Mechanika i STW
Zadania domowe, seria 1
Szkice rozwiązań

Zadanie 1. Ruch punktu materialnego zadany jest równaniami

$$x(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t), \qquad y(t) = c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t),$$

gdzie ω, a, b, c oraz d są stałymi, przy czym $ad - bc \neq 0$. Opisać tor ruchu (podając warunek postaci $f(x, y) = 0$). Pokazać, że tor jest krzywą zamkniętą.

Rozwiązanie. Pełne rozwiązanie powyższego zadania łącznie z dowodem, że tor ruchu jest elipsą, jest częścią rozwiązania zadania 2 z ćwiczeń wykładowych nr 3 (tor ruchu w przypadku (*iii*)).

□

Zadanie 2. Punkt materialny porusza się po płaszczyźnie z prędkością o stałej wartości v w ten sposób, że kąt między wektorem prędkości i wektorem wodzącym (zaczepionym w ustalonym punkcie p tejże płaszczyzny) jest stały i wynosi α. Wyznaczyć ruch i tor ruchu tego punktu.

Wskazówka. Użyć współrzędnych biegunowych (ρ, φ) na płaszczyźnie ruchu zdefiniowanych tak, że ρ jest odległością od punktu p.

Szkic rozwiązania. Ponieważ wektor wodzący punktu materialnego jest proporcjonalny do $\vec{e}_\rho$, więc

$$\vec{v} \circ \vec{e}_\rho = v\cos\alpha, \qquad \vec{v} \circ \vec{e}_\varphi = v\sin\alpha \tag{2.1}$$

Z drugiej strony $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ i w konsekwencji

$$\vec{v} \circ \vec{e}_\rho = \dot{\rho}, \qquad \vec{v} \circ \vec{e}_\varphi = \rho\dot{\varphi}. \tag{2.2}$$

Porównując (2.1) i (2.2) otrzymujemy

$$\dot{\rho} = v\cos\alpha, \qquad \rho\dot{\varphi} = v\sin\alpha. \tag{2.3}$$

Rozwiązaniem pierwszego z równań (2.3) jest

$$\rho(t) = vt\cos\alpha + \rho_0. \tag{2.4}$$

Podstawiając ten wynik do drugiego z równań (2.3) otrzymujemy

$$\dot{\varphi} = \frac{v\sin\alpha}{\rho_0}\frac{1}{\frac{v\cos\alpha}{\rho_0}t + 1},$$

skąd po odcałkowaniu mamy

$$\varphi(t) = \mathrm{tg}(\alpha)\ln\Big(\frac{v\cos\alpha}{\rho_0}t + 1\Big) + \varphi_0 \tag{2.5}$$

(proszę zwrócić uwagę, że argument logarytmu jest wielkością bezwymiarową tak, jak powinno być — wynik w postaci $\ln(vt\cos\alpha + \rho_0)$ byłby problematyczny).

Z równań (2.4) i (2.5) dostajemy równanie toru postaci

$$\varphi(\rho) = \mathrm{tg}(\alpha)\ln\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big) + \varphi_0.$$

Równoważnie

$$\rho(\varphi) = \rho_0 \exp\big((\mathrm{ctg}\,\alpha)(\varphi - \varphi_0)\big),$$

co oznacza, że torem ruchu punktu materialnego jest spirala logarytmiczna. □

Zadanie 3. Chrabąszcz porusza się po płycie gramofonowej idąc wzdłuż jej promienia ze stałą prędkością v względem płyty. Płyta jest umieszczona w gramofonie i obraca się ze stałą prędkością kątową ω. W układzie spoczynkowym gramofonu znaleźć ruch i tor ruchu chrabąszcza oraz jego prędkość i przyspieszenie.

Wskazówka. W układzie spoczynkowym gramofonu użyć współrzędnych biegunowych (ρ, φ) zdefiniowanych w płaszczyźnie płyty tak, że ρ jest odległością od jej środka.

Szkic rozwiązania. Chrabąszcz idąc wzdłuż promienia płyty może zarówno oddalać się od jej środka lub przybliżać się do jej środka — w pierwszym przypadku wielkość v będzie dodatnia, w drugim ujemna. Przyjmując, że wartość promienia płyty wynosi R, a $\rho \in [0, R]$ jest odległością chrabąszcza od środka płyty zachodzi następująca zależność:

$$\rho(t) = v(t - t_0) + \rho_0, \tag{3.1}$$

gdzie $\rho_0 \in [0, R]$ jest odległością chrabąszcza od środka płyty w chwili początkowej t_0.

Ponieważ chrabąszcz wraz z płytą obraca się względem układu spoczynkowego gramofonu ze stałą prędkością kątową ω, więc jego współrzędna φ będzie zależała od czasu w następujący sposób:

$$\varphi(t) = \omega(t - t_0) + \varphi_0. \tag{3.2}$$

Wyliczając z powyższego wzoru

$$t - t_0 = \frac{\varphi - \varphi_0}{\omega}$$

i wstawiając do (3.1) otrzymujemy równanie toru

$$\rho(\varphi) = \frac{v}{\omega}(\varphi - \varphi_0).$$

Wynika stąd, że tor ruchu chrabąszcza w układzie gramofonu jest spiralą Archimedesa.

Prędkość i przyspieszenie chrabąszcza najprościej otrzymać wstawiając do wyrażeń na prędkość i przyspieszenie w układzie biegunowym odpowiednie pochodne funkcji (3.1) i (3.2):

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = v\vec{e}_\rho + (v(t - t_0) + \rho_0)\omega\vec{e}_\varphi,\\
\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi = -(v(t - t_0) + \rho_0)\omega^2\vec{e}_\rho + 2v\omega\vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

Komentarz do nadesłanych rozwiązań: W wielu rozwiązaniach zamiast prędkości $\vec{v}$ i przyspieszenia $\vec{a}$ błędnie pojawiały się wartości $|\vec{v}|$ i $|\vec{a}|$ tych wektorów. □

Andrzej Okołów