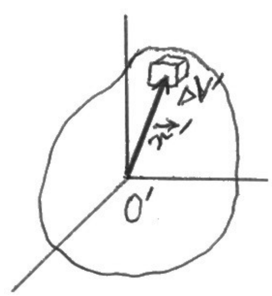
Przyspieszenia punktów bryły sztywnej w układzie U określa wzór:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{a}_0 + \vec{\gamma} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'),}$$

gdzie $\vec{a}_0 \equiv \frac{d\vec{v}_0}{dt}$ jest przyspieszeniem w ruchu postępowym bryły sztywnej, a $\vec{\gamma} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$ - przyspieszeniem kątowym w jej ruchu obrotowym.

2.2 Podstawowe wielkości dynamiczne bryły sztywnej

Bezwładność bryły sztywnej charakteryzuje 10 parametrów, podczas gdy dla punktu materialnego wystarczyl jeden - masa. Omówmy po kolei te parametry, definiując je w związanym z bryłą układzie U' (występujące niżej sumowania i całkowania należy wykonać po całej objętości bryły sztywnej).



Masa bryły sztywnej (skalar, czyli jeden parametr):

$$\boxed{M \equiv \sum \Delta m = \sum \rho\Delta V' = \int \rho(\vec{r}')dV'.}$$

Wektor położenia środka masy bryły sztywnej względem O' (3 parametry):

$$\boxed{\vec{R}' \equiv \frac{1}{M}\sum \Delta m\vec{r}' = \frac{1}{M}\int \rho(\vec{r}')\vec{r}'\,dV'.}$$

Tensor momentu bezwładności bryły sztywnej $\hat{I}'$ względem O':

$$\boxed{(\hat{I}')_{ik} \equiv I'_{ik} \equiv \int \rho(\vec{r}\,')(\vec{r}\,'^2\delta_{ik} - x'_i x'_k)dV'.}$$

Określona powyższym wzorem (w układzie primowanym U') macierz tensora momentu bezwładności jest macierzą symetryczną: $I'_{ik} = I'_{ki}$, czyli określa ją 6 parametrów: trzy momenty bezwładności (inercji) I'_i względem osi $\vec{e}\,'_i$ i trzy momenty zboczenia (dewiacji) D'_i względem osi $\vec{e}\,'_i$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$(\hat{I}') = \begin{pmatrix} I'_1 & -D'_3 & -D'_2 \\ -D'_3 & I'_2 & -D'_1 \\ -D'_2 & -D'_1 & I'_3 \end{pmatrix},$$

gdzie

$$I'_1 = \int \rho(x'^2_2 + x'^2_3)dV', \quad I'_2 = \int \rho(x'^2_3 + x'^2_1)dV', \quad I'_3 = \int \rho(x'^2_1 + x'^2_2)dV',$$
$$D'_1 = \int \rho x'_2 x'_3 dV', \quad D'_2 = \int \rho x'_3 x'_1 dV', \quad D'_3 = \int \rho x'_1 x'_2 dV'.$$

Moment bezwładności względem osi o kierunku wyznaczonym przez wersor $\vec{n}$, przechodzącej przez O', określa wzór

$$\boxed{I'_{\vec{n}} \equiv \vec{n}(\hat{I}'\vec{n}) = \sum_{ik} n'_i I'_{ik} n'_k = \int \rho \sum_{ik} n'_i n'_k (\vec{r}\,'^2\delta_{ik} - x'_i x'_k)dV' = \int \rho[\vec{r}\,'^2 - (\vec{r}\,'\vec{n})^2]dV' = \int \rho d^2 dV',}$$

gdzie d^2 jest kwadratem odległości punktu bryły sztywnej od osi o kierunku $\vec{n}$ przechodzącej przez O'. Znajomość tensora momentu bezwładności względem O' pozwala więc obliczyć moment bezwładności względem dowolnej osi przechodzącej przez O' przez proste mnożenie macierzy.
Co to jest tensor?
Przy obrocie układu współrzędnych danym przez macierz ortogonalną α_{ik}:
skalar (tensor zerowego rzędu) nie ulega zmianie: $f = f'$,
wektor (tensor pierwszego rzędu) przekształca się według wzoru $x_i = \sum_k \alpha_{ik} x'_k$,
tensor (drugiego rzędu) przekształca się według wzoru $A_{ij} = \sum_{kl} \alpha_{ik}\alpha_{jl} A'_{kl}$.
Łatwo sprawdzić, że wielkości I'_{ik} przekształcają się przy obrocie jak tensor.
Tensor momentu bezwładności jest tensorem symetrycznym i przez obrót układu można go zawsze zdiagonalizować. Osie układu współrzędnych, w którym tensor momentu bezwładności jest diagonalny, nazywa się **głównymi osiami bezwładnosci** bryły sztywnej, a elementy diagonalne w tym układzie - **głównymi momentami bezwładności** tej bryły. W układzie głównych osi bezwładności

$$(\hat{I}') = \begin{pmatrix} I'_1 & 0 & 0 \\ 0 & I'_2 & 0 \\ 0 & 0 & I'_3 \end{pmatrix}.$$

Przykład. Znamy już z wykładów fizyki główne momenty bezwładności względem środka masy S dla kilku prostych jednorodnych brył, a mianowicie dla:
prostopadłościanu o bokach a, b, c

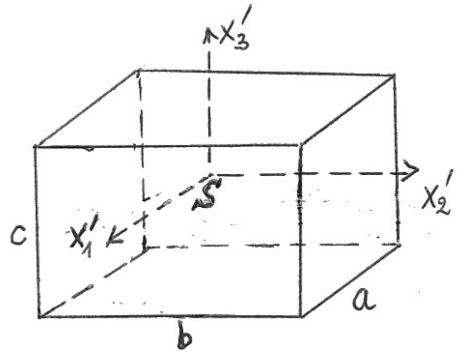
$$I_1^{(S)} = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2), \quad I_2^{(S)} = \frac{1}{12}M(c^2 + a^2), \quad I_3^{(S)} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2),$$

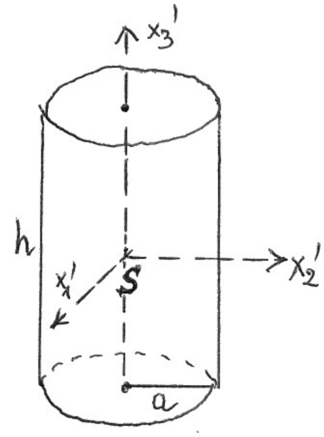
walca kołowego o promieniu a i wysokości h

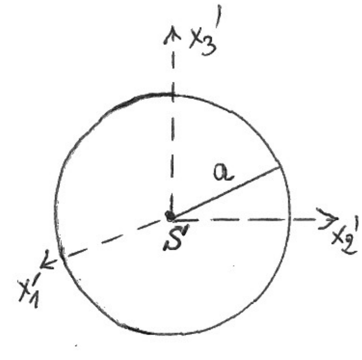
$$I_1^{(S)} = I_2^{(S)} = \frac{1}{12}M(3a^2 + h^2), \quad I_3^{(S)} = \frac{1}{2}Ma^2,$$

kuli o promieniu a

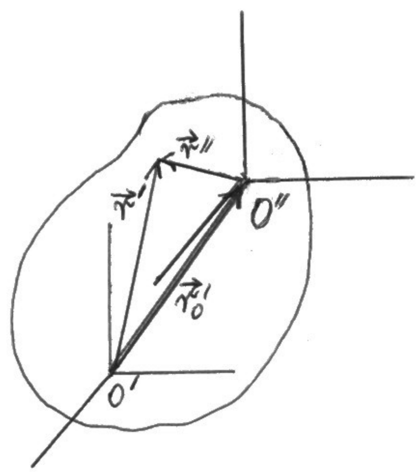
$$I_1^{(S)} = I_2^{(S)} = I_3^{(S)} = \frac{2}{5}Ma^2.$$







Bryłę, dla której przy obrocie wokół O' wszystkie trzy główne momenty bezwładności są różne, nazywa się bąkiem niesymetrycznym, gdy dwa z nich są równe - bąkiem symetrycznym, gdy wszystkie trzy sa równe - bąkiem kulistym. Przy obrocie wokół środka masy S bąkiem kulistym jest zarówno jednorodna kula jak i jednorodny sześcian.



Przy zmianie początku układu związanego z bryłą sztywną (bez zmiany kierunków osi układu) mamy $\vec{r}' = \vec{r}_0' + \vec{r}''$ i wtedy:

$$M \quad \text{nie ulega zmianie,}$$

$$\vec{R}' = \vec{r}_0' + \vec{R}'',$$

$$\boxed{\begin{aligned} I'_{ik} &= \int \rho[(\vec{r}_0' + \vec{r}'')^2\delta_{ik} - (x'_{0i} + x''_i)(x'_{0k} + x''_k)]dV' = \\ &= M(\vec{r}_0^{\,\prime 2} + 2\vec{r}_0'\vec{R}'')\delta_{ik} - M(x'_{0i}x'_{0k} + x'_{0i}X''_k + X''_i x'_{0k}) + I''_{ik}. \end{aligned}}$$

Ostatni wzór nosi nazwę twierdzenia Steinera. Jeśli obliczymy tensor momentu bezwładności względem początku jakiegoś układu związanego z bryłą sztywną, to z twierdzenia Steinera potrafimy w prosty sposób przeliczyć go na tensor momentu bezwładności względem początku O'' innego układu, a przy wykorzystaniu przekształceń tensora przy obrocie potrafimy uwzględnić także zmianę orientacji osi tego innego układu. Twierdzenie Steinera przyjmuje prostszą postać, gdy $O'' = S$ (układ U'' jest układem środka masy S), czyli $\vec{r}_0' = \vec{R}'$, $\vec{R}'' = \vec{0}$:

$$\boxed{I'_{ik} = M(\vec{R}'^2\delta_{ik} - X'_iX'_k) + I^{(S)}_{ik}.}$$

Dla momentu bezwładności względem osi $\vec{n}$ otrzymujemy wtedy:

$$\boxed{I'_{\vec{n}} = Md^2 + I^{(S)}_{\vec{n}},}$$

czyli moment bezwładności względem osi przechodzącej przez O' równa się momentowi bezwładności względem osi równoległej przechodzącej przez środek masy S powiększonemu o iloczyn masy bryły przez kwadrat odległości d tych osi (twierdzenie Steinera znane z fizyki).
Sprawdzimy teraz, że znając te 10 parametrów M, $\vec{R}'$, I'_{ik} potrafimy obliczyć pęd, moment pędu i energię kinetyczną bryły sztywnej, czyli jej podstawowe wielkości dynamiczne.
Pęd bryły sztywnej wynosi

$$\boxed{\vec{P} \equiv \sum \Delta m\vec{v} = \int \rho(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}')dV' = M(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{R}').}$$

Jeśli $O' = S$, czyli $\vec{r}_0 = \vec{R}$, $\vec{R}' = \vec{0}$, to

$$\boxed{\vec{P} = M\dot{\vec{R}}.}$$

Moment pędu bryły sztywnej względem O wynosi:

$$\begin{aligned}\vec{L} &\equiv \sum \Delta m(\vec{r} \times \vec{v}) = \sum \Delta m(\vec{r}_0 + \vec{r}') \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \\ &= M[\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \vec{R}' \times \vec{v}_0] + \sum \Delta m\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').\end{aligned}$$

Ponieważ $\sum \Delta m\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \sum \Delta m[\vec{r}'^2\vec{\omega} - \vec{r}'(\omega\vec{r}')] = \hat{I}'\vec{\omega}$, więc ostatecznie

$$\boxed{\vec{L} = M[\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \vec{R}' \times \vec{v}_0] + \hat{I}'\vec{\omega}.}$$

Jeśli $O' = S$, to wzór staje się prostszy

$$\boxed{\vec{L} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \hat{I}^{(S)}\vec{\omega} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}^{(S)},}$$

gdzie $\vec{L}^{(S)} = \hat{I}^{(S)}\vec{\omega}$ jest momentem pędu bryły względem jej środka masy. Moment pędu bryły sztywnej jest wtedy sumą momentu pędu dla ruchu postępowego środka masy i momentu pędu dla ruchu obrotowego względem środka masy.
Energia kinetyczna bryły sztywnej wynosi:

$$T \equiv \frac{1}{2}\sum \Delta m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\sum \Delta m(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = \frac{1}{2}M\vec{v}_0^2 + M\vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{R}') + \frac{1}{2}\sum \Delta m(\vec{\omega} \times \vec{r}')(\vec{\omega} \times \vec{r}').$$

Ponieważ ostatni człon jest równy $\frac{1}{2}\sum \Delta m\vec{\omega}[\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] = \frac{1}{2}\vec{\omega}(\hat{I}'\vec{\omega})$, więc ostatecznie

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}M\vec{v}_0^2 + M\vec{v}_0(\vec{\omega} \times \vec{R}') + \tfrac{1}{2}\vec{\omega}(\hat{I}'\vec{\omega}).}$$

Jeśli $O' = S$, to wzór staje się prostszy

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\vec{\omega}(\hat{I}^{(S)}\vec{\omega}).}$$

Energia kinetyczna bryły sztywnej jest wtedy energii kinetycznej dla ruchu postępowego środka masy i energii kinetycznej dla ruchu obrotowego względem środka masy (twierdzenie Königa).
Z powyższych wzorów na $\vec{P}$, $\vec{L}$, T widać, że w ogólnym wypadku warto wybierać początek O' układu U' związanego z bryła sztywną w jej środku masy S. Warto też zwrócić uwagę na inny korzystny wybór. Jeśli jeden z punktów bryły sztywnej jest nieruchomy, to początek O' układu U' związanego z bryłą sztywną warto wybrać w tym punkcie, gdyż w ten sposób cały ruch bryły sztywnej sprowadza się do ruchu obrotowego wokół tego punktu ($\vec{r}_0 = \vec{0}$, $\vec{v}_0 = \vec{0}$), a rozważane wielkości dynamiczne określają wzory:

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{\omega} \times \vec{R}', \quad \vec{L} = \hat{I}'\vec{\omega}, \quad T = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}(\hat{I}'\vec{\omega}).}$$

2.3 Równania ruchu bryły sztywnej

Rozważmy najpierw swobodną bryłę sztywną, czyli zdefiniowany wcześniej szczególny układ punktów materialnych o $f = 6$ stopniach swobody. Ruch bryły sztywnej jest złożeniem jej ruchu postępowego i obrotowego. Równania ruchu otrzymamy analizując zmianę w czasie pędu i momentu pędu bryły sztywnej:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},}$$

gdzie $\vec{F}$ i $\vec{M}$ są wypadkową siła zewnętrzną i wypadkowym momentem sił zewnętrznych (względem początku O stosowanego układu odniesienia, zwykle inercjalnego), działających na bryłę sztywną. Siły wewnętrzne dla bryły sztywnej są siłami reakcji dla więzów $f(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 - d_{ij}^2 = 0$ i dla więzów doskonałych ich wkład do sił reakcji jest postaci $\vec{F}_{Rij} = \lambda \mathrm{grad}_i f = 2\lambda(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Wkład od sił wewnętrznych zeruje się, gdyż siły wewnętrzne spełniają trzecią zasadę dynamiki i są centralne. Wykorzystując wyrażenia na $\vec{P}$ i $\vec{L}$, możemy wyprowadzić jawną postać tych równań:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}[M(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{R}')] = M[\vec{a}_0 + \vec{\gamma} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}')],$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}[M\vec{r}_0 \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{R}') + M\vec{R}' \times \vec{v}_0 + \hat{I}'\vec{\omega}] = \\ &= M\vec{r}_0 \times [\vec{a}_0 + \vec{\gamma} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}')] + M\vec{v}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') + M(\vec{\omega} \times \vec{R}') \times \vec{v}_0 + M\vec{R}' \times \vec{a}_0 \\ &+ \hat{I}'\vec{\gamma} + \vec{\omega} \times \hat{I}'\vec{\omega} = \vec{r}_0 \times \vec{F} + M\vec{R}' \times \vec{a}_0 + \hat{I}'\vec{\gamma} + \vec{\omega} \times \hat{I}'\vec{\omega}, \end{aligned}$$

czyli ostatecznie równania ruchu mają postać układu sprzężonych ze sobą równań:

$$\boxed{M(\vec{a}_0 + \vec{\gamma} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}')) = \vec{F},}$$

$$\boxed{M\vec{R}' \times \vec{a}_0 + \hat{I}'\vec{\gamma} + \vec{\omega} \times \hat{I}'\vec{\omega} = \vec{M}',}$$

gdzie $\vec{M}' = \vec{M} - \vec{r}_0 \times \vec{F} = \sum(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \Delta\vec{F} = \sum \vec{r}' \times \Delta\vec{F}$ jest wypadkowym momentem sił zewnętrznych względem początku O' układu odniesienia związanego z bryła sztywną. Niewiadomymi są $\vec{r}_0(t)$ i kąty Eulera $(\vartheta(t), \varphi(t)\, \psi(t))$, których pochodne $\vec{a}_0 \equiv \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}$, $\vec{\omega}$ i $\vec{\gamma} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$ występują w tych równaniach.
Jeśli $O' = S$, czyli $\vec{r}_0 = \vec{R}$, $\vec{R}' = \vec{0}$, to równania ruchu przyjmują prostszą postać:

$$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F},}$$

$$\boxed{\hat{I}^{(S)}\vec{\gamma} + \vec{\omega} \times \hat{I}^{(S)}\vec{\omega} = \vec{M}^{(S)}.}$$

Drugie równanie nosi nazwę równania Eulera dla ruchu obrotowego bryły sztywnej.
Jeśli na ruch bryły sztywnej nałożone są więzy, czyli bryła jest nieswobodna, to równania ruchu mają postać:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_R, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} + \vec{M}_R,}$$

$$+\,(\text{równania więzów}),$$

$$+\,(\text{dodatkowe informacje dla więzów niedoskonałych czy jednostronnych}),$$

gdzie $\vec{F}_R$ i $\vec{M}_R$ są wypadkowymi siłami reakcji więzów i momentami sił reakcji więzów nałożonych na bryłę sztywną.
W wypadku więzów holonomicznych doskonałych po wprowadzeniu współrzędnych uogólnionych zgodnych z więzami równania ruchu można zapisać w postaci równań Lagrange'a II rodzaju (z wyeliminowanymi siłami reakcji i momentami sił reakcji). Lagranżjan dla bryły sztywnej określa wzór $L = T - V$ lub ogólniej $L = T - U$.
Jeśli w czasie ruchu jakiś punkt bryły sztywnej jest nieruchomy i wybierzemy ten punkt jako $O' = O$, to ruch bryły sztywnej sprowadza się do ruchu obrotowego i jest opisywany przez równanie ruchu Eulera

$$\boxed{\hat{I}'\vec{\gamma} + \vec{\omega} \times \hat{I}'\vec{\omega} = \vec{M} + \vec{M}_R,}$$

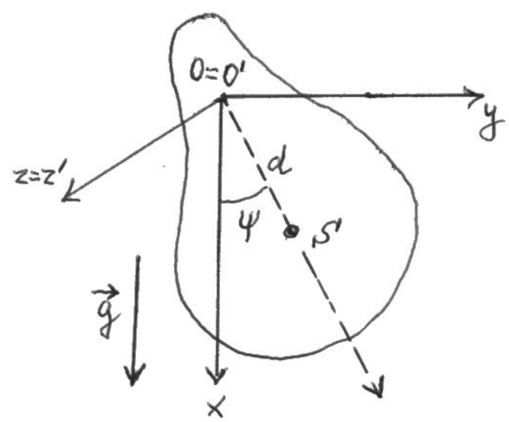
a równanie

$$\boxed{M\vec{\gamma} \times \vec{R}' + M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') = \vec{F} + \vec{F}_R}$$

pozwala wyznaczyć siłę reakcji $\vec{F}_R$.

2.4 Przykłady ruchu bryły sztywnej

Przykład 1. **Wahadło fizyczne płaskie**, czyli bryła sztywna obracająca się wokół nieruchomej poziomej osi w jednorodnym polu grawitacyjnym bez sił tarcia (więzy doskonałe).



Wybierając początki $O = O'$ układów na osi wahadła w płaszczyźnie pionowej zawierającej jego środek masy S, oś $Oz = Oz'$ wzdłuż osi wahadła, oś Ox' wzdłuż prostej $O'S$ i oś Ox w kierunku pionowym, równania więzów mają postać: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\vartheta = \varphi = 0$. Wahadło to ma jeden stopień swobody i współrzędną uogólnioną ψ. Wtedy $\vec{v}_0 = \vec{0}$, $\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}\,'_z, \vec{g} = g\vec{e}_x$ i

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}(\hat{I}'\vec{\omega}) = \frac{1}{2}I'_z\dot{\psi}^2,$$

$$V = -\sum \Delta m\vec{g}\vec{r} = -M\vec{g}\vec{R} = -Mgd\cos\psi,$$

$$L = \frac{1}{2}I'_z\dot{\psi}^2 + Mgd\cos\psi,$$

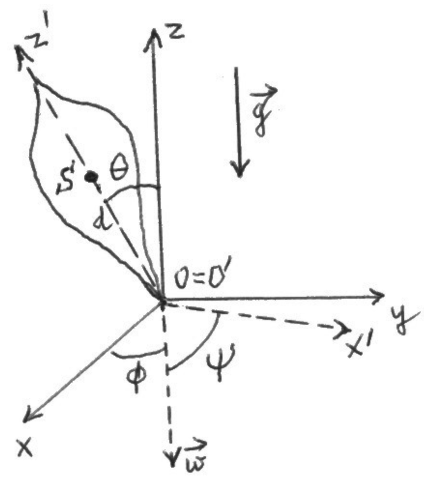
gdzie $I'_z \equiv \vec{e}\,'_z(\hat{I}'\vec{e}\,'_z)$ jest momentem bezwładności wahadła wokół jego osi obrotu, d - odległością środka masy S wahadła od jego osi obrotu.
Równanie ruchu ma postać

$$I'_z\ddot{\psi} + Mgd\sin\psi = 0, \quad \text{czyli} \quad \ddot{\psi} + \frac{Mgd}{I'_z}\sin\psi,$$

identyczną jak dla przeanalizowanego szczegółowo płaskiego wahadła matematycznego o długości $l = \frac{I'_z}{Md}$, zwanej długością zredukowaną wahadła fizycznego. Z twierdzenia Steinera $I'_z = Md^2 + I_z^{(S)}$ i stąd $l = d + \frac{I_z^{(S)}}{Md}$. Długość zredukowana wahadła, a stąd i okres jego drgań, osiąga minimum $l_{min} = 2\sqrt{\frac{I_z^{(S)}}{M}}$ dla $d = \sqrt{\frac{I_z^{(S)}}{M}}$.

Wypisane równanie ruchu odpowiada rzutowi równania $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} + \vec{M}_R$ na oś $\vec{e}_z = \vec{e}_z'$, gdyż $L_z = \vec{e}_z\vec{L} = I_z'\dot{\psi}$, $M_z = \vec{e}_z \sum(\vec{r} \times \Delta m\vec{g}) = M\vec{e}_z(\vec{R} \times \vec{g}) = -Mgd\sin\psi$, $M_{Rz} = \vec{e}_z \sum \vec{r} \times \Delta\vec{F}_R = \sum \Delta\vec{F}_R(\vec{e}_3 \times \vec{r}) = 0$, bo siły $\Delta\vec{F}_R$ przyłożone są do osi obrotu. Pozostałe pięć równań wyznacza wypadkową siłę reakcji $\vec{F}_R$ oraz pozostałe dwie składowe momentu sił reakcji $\vec{M}_R$.

Przykład 2. **Bąk symetryczny ciężki** z środkiem masy na osi symetrii tensora bezwładności bąka. Wybierzmy początek układu nieruchomego w punkcie podparcia bąka $O = O'$, oś Oz pionowo do góry ($\vec{g} = -g\vec{e}_3$) i oś $O'z'$ wzdłuż osi symetrii bąka ($\vec{R} = \vec{R}' = d\vec{e}_3'$). Bryła sztywna w tym ruchu ma trzy stopnie swobody i jako współrzędne uogólnione wybieramy kąty Eulera ϑ, φ i ψ.



Tensor momentu bezwładności względem O' ma postać:

$$(\hat{I}') = \begin{pmatrix} I_1' & 0 & 0 \\ 0 & I_1' & 0 \\ 0 & 0 & I_3' \end{pmatrix}.$$

i wykorzystując po drodze wzory na składowe $\vec{\omega}$ z podrozdziału 2.1, mamy:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\vec{\omega}(\hat{I}'\vec{\omega}) = \frac{1}{2}I_1'(\omega_1'^2 + \omega_2'^2) + \frac{1}{2}I_3'\omega_3'^2 = \\ &= \frac{1}{2}I_1'(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3'(\cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 \end{aligned}$$

$$V = -M\vec{g}\vec{R} = Mgd\cos\vartheta,$$

$$L = \frac{1}{2}I_1'(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3'(\cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 - Mgd\cos\vartheta.$$

Lagranżjan ten zawiera jako szczególny przypadek wahadło matematyczne sferyczne (jeśli $I_1' = Md^2$, $I_3' = 0$), a także bąk symetryczny swobodny (dla $g = 0$).

Równania ruchu są dość złożone - wykorzystajmy więc od razu zasady zachowania:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1'\sin^2\vartheta\dot{\varphi} + I_3'(\cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi})\cos\vartheta = const = L_3, \\ &\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3'(\cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = const = L_3', \\ &\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad T + V = \frac{1}{2}I_1'(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3'(\cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + Mgd\cos\vartheta = const = E, \end{aligned}$$

gdzie L_3 i L_3' są rzutami momentu pędu bryły sztywnej (względem $O = O'$) i E jest energią bryły sztywnej. Powiązane z cyklicznością kąta ψ zachowanie L_3' pojawia sie w związku z symetrią obrotową bryły względem osi z'.

Układ równań szóstego rzędu po uwzględnieniu tych trzech zasad zachowania redukuje się do układu trzech równań pierwszego rzędu, które po przekształceniach mają postać:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3 - L_3'\cos\vartheta}{I_1'\sin^2\vartheta},$$

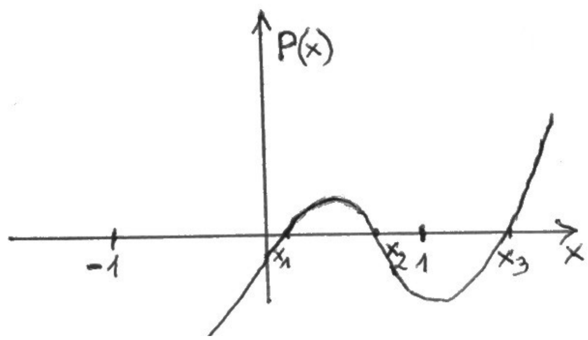
$$\dot\psi = \frac{L_3'}{I_3'} - \frac{(L_3 - L_3'\cos\vartheta)\cos\vartheta}{I_1'\sin^2\vartheta},$$

$$\frac{1}{2}I_1'\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\frac{(L_3 - L_3'\cos\vartheta)^2}{I_1'\sin^2\vartheta} + Mgd\cos\vartheta = E - \frac{L_3'^2}{2I_3'}.$$

Problem sprowadza się więc do kwadratur, czyli obliczenia trzech całek: z trzeciego równania otrzymujemy $\vartheta(t)$, a następnie z pierwszych dwóch równań możemy obliczyć $\varphi(t)$ i $\psi(t)$. Widzimy, że jeśli w ruchu bąka pojawia się precesja, czyli $\dot\varphi \neq 0$, to w efektywnym potencjale

$$V_{ef}(\vartheta) \equiv \frac{(L_3 - L_3'\cos\vartheta)^2}{2I_1'\sin^2\vartheta} + Mgd\cos\vartheta$$

pojawia się dodatkowy (pierwszy) człon, który powoduje, że mimo istnienia siły ciężkości bąk nie opada całkowicie (zjawisko to nazywamy zjawiskiem giroskopowym).



Przejdźmy więc do całkowania trzeciego równania. Wprowadzając nową zmienną $x \equiv \cos\vartheta$ i stałą $a \equiv 2I_1'(E - \frac{L_3'^2}{2I_3'})$, otrzymujemy:

$$t = \pm I_1' \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}},$$

gdzie $P(x) \equiv (a - 2MgdI_1'x)(1 - x^2) - (L_3 - L_3'x)^2$ jest wielomianem trzeciego stopnia w x i ruch występuje tylko dla $P(x) \geq 0$ (dla bąka swobodnego wynik jest prostszy, bo mamy wielomian drugiego stopnia). Ponieważ $P(\pm\infty) = \pm\infty$ oraz $P(\pm 1) = -(L_3 \mp L_3')^2 \leq 0$, więc w przedziale $[1, \infty)$ mamy przynajmniej jeden pierwiastek x_3 i w przedziale $[-1, 1]$ mamy dwa lub zero pierwiastków. Ruch jest możliwy tylko, jeśli w tym fizycznym przedziale są dwa pierwiastki x_1 i x_2, $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, przy czym pierwiastki te wyrażają się poprzez stałe parametry rozważanego układu. Zapisując $P(x) = 2MgdI_1'(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ i przyjmując warunek początkowy $x = x_1$ w $t = t_0$ otrzymujemy dla interesującego nas zakresu $x \leq x_2$ całkę:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{I_1'}{2Mgd}} \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}}.$$

Wprowadzając zamiast x nową zmienną α wzorem $x = x_1 + (x_2 - x_1)\sin^2\alpha$ (przedziałowi $[x_1, x_2]$ odpowiada $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), czyli podstawiając:

$$x - x_1 = (x_2 - x_1)\sin^2\alpha,$$

$$x - x_2 = (x_1 - x_2)\cos^2\alpha,$$

$$x - x_3 = (x_1 - x_3)(1 - k^2\sin^2\alpha),$$

$$dx = 2(x_2 - x_1)\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha,$$

gdzie $0 \leq k \equiv \sqrt{\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}} \leq 1$, otrzymujemy:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{2I_1'}{Mgd(x_3 - x_1)}} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2I_1'}{Mgd(x_3 - x_1)}} F(k, \alpha).$$

Ostatecznie mamy więc:

$$\cos\vartheta = x_1 + (x_2 - x_1)\mathrm{sn}^2\Big(k, \sqrt{\frac{Mgd(x_3 - x_1)}{2I_1'}}(t - t_0)\Big)$$

i okres drgań w kącie ϑ (nutacji) wynosi:

$$T_\vartheta = 2\sqrt{\frac{2I'_1}{Mgd(x_3 - x_1)}}K(k),$$

gdzie funkcje specjalne $F(k,\, \alpha)$, $K(k)$ i $\mathrm{sn}(k,\, y)$ to kolejno całka eliptyczna pierwszego rodzaju, całka eliptyczna zupełna pierwszego rodzaju i sinus eliptyczny Jacobiego (zob. podrozdział 1.10).
Znając $\vartheta(t)$, mamy do obliczenia kolejne całki, by wyznaczyć $\varphi(t)$ i $\psi(t)$. Ograniczając się do sytuacji, gdy $x_1 = x_2$, czyli ruchu ze stałym kątem $\vartheta = \arccos x_1 \equiv \vartheta_0$, otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0, \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{L_3 - L'_3 \cos\vartheta_0}{I'_1 \sin^2\vartheta_0}(t - t_0), \\ \psi &= \psi_0 + \Big[\frac{L'_3}{I'_3} - \frac{L_3 - L'_3\cos\vartheta_0}{I'_1 \sin^2\vartheta_0}\Big](t - t_0). \end{aligned}$$

Ruch ten nosi nazwę precesji regularnej - cechuje go brak nutacji i stałe prędkości kątowe precesji $\dot\varphi$ i obrotu własnego $\dot\psi$.
Na zakończenie zbadamy jedno szczególne rozwiązanie, odpowiadające osi symetrii bąka ustawionej stale pionowo, czyli $\vartheta = 0$. Wtedy $L_3 = L'_3 = I'_3(\dot\psi + \dot\varphi) \equiv I'_3\omega'_3$ i z równania odpowiadającego zachowaniu energii $\frac{1}{2}I'_3\omega'^2_3 + Mgd = E$ otrzymujemy $\omega'_3 = const$, czyli mamy **bąk drzemiący**. Zbadajmy trwałość ruchu przy małym wychyleniu bąka z położenia $\vartheta = 0$. Wtedy:

$$V_{ef}(\vartheta) = \frac{L'^2_3}{2I'_1}\frac{(1 - 1 + \frac{\vartheta^2}{2} + ...)^2}{\vartheta^2 + ...} + Mgd(1 - \frac{\vartheta^2}{2} + ...) = \frac{1}{2}(\frac{L'^2_3}{4I'_1} - Mgd)\vartheta^2 + Mgd,$$

czyli równowaga trwała występuje, jeśli $\frac{L'^2_3}{4I'_1} - Mgd > 0$, czyli $\omega'^2_3 > \frac{4I'_1 Mgd}{I'^2_3}$. Gdy w wyniku tarcia prędkość obrotu bąka zmaleje poniżej tej wartości, bąk się budzi (pojawia się nietrwałość ruchu).
Przykład 3. **Bąk swobodny**, czyli ruch obrotowy bryły wokół nieruchomego punktu O' przy $\vec{M}' = \vec{0}$.
Na Ziemi, w jednorodnym polu grawitacyjnym, bąk swobodny odpowiada umieszczeniu bryły w zawieszeniu Cardana z $O' = S$, gdyż wtedy $\vec{M}^{(S)} = M\vec{R}^{(S)} \times \vec{g} = \vec{0}$.
Wybierzmy początek układu nieruchomego w $O = O'$. Bryła ma 3 stopnie swobody i jako współrzędne uogólnione wybieramy kąty Eulera ϑ, φ, ψ. Równania ruchu $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ przyjmują postać równań ruchu Eulera:

$$\hat{I}'\frac{d'\vec\omega}{dt} + \vec\omega \times \hat{I}'\vec\omega = \vec{0}.$$

Wybierając osie układu primowanego wzdłuż osi głównych bezwładności, tensor momentu bezwładności jest diagonalny:

$$(\hat{I}') = \begin{pmatrix} I'_1 & 0 & 0 \\ 0 & I'_2 & 0 \\ 0 & 0 & I'_3 \end{pmatrix},$$

i równania ruchu Eulera w ogólnym wypadku mają postać:

$$\begin{aligned} I'_1\dot\omega'_1 + \omega'_2\omega'_3(I'_3 - I'_2) &= 0, \\ I'_2\dot\omega'_2 + \omega'_3\omega'_1(I'_1 - I'_3) &= 0, \\ I'_3\dot\omega'_3 + \omega'_1\omega'_2(I'_2 - I'_1) &= 0. \end{aligned}$$

Naszą analizę ruchu zaczniemy od dyskusji ruchów z przyspieszeniem kątowym $\vec\gamma = \frac{d'\vec\omega}{dt} = \vec{0}$, czyli $\vec\omega = \vec{const}$ zarówno względem układu związanego z bąkiem jak i układu nieruchomego. Z równań ruchu Eulera otrzymujemy wtedy warunek

$$\vec\omega \times \hat{I}'\vec\omega = \vec{0},$$

czyli

$$\hat{I}'\vec\omega = \lambda\vec\omega,$$

co oznacza, że ruch ze stałą prędkością kątową odbywa się tylko wtedy, gdy prędkość kątowa $\vec\omega$ jest skierowana wzdłuż jednej z osi głównych bezwładności.

Zbadajmy, czy ruch z $\omega_3' = \omega_0 = const$, $\omega_2' = \omega_1' = 0$ jest trwały, czyli czy przy małych zmianach prędkości kątowej będzie zachodził stale w otoczeniu tego ruchu. Oznaczając $\omega_3' = \omega_0 + \epsilon_3$, $\omega_1' = \epsilon_1$, $\omega_2' = \epsilon_2$ i rozwijając równania ruchu z dokładnością do wyrazów liniowych w małych ϵ, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_1'\dot\epsilon_1 + (I_3' - I_2')\omega_0\epsilon_2 &= 0, \\ I_2'\dot\epsilon_2 + (I_1' - I_3')\omega_0\epsilon_1 &= 0, \\ I_3'\dot\epsilon_3 &= 0. \end{aligned}$$

Stąd $\epsilon_3 = const$ (małe zaburzenie składowej ω_3 pozostaje małym zaburzeniem) i wstawiając do drugiego równania $\epsilon_2 = -\frac{I_1'}{(I_3'-I_2')\omega_0}\dot\epsilon_1$ wyznaczone z pierwszego równania, otrzymujemy:

$$\ddot\epsilon_1 + \frac{(I_1' - I_3')(I_2' - I_3')\omega_0^2}{I_2' I_1'}\epsilon_1 = 0.$$

Małe drgania dla ϵ_1 (i ϵ_2) występują, jeśli $\Omega^2 \equiv \frac{(I_1'-I_3')(I_2'-I_3')}{I_2'I_1'}\omega_0^2 > 0$, czyli $(I_1' - I_3')(I_2' - I_3') > 0$. Ruch z $\omega_3' = \omega_0$ będzie trwały, jeśli I_3' będzie najmniejszym lub największym momentem głównym bezwładności; ruch obrotowy wokół osi z pośrednim głównym momentem bezwładności nie będzie trwały.
Wróćmy obecnie do ogólnej analizy ruchu. Z równań ruchu Eulera musimy znaleźć $(\omega_1'(t), \omega_2'(t), \omega_3'(t))$, a następnie przy użyciu wzorów kinematycznych z podrozdziału 2.1 wyznaczyć $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Przy całkowaniu (nieliniowych) równań ruchu Eulera wygodnie jest wykorzystać zasady zachowania energii kinetycznej $T = \frac{1}{2}\vec\omega(\hat I'\vec\omega)$ i momentu pędu $\vec L = \hat I'\vec\omega$ względem O' (zob. podręcznik Rubinowicza i Królikowskiego).
Tutaj ograniczymy się tylko do analizy ruchu symetrycznego bąka swobodnego i wybierzemy oś z' wzdłuż jego osi symetrii. Dla symetrycznego bąka swobodnego zachowuje się moment pędu bąka $\vec L$ i wygodnie jest wybrać oś z wzdłuż tego stałego momentu pędu: $\vec L = L_3\vec e_3$. Dla bąka symetrycznego mamy $I_1' = I_2'$ i stąd z trzeciego równania Eulera $I_3'\dot\omega_3' = 0$ wynika $\omega_3' = const = \omega_{30}'$. Zachowuje się więc nie tylko L_3, lecz także $L_3' = I_3'\omega_{30}'$, a więc w czasie ruchu mamy $\vartheta = const = \vartheta_0$, gdyż $\cos\vartheta = L_3'/L_3 = const$. Zgodnie z wynikami otrzymanymi w takiej sytuacji dla symetrycznego bąka ciężkiego mamy obecnie

$$\dot\varphi = \frac{L_3 - L_3'\cos\vartheta}{I_1'\sin^2\vartheta} = \frac{L_3}{I_1'},$$

$$\dot\psi = \frac{L_3'}{I_3'} - \frac{(L_3 - L_3'\cos\vartheta)\cos\vartheta}{I_1'\sin^2\vartheta} = L_3\Big(\frac{1}{I_3'} - \frac{1}{I_1'}\Big)\cos\vartheta_0,$$

czyli

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{L_3}{I_1'}(t - t_0),$$

$$\psi = \psi_0 + L_3\Big(\frac{1}{I_3'} - \frac{1}{I_1'}\Big)\cos\vartheta_0(t - t_0).$$

Ogólny ruch bąka symetrycznego swobodnego odpowiada więc precesji regularnej wokół kierunku stałego momentu pędu, czyli jest złożeniem jednostajnej precesji osi symetrii bąka oraz jednostajnego obrotu wokół osi symetrii przy braku nutacji tej osi.