Zygmunt Ajduk

MECHANIKA KLASYCZNA

4 Mechanika relatywistyczna punktu materialnego

4.1 Pierwsza zasada dynamiki, przekształcenia Poincarégo i kinematyka

Podstawy mechaniki relatywistycznej stworzył w 1905 r. Albert Einstein, formułując szczególną teorię względności.

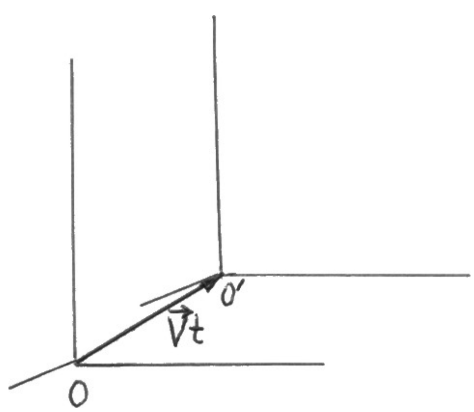
Pierwsza zasada dynamiki

Istnieją inercjalne układy odniesienia, czyli układy odniesienia, względem których odosobniony punkt materialny spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Sformułowanie zasady jest identyczne jak w mechanice nierelatywistycznej, ale związek między współrzędnymi zdarzeń (czasami i współrzędnymi kartezjańskimi położeń punktu materialnego) w różnych układach inercjalnych U' i U określa **przekształcenie Poincarégo zamiast przekształcenia Galileusza**:

$$\boxed{x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L^\mu{}_\nu x'^\nu + x_0^\mu,}$$

gdzie czterowektor $(x^\mu) = (ct, \vec{r})$ jest czterowektorem położenia w czasoprzestrzeni (składowa z $\mu = 0$ odpowiada czasowi pomnożonemu przez maksymalną prędkość obiektów materialnych, równą prędkości światła w próżni c, składowe z $\mu = 1, 2, 3$ odpowiadają współrzędnym wektora położenia $\vec{r}$).



Przekształcenia Poincarégo tworzą grupę dziesięcioparametrową i są złożeniem przesunięć w czasie i przestrzeni (4 parametry x_0^μ) i przekształceń Lorentza $(L^\mu{}_\nu)$, czyli obrotów w przestrzeni (trzy parametry, np. 3 kąty Eulera) i szczególnych przekształceń Lorentza (zamiast szczególnych przekształceń Galileusza, z trzema parametrami $\vec{V}$ określającymi stałą prędkość przesuwania się układu primowanego względem nieprimowanego). Szczególne przekształcenie Lorentza jest określone wzorami

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} ct &=& \frac{ct' + \frac{\vec{V}}{c}\vec{r}\,'_\parallel}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ \vec{r}_\parallel &=& \frac{\vec{r}\,'_\parallel + \frac{\vec{V}}{c}ct'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ \vec{r}_\perp &=& \vec{r}\,'_\perp, \end{array}\right.}$$

a przekształcenie odwrotne przyjmuje postać

$$\boxed{\begin{cases} ct' &= \frac{ct-\frac{\vec{V}}{c}\vec{r}_\parallel}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ \vec{r}_\parallel' &= \frac{\vec{r}_\parallel-\frac{\vec{V}}{c}ct}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ \vec{r}_\perp' &= \vec{r}_\perp, \end{cases}}$$

przy czym możliwe prędkości wzajemne w ruchu układów inercjalnych muszą spełniać warunek $V \equiv |\vec{V}| < c$. W powyższych wzorach wskaźniki $\parallel$ i $\perp$ oznaczają składową równoległą i składowe prostopadłe do prędkości $\vec{V}$. W granicy nierelatywistycznej $\frac{V}{c} \ll 1$ szczególne przekształcenie Lorentza przechodzi w szczególne przekształcenie Galileusza

$$\begin{cases} t &= t', \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{V}t. \end{cases}$$

1. Ogólnie, **czterowektorami** (czterotensorami pierwszego rzędu) nazywamy wielkości (a^μ), które przekształcają się przy przekształceniach Lorentza tak jak (x^μ), czyli zgodnie z wzorem:

$$\boxed{a^\mu = \sum_{\rho=0}^{3} L^\mu{}_\rho a'^\rho.}$$

Czteroskalarami (tensorami zerowego rzędu) nazywamy wielkości a, które nie ulegają zmianie przy transformacji Lorentza: $\boxed{a = a'}$.
Czterotensorami drugiego rzędu nazywamy wielkości $(a^{\mu\nu})$, które przekształcają się przy przekształceniach Lorentza zgodnie z wzorem:

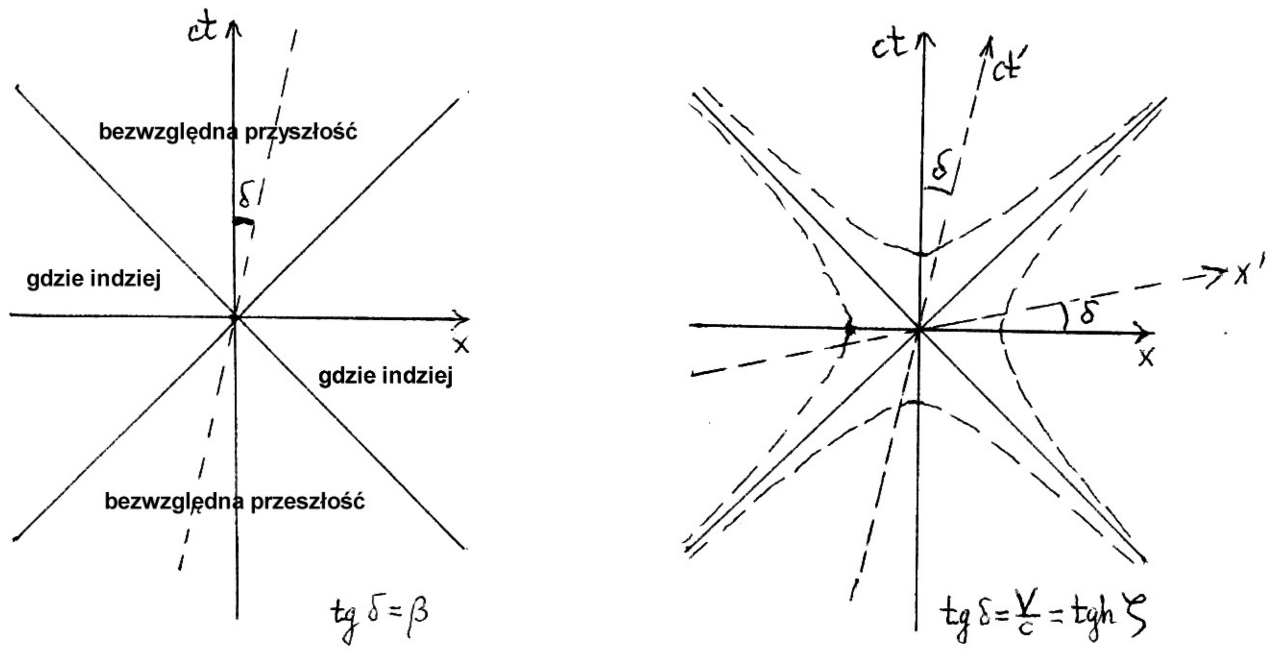
$$\boxed{a^{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma=0}^{3} L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma a'^{\rho\sigma}.}$$

2. **Przedział (interwał) czasoprzestrzenny** Δs, zdefiniowany wzorem $\boxed{(\Delta s)^2 \equiv c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\vec{r})^2}$, jest niezmiennikiem (czteroskalarem) przekształceń Poincarégo:

$$(\Delta s)^2 = \frac{(c\Delta t' + \frac{\vec{V}}{c}\Delta\vec{r}_\parallel')^2 - (\Delta\vec{r}_\parallel' + \frac{\vec{V}}{c}c\Delta t')^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} - (\Delta\vec{r}_\perp')^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta\vec{r}_\parallel')^2 - (\Delta\vec{r}_\perp')^2 = (\Delta s')^2,$$

a $|\Delta\vec{r}|$ i Δt nie są niezmiennikami tych przekształceń (ściślej podgrupy szczególnych przekształceń Lorentza). Przy przekształceniach Galileusza $|\Delta\vec{r}|$ i Δt były niezmiennikami. Odstęp czasu między dwoma zdarzeniami w tym samym punkcie przestrzennym w układzie U' (poruszającym się z prędkością V względem układu nieprimowanego U) jest większy w układzie nieruchomym U: $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ (**wydłużenie (dylatacja) czasu**), a długość pręta ustawionego w kierunku prędkości, z jaką układ U' porusza się względem U, jest krótsza niż długość pręta spoczywającego w U': $\Delta l = \Delta l'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ (**skrócenie (kontrakcja) długości**); odległości w kierunkach prostopadłych do prędkości nie ulegają zmianie. Przekształcenia Poincarégo możemy więc traktować jako grupę przekształceń izometrii w czasoprzestrzeni, przy czym przedział czasoprzestrzenny pełni rolę odległości czasoprzestrzennej. Inaczej niż przy standardowej definicji odległości nie jest to wielkość nieujemnie określona - geometrię związaną z taką odległością nazywamy geometrią

pseudoeuklidesową, gdyż w przeciwieństwie do geometrii euklidesowej wkłady do $(\Delta s)^2$ od odległości przestrzennych są ze znakiem minus (tę szczególną postać czterowymiarowej geometrii pseudoeuklidesowej nazywa się geometrią Minkowskiego). [1] Macierz $(L^{\mu}{}_{\nu})$ dla szczególnej transformacji Lorentza (zwanej też pchnięciem (ang. *boost*)) przypomina macierz "obrotu" w płaszczyźnie czasowo-przestrzennej, zwłaszcza po wprowadzeniu oznaczeń: $\cosh\zeta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\sinh\zeta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (parametr $\zeta \equiv \operatorname{ar\,tgh}\frac{v}{c}$, będący odpowiednikiem "kąta obrotu", nosi nazwę pospieszności (ang. *rapidity*)).
Ogólniej czteroskalarami są iloczyny "skalarne" $a^0b^0 - \vec{a}\vec{b}$ dowolnych czterowektorów (a^μ) i (b^μ). [2]
3. Przedział czasoprzestrzenny między dwoma zdarzeniami, dla którego $(\Delta s)^2 > 0$, nazywamy **przedziałem typu czasowego**, gdyż istnieje wtedy układ inercjalny U', w którym oba te zdarzenia zaszły w tym samym miejscu, ale w innym czasie, czyli $(\Delta s)^2 = c^2|\Delta t'|^2$. Przedział czasoprzestrzenny, dla którego $(\Delta s)^2 < 0$, nazywamy **przedziałem typu przestrzennego**, gdyż istnieje wtedy układ inercjalny U', w którym oba te zdarzenia zaszły jednocześnie, ale gdzie indziej (w różnych punktach przestrzennych), czyli $(\Delta s)^2 = -|\Delta\vec{r}'|^2$. Jeśli $(\Delta s)^2 = 0$, mówimy, że przedział czasoprzestrzenny jest **przedziałem typu zerowego** i wtedy w dowolnym układzie inercjalnym mamy $|\Delta\vec{r}'|^2 = c^2|\Delta t'|^2$.



Do przedstawienia relacji w czasie i przestrzeni dla dwóch zdarzeń wygodnie jest użyć **diagramu czasoprzestrzennego (diagramu Minkowskiego)**. Weźmy dowolne zdarzenie O i przyjmijmy je jako początek układu współrzędnych w czasoprzestrzeni w wybranym układzie inercjalnym U, czyli dla zdarzenia O mamy $t = 0$, $\vec{r} = \vec{0}$. Na osi odciętych odkładamy współrzędne położenia (dla uproszczenia jedną współrzędną x), a na osi rzędnych - czas zdarzenia, lub ściślej $x_0 = ct$. Trajektorię cząstki na tym wykresie nazywamy jej **linią świata**. Linią świata dla cząstki w ruchu jednostajnym prostoliniowym przechodzącym przez początek układu współrzędnych ($\vec{r} =$

[1] Niektórzy autorzy definiują $(\Delta s)^2$ z przeciwnymi znakami: $(\Delta s)^2 \equiv -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta\vec{r})^2$, gdyż taka definicja jest wygodniejsza przy rozważaniu teorii z liczbą wymiarów przestrzennych większą niż 3.

[2] Iloczyn skalarny czterowektorów a^μ i b^μ można zapisać w postaci bardziej przypominającej standardowy wzór $\sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu$, gdzie dla czterowektorów oprócz współrzędnych kontrawariantnych $(b^\mu) = (b^0, \vec{b})$ wprowadza się współrzędne kowariantne $(b_\mu) = (b^0, -\vec{b})$ i dla obliczenia iloczynu skalarnego należy zsumować iloczyny współrzędnych kontrawariantnych jednego czterowektora przez współrzędne kowariantne drugiego.

$\vec{v}t$) odpowiada linia prosta przechodząca przez O i nachylona do osi rzędnych x_0 pod kątem δ, którego tangens jest równy $\beta \equiv \frac{v}{c}$. Ponieważ największa możliwa prędkość cząstek wynosi c, to $\beta \leq 1$ i prosta ta musi leżeć wewnątrz lub na powierzchni stożka o półkącie rozwarcia równym $\pi/4$. Powierzchnia stożka zawiera proste odpowiadające ruchowi cząstek z prędkością c, czyli $\beta = 1$, i nosi dlatego nazwę **stożka świetlnego**. Dla zdarzeń na stożku świetlnym przedział czasoprzestrzeny względem zdarzenia O jest zerowy. Przedział czasoprzestrzenny względem O dla zdarzeń odpowiadających punktom wewnątrz stożka świetlnego jest typu czasowego, a dla zdarzeń poza stożkiem jest typu przestrzennego.
Ponieważ przy przekształceniach Lorentza wielkość $c^2t'^2 - \vec{r}'^2 = const$ (kwadrat przedziału czasoprzestrzennego rozważanego zdarzenia względem O jest niezmiennikiem), to współrzędne tego samego zdarzenia w różnych układach inercjalnych U' będą znajdować się na hiperboloidzie przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(ct, \vec{r})$ odpowiadający zdarzeniu w wyjściowym układzie U. Dla zdarzeń odpowiadających przedziałowi typu czasowego (leżacych wewnątrz stożka świetlnego) jest to hiperboloida dwupowłokowa, a w wypadku przedziału typu przestrzennego - hiperboloida jednopowłokowa. Jeśli przedział czasoprzestrzenny między dwoma zdarzeniami jest typu czasowego, to zdarzenia te nie mogą w żadnym inercjalnym układzie odniesienia zajść jednocześnie. Zdarzeniom wewnątrz górnego (przedniego) stożka świetlnego odpowiada $\Delta t > 0$ w stosunku do O i w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia także będzie $\Delta t' > 0$ - obszar ten odpowiada więc **bezwzględnej przyszłości** względem zdarzenia O. Analogicznie zdarzenia wewnątrz dolnego (tylnego) stożka świetlnego odpowiadają **bezwzględnej przeszłości** względem zdarzenia O. W obszarze poza stożkiem świetlnym znajdują się zdarzenia, których przedział czasoprzestrzenny względem zdarzenia O jest typu przestrzennego, czyli w dowolnym układzie odniesienia zdarzenia te zachodzą w różnych miejscach przestrzeni (**gdzie indziej**). Dla każdego zdarzenia z tego obszaru istnieją takie inercjalne układy odniesienia, w których zdarzenie to zachodzi albo przed zdarzeniem O, albo po zdarzeniu O, albo jednocześnie ze zdarzeniem O (następstwo czasowe jest tu względne, zależne od wyboru układu inercjalnego). **Związek przyczynowy** między zdarzeniem O i innym zdarzeniem może więc istnieć tylko wtedy, jeśli to zdarzenie znajduje się wewnątrz lub na stożku świetlnym o wierzchołku w O. Szczególna teoria względności zmienia wię topologię relacji czasowych zdarzeń w czasoprzestrzeni w stosunku do czasoprzestrzeni newtonowskiej, w której stożkowi bezwzględnej przyszłości względem O odpowiadała półprzestrzeń $t > 0$, stożkowi bezwzględnej przeszłości - półprzestrzeń $t < 0$, a obszar gdzie indziej redukował się do płaszczyzny $t = 0$ i odpowiadał zdarzeniom bezwzględnie jednoczesnym ze zdarzeniem O.
4. Prawo transformacyjne **prędkości** punktu materialnego $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ przy szczególnym przekształceniu Lorentza wynika bezpośrednio ze wzorów na szczególne przekształcenie Lorentza ($\vec{v}' \equiv \frac{d\vec{r}'}{dt'}$) i jest dość złożone:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} \vec{v}_{\parallel} & = & \frac{\vec{v}'_{\parallel}+\vec{V}}{1+\frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}}, \\ \vec{v}_{\perp} & = & \frac{\vec{v}'_{\perp}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}}, \end{array}\right.}$$

gdyż prędkość jest stosunkiem różniczek składowych przestrzennych czterowektora do różniczki jego składowej czasowej

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{d\vec{r}_{\parallel}}{dt} = \frac{d\vec{r}'_{\parallel} + \vec{V}dt'}{dt' + \frac{\vec{V}}{c^2}d\vec{r}'} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}},$$

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} = \frac{d\vec{r}'_{\perp}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{\vec{V}}{c^2}d\vec{r}'} = \frac{\vec{v}'_{\perp}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{\vec{v}'\vec{V}}{c^2}}.$$

Dla prędkości punktu materialnego (o masie $m \neq 0$) obowiązuje ograniczenie $v < c$ (identyczne jak dla prędkości ruchu układu inercjalnego $V < c$). Otrzymane prawo transformacyjne prędkości, czyli zarazem prawo składania prędkości, okazuje się być nieliniowe w przeciwieństwie do prawa transformacyjnego czterowektora (jak widzimy, prędkość $\vec{v}'$ pojawia się także w mianowniku). W granicy nierelatywistycznej, gdy $\frac{V}{c}, \frac{v'}{c} \ll 1$, otrzymujemy proste prawo transformacyjne dla przekształcenia Galileusza:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$$

Możemy łatwo sprawdzić, że to złożone prawo transformacyjne względem szczególnego przekształcenia Lorentza powoduje, że jeśli $v' = c$, to również $v = c$, czyli prędkość rozchodzenia się światła w próżni jest czteroskalarem, a więc jest taka sama we wszystkich układach nieinercjalnych (fakt ten, jako fakt doświadczalny, jest często wykorzystywany jako punkt wyjścia przy wyprowadzaniu szczególnego przekształcenia Lorentza).

Jeśli podczas ruchu w czasie dt punkt materialny przesuwa się o $d\vec{r}$, to możemy zdefiniować czteroskalar $d\tau \equiv \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$, zwany czasem własnym punktu materialnego, gdyż jest równy dt w układzie odniesienia, w którym punkt materialny spoczywa ($\vec{v} = \vec{0}$). Wygodnie jest wtedy wprowadzić inną miarę prędkości, a mianowicie czterowektor prędkości (**czteroprędkość**) $\boxed{u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}}$, którego prawo transformacyjne przy szczególnym przekształceniu Lorentza będzie liniowe: $u^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L^\mu{}_\nu u'^\nu$. Z definicji czteroprędkości wynika, że jej związek z $\vec{v}$ wyraża wzór:

$$\boxed{(u^\mu) = \Big(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\Big),}$$

czyli cztery składowe czteroprędkości wyrażają się przez trzy wielkości $\vec{v}$, albowiem "długość" czteroprędkości jest stała: $(u^0)^2 - \vec{u}^2 = c^2$.

5. Analogicznie, **czteroprzyspieszenie** $\boxed{b^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}}$ jest czterowektorem i jest liniowo transformującą się miarą zmiany prędkości, przy czym czteroprzyspieszenie jest "prostopadłe" do czteroprędkości: $u^0b^0 - \vec{u}\vec{b} = 0$, czyli $b^0 = \frac{\vec{v}}{c}\vec{b}$ (ogólnie: pochodna wektora o stałej długości jest prostopadła do wektora). Czteroprzyspieszenie (b^μ) wyraża się poprzez przyspieszenie $\vec{a}$ wzorem:

$$\boxed{(b^\mu) = \Big(\frac{\frac{\vec{v}}{c}\vec{a}}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}, \frac{\vec{a}(1 - \frac{v^2}{c^2}) + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}\vec{a})}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}\Big).}$$

Przykład. **"Paradoks" bliźniąt**

Rozważmy rakietę w ruchu harmonicznym $x = \frac{v_m}{\omega}(1 - \cos\omega t)$, startującą z Ziemi w $t = 0$ i powracającą w $T = \frac{2\pi}{\omega}$. W czasie ruchu $v_x = v_m \sin\omega t$, czyli v_m jest prędkością maksymalną rakiety w czasie ruchu. Czas własny, czyli czas jaki upłynął w układzie związanym z rakietą, wynosi:

$$\tau = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}\sin^2\omega t}dt = \frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}\sin^2\alpha}d\alpha = \frac{2}{\pi}E(\frac{v_m}{c})T,$$

gdzie dokonaliśmy podstawienia $\omega t = \alpha$ i $E(k) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha$ jest całką eliptyczną zupełną drugiego rodzaju (jej tablice są w Bronsztejnie). Stąd stosunek czasu τ upływającego w rakiecie do czasu T upływającego na Ziemi wynosi

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2}{\pi}E(\frac{v_m}{c})$$

i przyjmuje wartości od 1 dla $v_m \to 0$ do $\frac{2}{\pi} = 0,6366...$ dla $v_m \to c$, gdyż

$$E(0) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad E(1) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha = \sin\alpha|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Różnica czasu jest realna i nie ma tu żadnego paradoksu (paradoks pojawia się, gdy nie dostrzeżemy istotnej różnicy między (inercjalnym) układem odniesienia związanym z Ziemią i (nieinercjalnym) układem odniesienia związanym z rakietą). Do zagadnienia tego powrócimy w przykładzie 3 w podrozdziale 4.3.

4.2 Zasada względności Einsteina i druga zasada dynamiki

Zasada względności Einsteina
Prawa mechaniki (i innych działów fizyki) mają tę samą postać we wszyskich układach inercjalnych.
Powyższe sformułowanie jest identyczne jak zasady względności Galileusza, ale obecnie oznacza to postać niezmienniczą względem przekształceń Poincarégo zamiast przekształceń Galileusza.
Zasada względności Einsteina wymaga więc modyfikacji drugiej zasady dynamiki sformułowanej przez Newtona.
Druga zasada dynamiki:
W układzie inercjalnym iloczyn masy punktu materialnego m przez jego czteroprzyspieszenie $b^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ jest równe wypadkowej czterosile K^μ oddziaływania innych ciał na punkt materialny:

$$\boxed{m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu.}$$

Czterosiła jest relatywistyczną miarą oddziaływania, odpowiadającą w mechanice nierelatywistycznej zwykłej sile $\vec{F}$, przy czym z definicji musi być ona prostopadła do czteroprędkości punktu materialnego: $K^0u^0 - \vec{K}\vec{u} = 0$, czyli $K^0 = \frac{\vec{v}}{c}\vec{K}$. Powyższe sformułowanie drugiej zasady dynamiki jest zgodne z zasadą względności Einsteina, gdyż przy zmianie układu inercjalnego równe czterowektory przejdą w równe czterowektory: $m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu \quad \rightarrow \quad m\frac{d^2x'^\mu}{d\tau^2} = K'^\mu$ (masa punktu materialnego jest czteroskalarem).
Często relatywistyczne równanie ruchu zapisuje się przy użyciu **czteropędu**. Czteropędem punktu materialnego jest iloczyn jego masy i czteroprędkości: $\boxed{p^\mu = mu^\mu}$, czyli

$$\boxed{(p^\mu) = \Big(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big),}$$

przy czym $(p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$.
Relatywistyczne równanie ruchu można więc zapisać w postaci równania opisującego zmianę czteropędu punktu materialnego

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu.}$$

Dla składowych przestrzennych mamy obecnie:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \equiv \vec{F},$$

czyli otrzymujemy postać podobną jak w mechanice nierelatywistycznej, ale w mechanice relatywistycznej pęd określony jest teraz wzorem $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ i siła $\vec{F} = \vec{K}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Czasowa (zerowa) składowa równania ruchu przyjmuje postać:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = K^0 = \frac{\vec{v}}{c}\vec{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big) = \vec{F}\vec{v},$$

czyli wiąże zmianę relatywistycznej energii punktu materialnego $\boxed{E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = cp^0}$, będącej sumą energii spoczynkowej punktu materialnego mc^2 i jego energii kinetycznej $T \equiv E - mc^2 = mc^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1)$, z mocą działających sił. Jeśli punkt materialny ma prędkość $v < c$, to zawsze będzie miał $v < c$, gdyż uzyskanie prędkości c wymagałoby wykonania nieskończonej pracy.
Samo prawo zmiany energii punktu materialnego nie jest niezależnym równaniem, gdyż można je wyprowadzić z równania $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Warto jednak zauważyć, że zerowa składowa czteropędu p^0 jest równa energii relatywistycznej E (energii kinetycznej uzupełnionej energią spoczynkową) podzielonej przez stałą c i dlatego czteropęd nazywamy nieraz wektorem energii-pędu. Ze wzoru $(p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$ wynika, że $E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$. W granicy nierelatywistycznej ($\frac{v}{c} \ll 1$) otrzymujemy: $\vec{p} = m\vec{v}$, $T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Nierelatywistyczny wzór $\vec{p} = m\vec{v}$ w mechanice relatywistycznej ma postać $\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$ i dlatego dawniej wprowadzano nieraz pojęcie masy relatywistycznej $m_r = \frac{E}{c^2}$ jako równoważnej miary energii relatywistycznej. Warto zwrócić uwagę, że w mechanice relatywistycznej nie mamy zasady zachowania masy. Nierelatywistyczne prawo zachowania masy dla układu punktów materialnych otrzymujemy w granicy nierelatywistycznej z relatywistycznej zasady zachowania energii, dla której w granicy nierelatywistycznej dominuje wkład od energii spoczynkowej mc^2 punktów materialnych.
Na zakończenie należy dodać, że w mechanice relatywistycznej nie ma miejsca dla **trzeciej zasady dynamiki**. Trzecia zasada dynamiki w mechanice nierelatywistycznej korzystała z faktu, że prędkość rozchodzenia się oddziaływań można było uważać za nieskończoną - zmianie położenia ciała towarzyszyła natychmiastowa zmiana siły oddziaływania nawet na znajdujący się w dużej odległości punkt materialny. W mechanice relatywistycznej przy ruchu z dużą prędkością nie można uważać prędkości rozchodzenia się oddziaływań za nieskończoną, gdyż również ona jest ograniczona przez prędkość maksymalną c. Fakt ten prowadzi nas również do wniosku, że w teorii relatywistycznej nie można wprowadzić pojęcia bryły sztywnej, gdyż skończona prędkość rozchodzenia się oddziaływań jest sprzeczna ze stałością odległości odległych punktów bryły sztywnej. Mimo braku trzeciej zasady dynamiki dla układu izolowanego zachodzi zasada zachowania pędu, ale w bilansie pędu trzeba oprócz pędów ciał uwzględnić pęd pola związanego z oddziaływaniem, np. pola elektromagnetycznego.

4.3 Przykłady ruchu punktu materialnego

Analiza ruchu w mechanice relatywistycznej wymaga określenia czterosiły. W fizyce makroskopowej (klasycznej) w otaczającym nas świecie istnieją dwa typy oddziaływań: grawitacyjne i elektromagnetyczne. Relatywistyczną teorią oddziaływań grawitacyjnych jest ogólna teoria względności, sformułowana przez A. Einsteina w 1916 r. Teoria ta jest relatywistycznym uogólnieniem newtonowskiego prawa powszechnego ciążenia i będzie tematem specjalnego wykładu z ogólnej teorii względności. Ograniczymy się więc głównie do analizy ruchu naładowanego elektrycznie punktu materialnego (cząstki) w polu elektromagnetycznym. Równania Maxwella (1864) opisujące oddziaływania elektromagnetyczne okazały się od razu zgodne z zasadą względności Einsteina i były pierwszą relatywistyczną teorią fizyczną, choć w pełni uświadomił nam to A. Einstein w 1905 r. w szczególnej teorii względności. W notacji relatywistycznej potencjały elektromagnetyczne ϕ i $\vec{A}$ są składowymi czteropotencjału elektromagnetycznego $(A^\mu) = (\frac{\phi}{c}, \vec{A})$, a natężenia pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$ są składowymi antysymetrycznego czterotensora pola elektromagnetycznego, będącego czterorotacją czteropotencjału elektromagnetycznego:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}}$$

(jest to relatywistyczny zapis znanych nam wzorów: $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$), gdzie

$$\boxed{(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}}.$$

Czterosiła oddziaływania elektromagnetycznego na cząstkę o ładunku q i czteroprędkości $(u^\nu) = \frac{dx^\nu}{d\tau}$ określa wzór Lorentza

$$\boxed{K^\mu = q\sum_{\nu=0}^{3} F^{\mu\nu}u_\nu}, \text{ gdzie } (u_\nu) \equiv (u^0, -\vec{u}) = (\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}),$$

czyli

$$K^0 = \frac{q\vec{E}\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{K} = \frac{q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

co odpowiada

$$K^0 = \frac{\vec{v}}{c}\vec{K},\ \vec{K} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ gdzie } \vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}).$$

Łatwo dostrzec, że tak zdefiniowana czterosiła jest rzeczywiście prostopadła do czteroprędkości. Przejdźmy obecnie do relatywistycznego równania ruchu:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big) = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}),\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big) = q\vec{E}\vec{v}, \text{ gdzie } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Równania te nawet w stałych polach elektromagnetycznych są nieliniowymi równaniami drugiego rzędu na położenie $\vec{r}(t)$, które jest trudno rozwiązywać. Można je znacznie uprościć po wprowadzeniu czasu własnego $d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt$, bowiem po podzieleniu równań ruchu przez $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ możemy zapisać je w postaci:

$$\boxed{\begin{cases} m\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} &= q(\vec{E}\frac{dt}{d\tau} + \frac{d\vec{r}}{d\tau}\times\vec{B}), \\ mc^2\frac{d^2t}{d\tau^2} &= q\vec{E}\frac{d\vec{r}}{d\tau}. \end{cases}}$$

Otrzymane równania w wypadku cząstki w stałym polu elektromagnetycznym są równaniami liniowymi dla $\vec{r}(\tau)$ i $t(\tau)$ i będziemy mogli je łatwo rozwiązać. Z drugiej strony ta prosta postać równań ruchu jest bezpośrednim jawnym zapisem wyjściowej postaci równania ruchu z drugiej zasady dynamiki:

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = q\sum_{\nu=0}^{3} F^{\mu\nu}\frac{dx_\nu}{d\tau}, \text{ gdzie } (x_\nu) = (ct, -\vec{r}).$$

Przykład 1.

Relatywistyczny ruch cząstki o masie m i ładunku q w stałym polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$.
Równania ruchu przyjmują postać sprzężonych ze sobą równań:

$$\begin{cases} m\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} &= q\vec{E}\frac{dt}{d\tau}, \\ mc^2\frac{d^2t}{d\tau^2} &= q\vec{E}\frac{d\vec{r}}{d\tau}, \end{cases}$$

gdzie w chwili początkowej $\tau = 0$ mamy $t(\tau=0) = 0$, $\vec{r}(\tau=0) = \vec{r}_0$ oraz $\frac{dt}{d\tau}(\tau=0) = \frac{E_0}{mc^2}$, $\frac{d\vec{r}}{d\tau}(\tau=0) = \frac{\vec{p}_0}{m}$ oraz $E_0 = \sqrt{\vec{p}_0^2 c^2 + m^2c^4}$.

Wybierając początek układu O w położeniu początkowym $\vec{r}_0$, oś Oz wzdłuż natężenia pola $\vec{E}$ i oś Ox tak, by w płaszczyźnie Oxz leżał pęd $\vec{p}_0$, mamy $\vec{r_0} = (0,0,0)$, $\vec{E} = (0,0,E)$, $\vec{p_0} = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{d\tau^2} &= 0, \\ m\frac{d^2y}{d\tau^2} &= 0, \\ m\frac{d^2z}{d\tau^2} &= qE\frac{dt}{d\tau}, \\ mc^2\frac{d^2t}{d\tau^2} &= qE\frac{dz}{d\tau}. \end{cases}$$

Ogólne rozwiązanie pierwszych dwóch równań

$$x = A_1\tau + B_1,\ y = A_2\tau + B_2$$

po uwzględnieniu warunków początkowych przyjmuje postać

$$x = \frac{p_{0x}}{m}\tau,\ y = 0,$$

czyli ruch jest płaski i zachodzi w płaszczyźnie wyznaczonej przez $\vec{E}$ i $\vec{p}_0$. Z trzeciego równania widzimy, że $|p_z| = |m\frac{dz}{d\tau}|$ wzrasta stale w czasie, gdyż $|q|E\frac{dt}{d\tau} > 0$, i możemy bez utraty ogólności cofnąć się do takiej chwili początkowej, aby $p_{0z} = 0$. Całkując jednokrotnie trzecie i czwarte równanie, otrzymujemy:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{qE}{m}t, \quad \frac{dt}{d\tau} - \frac{E_0}{mc^2} = \frac{qE}{mc^2}z,$$

gdzie $E_0 = \sqrt{m^2c^4 + p_{0x}^2c^2}$. Stąd

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} - \frac{q^2E^2}{m^2c^2}z = \frac{qEE_0}{m^2c^2},$$

czyli

$$\begin{aligned} z &= -\frac{E_0}{qE} + A\cosh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right) + B\sinh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right), \\ ct &= A\sinh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right) + B\cosh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right). \end{aligned}$$

Po podstawieniu warunków początkowych w $\tau = 0$ otrzymujemy $A = \frac{E_0}{qE}$, $B = 0$, czyli

$$\begin{cases} x &= \frac{p_{0x}}{m}\tau, \\ y &= 0, \\ z &= \frac{E_0}{qE}\left(\cosh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right) - 1\right), \\ t &= \frac{E_0}{qEc}\sinh\left(\frac{qE\tau}{mc}\right). \end{cases}$$

Stąd $\tau = \frac{mc}{qE}\mathrm{arsinh}\left(\frac{qEct}{E_0}\right)$ i ostatecznie

$$\begin{cases} x &= \frac{p_{0x}c}{qE}\mathrm{arsinh}\left(\frac{qEct}{E_0}\right), \\ y &= 0, \\ z &= \frac{E_0}{qE}\left(\sqrt{1 + \frac{q^2E^2c^2t^2}{E_0^2}} - 1\right), \end{cases}$$

gdyż $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$. Torem ruchu jest linia łańcuchowa

$$z = \frac{E_0}{qE}\left(\cosh\left(\frac{qE}{p_{0x}c}x\right) - 1\right).$$

Obliczmy obecnie prędkość cząstki

$$\begin{cases} v_x &= \frac{dx}{dt} = c\,\frac{p_{0x}c}{E_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2E^2c^2t^2}{E_0^2}}} \to 0 \quad \text{przy}\, t\to\infty, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 0, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = c\,\frac{\frac{qEct}{E_0}}{\sqrt{1+\frac{q^2E^2c^2t^2}{E_0^2}}} \to c \quad \text{przy}\, t\to\infty. \end{cases}$$

Dla małych czasów i małej prędkości początkowej, gdy $\frac{qEct}{E_0} \ll 1$, $E_0 \approx mc^2$, otrzymujemy wzory znane nam dobrze z mechaniki nierelatywistycznej:

$$\begin{cases} x &\approx \frac{p_{0x}c}{qE}\frac{qEct}{mc^2} = \frac{p_{0x}}{m}t, \\ y &= 0, \\ z &\approx \frac{mc^2}{qE}\frac{1}{2}\frac{q^2E^2c^2t^2}{m^2c^4} = \frac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$$

oraz paraboliczne równanie toru

$$z \approx \frac{mc^2}{qE}\frac{q^2E^2x^2}{2p_{0x}^2c^2} = \frac{qEm}{2p_{0x}^2}x^2.$$

Przykład 2.

Relatywistyczny ruch cząstki o masie m i ładunku q w stałym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$.

Równania ruchu

$$\begin{cases} m\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} &= q\frac{d\vec{r}}{d\tau}\times\vec{B}, \\ mc^2\frac{d^2t}{d\tau^2} &= 0 \end{cases}$$

uzupełniamy warunkami początkowymi dla $\tau = 0$: $t(\tau=0) = 0$, $\vec{r}(\tau=0) = \vec{r}_0$, $\frac{dt}{d\tau}(\tau=0) = \frac{E_0}{mc^2}$, $\frac{d\vec{r}}{d\tau}(\tau=0) = \frac{\vec{p}_0}{m}$. Wybierając początek układu współrzędnych O w położeniu początkowym $\vec{r}_0$, oś Oz wzdłuż indukcji $\vec{B}$, oś Ox tak, by pęd początkowy $\vec{p}_0$ leżał w płaszczyźnie Oxz, mamy: $\vec{r}_0 = (0,0,0)$, $\vec{B} = (0,0,B)$, $\vec{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$, gdzie $E_0 = \sqrt{(p_{0x}^2+p_{0z}^2)c^2+m^2c^4}$ i równania ruchu przyjmują postać:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{qB}{m}\frac{dy}{d\tau}, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\frac{qB}{m}\frac{dx}{d\tau}, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} &= 0, \\ \frac{d^2t}{d\tau^2} &= 0. \end{cases}$$

Ostatnie równanie oznacza, że $\frac{dt}{d\tau} = const = \frac{E_0}{mc^2}$, czyli w czasie ruchu zachowuje się energia relatywistyczna cząstki (energia ta jest stale równa E_0). Stąd $t = \frac{E_0}{mc^2}\tau$ i podobnie $z = \frac{p_{0z}}{m}\tau$. Wprowadzając zmienną $\zeta = x+iy$, możemy dwa pierwsze równania zapisać w postaci

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + i\frac{qB}{m}\frac{d\zeta}{d\tau} = 0.$$

Ogólne rozwiązanie tego równania $\zeta = C + De^{-i\frac{qB\tau}{m}}$ po podstawieniu warunków początkowych prowadzi do $D = -C = i\frac{p_{0x}}{qB}$, czyli ostatecznie

$$\begin{cases} x &= \frac{p_{0x}}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right), \\ y &= \frac{p_{0x}}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right)-1\right), \\ z &= \frac{p_{0z}}{m}\tau, \\ t &= \frac{E_0}{mc^2}\tau \end{cases}$$

Po wyeliminowaniu czasu własnego ruch cząstki jest opisany wzorami:

$$\begin{cases} x &= \frac{p_{0x}}{qB}\sin\left(\frac{qBc^2}{E_0}t\right), \\ y &= \frac{p_{0x}}{qB}\left(\cos\left(\frac{qBc^2}{E_0}t\right)-1\right), \\ z &= \frac{p_{0z}c^2}{E_0}t, \end{cases}$$

Ruch odbywa się więc po linii śrubowej. Rzutem toru na płaszczyznę prostopadłą do indukcji $\vec{B}$ jest okrąg o promieniu $\frac{p_{0x}}{qB}$ przechodzący przez początek układu współrzędnych:

$$x^2 + \left(y + \frac{p_{0x}}{qB}\right)^2 = \left(\frac{p_{0x}}{qB}\right)^2$$

Częstość obiegu cząstki po okręgu, równa $\frac{qBc^2}{E_0}$, zależy od energii cząstki E_0 i w granicy nierelatywistycznej ($E_0 \approx mc^2$) jest równa częstości cyklotronowej $\frac{qB}{m}$. Zależność częstości od energii przyspieszanej cząstki doprowadziła do tego, że akceleratorami kołowymi cząstek przyspieszanych do wysokiej energii stały się synchrocyklotrony zamiast cyklotronów.

Przykłady ruchu w stałych równoległych polach elektrycznym i magnetycznym oraz w stałych prostopadłych polach elektrycznym i magnetycznym z $E = cB$ będą omówione na ćwiczeniach. Okazuje się, że dowolne stałe pole elektromagnetyczne przez odpowiedni wybór układu inercjalnego można sprowadzić do wymienionych wyżej czterech przypadków. Gdy pola elektryczne $\vec{E}$ i magnetyczne $\vec{B}$ nie są prostopadłe, to przez odpowiedni wybór układu inercjalnego można je zawsze sprowadzić do pól równoległych. Gdy pola elektryczne i magnetyczne są prostopadłe i $E \neq cB$, to przez odpowiedni wybór układu inercjalnego można je zawsze sprowadzić do czystego pola elektrycznego (gdy $E > cB$) lub do czystego pola magnetycznego (gdy $E < cB$).

Przykład 3.

Podróż w przestrzeni kosmicznej

Rozważymy podróż przy założeniu, że w układzie związanym ze statkiem kosmicznym przyspieszenie statku jest stałe i równe (ze względów medycznych) przyspieszeniu ziemskiemu $g = 9,81$ m/s^2, czyli $(b'_\mu) = (0, \vec{g})$ (założymy także dla uproszczenia stałą masę statku). Jeśli względem układu inercjalnego związanego z Ziemią statek porusza się z prędkością $\vec{v} \parallel \vec{g}$, to w układzie związanym z Ziemią czteroprzyspieszenie wynosi

$$(b_\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{\vec{v}}{c}\vec{g},\, \vec{g}\right)$$

Wybierając oś z tak, by $\vec{g} = g\vec{e}_z$, równanie ruchu dla statku startującego z Ziemi ($z = 0$) w chwili $t = \tau = 0$ pokrywa się wtedy z równaniem w przykładzie 1, jeśli zastąpimy w nim $\frac{qE}{m} \to g$, $E_0 \to mc^2$ i $p_{0x} \to 0$. Ruch statku będzie więc jednowymiarowy i położenie statku w zależności od czasu własnego kosmonauty τ czy czasu ziemskiego t będzie określone wzorami

$$z = \frac{c^2}{g}\left(\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1\right) \quad \text{lub } z = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{c^2}t^2} - 1\right),$$

gdyż

$$t = \frac{c}{g}\sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right).$$

Po podstawieniu wartości stałych c i g i użyciu do obliczeń czasu w latach [y] i odległości w latach świetlnych [ly] otrzymujemy

$$t = 0,968\sinh\left(\frac{\tau}{0,968}\right), \quad z = 0,968\left(\cosh\left(\frac{\tau}{0,968}\right) - 1\right).$$

Wyniki liczbowe przedstawiamy w tabeli.

τ [y]	t [y]	z [ly]
0	0	0
1	$1,2$	$0,56$
5	85	83
10	$1,5\cdot 10^4$	$1,5\cdot 10^4$
15	$2,6\cdot 10^6$	$2,6\cdot 10^6$
20	$4,5\cdot 10^8$	$4,5\cdot 10^8$
25	$8,0\cdot 10^{10}$	$8,0\cdot 10^{10}$

Podróż do najbliższej gwiazdy α *Centauri* ($4,36$ ly) zajęłaby kosmonautom $2,3$ y, do środka naszej Galaktyki ($2,6\cdot 10^4$ ly) - $10,5$ y, do najbliższej galaktyki Andromedy ($2,5\cdot 10^6$ ly) - 15 y, a do obecnych granic Wszechświata ($14\cdot 10^9$ ly) - $23,3$ y - podany czas τ odpowiada czasowi własnemu kosmonautów, upływ czasu t na Ziemi byłby o rzędy wielkości większy. Różnica między τ i t (związana z "paradoksem" bliźniąt) wskazuje, jak istotne znaczenie mogłaby mieć szczególna teoria względności dla realizacji długich podróży kosmicznych. Oczywiście, obliczenia te pozwalają nam tylko zorientować się w rzędach wielkości, gdyż w rzeczywistości utrzymanie stałego przyspieszenia byłoby możliwe przez dość krótki czas (w tej skali) i dalsza podróż odbywałaby się już ze stałą prędkością (mniejszą wyraźnie od prędkości światła), powodując znaczne wydłużenie czasu podróży i praktycznie brak różnicy czasu związanej z paradoksem bliźniąt. Gdyby w przyszłości udało się do napędu użyć np. reaktora termojądrowego i uzyskać prędkość końcową $50\,000$ km/s, to podróż do najbliższej gwiazdy α *Centauri* trwałaby $\tau\approx t\approx 26$ y ($\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx 0,986$). Przy prędkości końcowej 20 km/s, odpowiadającej obecnie stosowanym rakietom o napędzie chemicznym (np. z paliwem wodorowo-tlenowym), czas takiej podróży wynosiłby $\tau\approx t\approx 65\,000$ y.

Przykład 4.

Relatywistyczny ruch rakiety w przestrzeni kosmicznej

Znajdźmy prędkość, jaką może uzyskać rakieta w wyniku działania jej silników rakietowych (pomijamy siły zewnętrzne). W primowanym układzie inercjalnym, w którym rakieta chwilowo spoczywa, zmiana jej pędu $m\,dv'$ jest z zasady zachowania pędu równa $\frac{dE'}{c^2}v'_g$, gdzie dE' i v'_g są energią i prędkością gazu wyrzuconego przez silniki (skorzystaliśmy ze wzoru $\vec{p}'_g=\frac{E'}{c^2}\vec{v}'_g$). Z zasady zachowania energii mamy $dE'=-dm\,c^2$, gdzie ujemna wartość dm odpowiada zmianie masy rakiety, i stąd $m\,dv'=-dm\,v'_g$. W układzie inercjalnym, w którym nastąpił start rakiety, zmianę prędkości rakiety dv otrzymamy z prawa składania prędkości:

$$dv=\Big(\frac{d}{dv'}\frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}}\Big)\Big|_{v'=0}dv'=(1-\frac{v^2}{c^2})\,dv'.$$

Równanie opisujące zmianę prędkości rakiety przyjmuje więc postać

$$\frac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}}=-v'_g\frac{dm}{m},$$

czyli całkując obie strony od zerowej prędkości na starcie do prędkości końcowej v (i odpowiednio od masy początkowej m_0 do masy końcowej m) otrzymujemy (przy stałej prędkości v'_g)

$$\frac{c}{2}\ln\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}=v'_g\ln\frac{m_0}{m}\qquad\Rightarrow\qquad v=c\frac{(\frac{m_0}{m})^{\frac{2v'_g}{c}}-1}{(\frac{m_0}{m})^{\frac{2v'_g}{c}}+1}.$$

Otrzymany wynik jest poprawny dla dowolnej ustalonej prędkości wyrzucania gazów v'_g (także dla napędu fotonowego, gdy $v'_g=c$). W granicy nierelatywistycznej, gdy $\frac{v'_g}{c}\ll 1$, otrzymujemy $(\frac{m_0}{m})^{\frac{2v'_g}{c}}=e^{\frac{2v'_g}{c}\ln\frac{m_0}{m}}=1+\frac{2v'_g}{c}\ln\frac{m_0}{m}+...$, czyli zgodnie z przykładem w podrozdziale 1.4 mamy wtedy

$$v=v'_g\ln\frac{m_0}{m}.$$

4.4 Formalizm lagranżowski i formalizm hamiltonowski

Ograniczymy się do podania tego formalizmu dla cząstki o masie m i ładunku q w polu elektromagnetycznym opisanym przez czteropotencjał tego pola $(A^\mu)=(\frac{\phi}{c},\vec{A})$.

Lagranżjan tej cząstki określa wzór

$$\boxed{L(\vec{r},\vec{v},t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi(\vec{r},t) + q\vec{v}\vec{A}(\vec{r},t).}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ przyjmują wtedy znaną nam postać

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Big(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big) = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).}$$

Pęd uogólniony cząstki wynosi więc

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{A},$$

czyli

$$\vec{v} = \frac{c(\vec{p}-q\vec{A})}{\sqrt{m^2c^2 + (\vec{p}-q\vec{A})^2}}.$$

Hamiltonian rozważanej cząstki określa wzór

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \vec{p}\vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{v}\vec{A} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\phi - q\vec{v}\vec{A} = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\phi = \sqrt{c^2(\vec{p}-q\vec{A})^2 + m^2c^4} + q\phi. \end{aligned}}$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego rozważanej cząstki przyjmuje więc postać:

$$\boxed{\sqrt{c^2(\mathrm{grad}S - q\vec{A})^2 + m^2c^4} + q\phi + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.}$$

Warto zauważyć, że w formalizmie hamiltonowskim można w naturalny sposób wprowadzić dynamikę cząstek o zerowej masie (np. fotonów), dla których prędkość $v = c$ (dla cząstek tych określony jest czteropęd, ale nie jest określona czteroprędkość - w standardowym sformułowaniu drugiej zasady dynamiki i w formalizmie lagranżowskim pojawiają się wtedy wyrażenia nieokreślone typu $\frac{0}{0}$).

Zasada wariacyjna Hamiltona ma postać

$$\boxed{\big(\delta S = 0 \,\text{przy}\, \delta\vec{r}(t_0) = 0 = \delta\vec{r}(t_1)\big) \;\Leftrightarrow\; \Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0\Big),}$$

gdzie działanie Hamiltona $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$. Zauważmy, że S jest czteroskalarem, czyli nie ulega zmianie przy przekształceniach Poincarégo (mamy $L(\vec{r},\vec{v},t)dt = L(\vec{r}\,',\vec{v}\,',t')dt'$ w przeciwieństwie do sytuacji dla przekształcenia Galileusza, gdzie ta równość zachodziła z dokładnością do pochodnej zupełnej po czasie pewnej funkcji):

$$L(\vec{r},\vec{v},t)dt = -mc^2 d\tau - q(A^0 dx^0 - \vec{A}d\vec{r}).$$