

Mechanika kwantowa IIB: Zadania domowe #4

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski — 8 grudnia 2018

i Info: * - oznacza, że zadanie to jest nieobowiązkowe

Zadanie 1: Całkowa postać funkcji schodkowej

Pokaż, że

$$\theta(t - t') = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ix(t-t')}}{x + i0^+}.$$

Zadanie 2: Pęd pola elektromagnetycznego

Pole elektromagnetyczne oprócz energii unosi także pęd. Wielkość tą dla pola elektromagnetycznego definiujemy równaniem:

$$\mathbf{G} = \int d^3r \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c}.$$

Korzystając z postaci operatora potencjału wektorowego zapisanego przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji fotonów o pędzie $\mathbf{k}$ i polaryzacji α

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{V}} \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\mathbf{e}_\alpha}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}, \alpha} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right],$$

gdzie $\mathbf{e}_\alpha$ jest wektorem polaryzacji, $\omega_{\mathbf{k}}$ jest relacją dyspersji fotonów, a c jest prędkością światła; wyraż operator $\hat{\mathbf{G}}$ za pomocą operatorów kreacji i anihilacji.

Zadanie 3: Efekt Casimira - wyprowadzenie historyczne

W tym zadaniu powtórzymy wyprowadzenie H. Casimira efektu nazywanego jego imieniem wykorzystując do tego twierdzenie *Eulera-Maclaurina*. Rozważ pudło o wymiarach $L \times L \times L$ o przewodzących ściankach (tj. nałóż warunki brzegowe Dirichleta). Do wnętrza pudła wprowadzono przewodzącą płytę o wymiarach $L \times L$ w taki sposób, że jest równoległa do ścian pudła znajdujących się w płaszczyźnie XY . Odległość płyty od jednej ze ścianek wynosi $a \ll L$. Znajdź zmianę energii spowodowaną wprowadzeniem płyty $\Delta E = E_a + E_{L-a} - E_L$, gdzie E_a to energia pola we wnętrzu powstałej wnęki powstałej o szerokość a , E_{L-a} to energia pola we wnętrzu wnęki o szerokości $L - a$, a E_L jest energią pola we wnętrzu pudła przed wprowadzeniem ścianki. Przejdź do granicy $L \rightarrow \infty$, przy ustalonym a . Następnie dla uzyskanego wyniku zastosuj twierdzenie Eulera-Maclaurina, które można zapisać w postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = \frac{1}{6 \cdot 2!} F'(0) + \frac{1}{30 \cdot 4!} F'''(0) - \dots,$$

gdzie F jest pewną funkcją, $\theta_n = 1$ dla $n > 0$ oraz $\theta_n = 1/2$ dla $n = 0$. Znajdź ciśnienie wywierane na płytę korzystając z równania:

$$p = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial \Delta E}{\partial a}.$$

Zadanie 4: Trzy bezspinowe bozony w dwuwęzłowej sieci optycznej

Metodą ścisłej diagonalizacji rozpatrz problem trzech bezspinowych bozonów w dwuwęzłowej sieci optycznej opisanych hamiltonianem

$$\hat{H} = \varepsilon_a \hat{n}_a + \varepsilon_b \hat{n}_b + \frac{t}{4} (\hat{n}_a - 3)(\hat{n}_b - 3)(a^\dagger b + b^\dagger a)(\hat{n}_a - 3)(\hat{n}_b - 3) + U (\hat{n}_a(\hat{n}_a - 1) + \hat{n}_b(\hat{n}_b - 1)),$$

gdzie a i b to odpowiednio operatory anihilacji bozonu na węzle A i B, a $\hat{n}_a$ i $\hat{n}_b$ to operatory liczby cząstek na węzłach. Parametry ε_a , ε_b , t i U są nieujemne.

(a) Zinterpretuj poszczególne wyrazy hamiltonianu i wypisz możliwe stany trójcząstkowe.

(b) Zdiagonalizuj i znajdź stany własne tego hamiltonianu.

(c) Przeanalizuj w granicy $\varepsilon_b = \varepsilon_a$ i $t = 0$ wpływ parametru U na widmo hamiltonianu, a także w granicy $\varepsilon_a \neq \varepsilon_b$ i $U = 0$ wpływ parametru t na spektrum.

Zadanie 5: Dimer Hubbarda w zewnętrznym polu magnetycznym

Znajdź rozwiązanie modelu Hubbarda posługując się metodą ścisłej diagonalizacji dla problemu dwóch elektronów walencyjnych na dwóch sąsiadujących atomach w zewnętrznym polu magnetycznym, przy czym wektor indukcji magnetycznej jest skierowany wzdłuż osi z . Taki problem można opisać hamiltonianem:

$$\hat{H} = t \sum_{\sigma} [\hat{a}_{1\sigma}^\dagger \hat{a}_{2\sigma} + \hat{a}_{2\sigma}^\dagger \hat{a}_{1\sigma}] + U [\hat{n}_{1\uparrow} \hat{n}_{1\downarrow} + \hat{n}_{2\uparrow} \hat{n}_{2\downarrow}] + B \sum_{\sigma} S_{\sigma} [\hat{n}_{1\sigma} + \hat{n}_{2\sigma}],$$

gdzie stałe $t, U, B > 0$, ponadto $S_{\uparrow} = +\frac{1}{2}$, a $S_{\downarrow} = -\frac{1}{2}$. Dla tak postawionego problemu:

(a) Zinterpretuj poszczególne wyrazy hamiltonianu.

(b) Wypisz bazę stanów dwucząstkowych i przedstaw w niej macierz hamiltonianu.

(c) Policz energie własne tego hamiltonianu.

(d) Naszkicuj diagramy poziomów energetycznych w granicy słabo oddziałujących cząstek ($t \gg U$), silnie oddziałujących cząstek ($t \ll U$) oraz dla przypadku $U = B = 0$. Na diagramach zaznacz degenerację poziomów energetycznych.

Zadanie 6: Model jednorodnego gazu elektronowego (model jellium)

Wykorzystując reprezentację II kwantyzacji oddziaływanie Coulomba pomiędzy elektronami w gazie elektronowym możemy wyrazić za pomocą

$$\hat{H}_{el-el} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sum_{\mathbf{k}', \sigma'} v_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}', \sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}', \sigma'} c_{\mathbf{k}, \sigma},$$

gdzie $v_{\mathbf{q}}$ jest transformatą Fouriera potencjału kulombowskiego. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że obecność członu $\mathbf{q} = 0$ w $\hat{H}_{el-el}$ może okazać się problematyczna, ponieważ $v_{\mathbf{q}} \propto 1/q^2$. Rzeczywiste metale muszą być elektrycznie obojętne, aby być stabilne. Oznacza to, że muszą występować w nich także ładunki dodatnie (rdzenie atomowe w sieci krystalicznej), które skompensują ujemne ładunki. Wspomniane ładunki dodatnie dają wkład do oddziaływania kulombowskiego układu i będą kasować wkład $q = 0$ w $\hat{H}_{el-el}$. W tej części problemu będziemy chcieli przyjrzeć się temu zagadnieniu bliżej. Rozważmy model składający się z elektronów oraz kompensujących dodatnich ładunków tła, które będą przez nas modelowane jako zadane przez ustaloną w przestrzeni gęstość ładunku $\rho_+(\mathbf{r})$. Całkowite oddziaływanie kulombowskie rozważanego układu posiada trzy wkłady

$$\hat{H}_I = \hat{H}_{el-el} + \hat{H}_{el-b} + \hat{H}_{b-b},$$

gdzie trzy wkłady po prawej stronie opisują odpowiednio oddziaływanie pomiędzy elektronami, oddziaływanie pomiędzy elektronami i ładunkami dodatniego tła oraz oddziaływanie dodatnich ładunków tła między sobą. W pierwszej kwantyzacji możemy je zapisać w postaci

$$\hat{H}_{el-el} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{e^{-\mu|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|},$$

$$\hat{H}_{b-b} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_+(\mathbf{r})\rho_+(\mathbf{r}')e^{-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

$$\hat{H}_{el-b} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \sum_{i=1}^N \frac{\rho_+(\mathbf{r})e^{-\mu|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}|},$$

gdzie przypadek opisujący oddziaływanie kulombowskie odpowiada granicy $\mu \rightarrow 0$. Czynn timeranujący z μ został tu dodany, aby zapewnić zbieżność powyższych wyrażeń dla $q = 0$. Pokażemy, że warunek obojętności elektrycznej układu zachodzi dla każdego μ . Po wykonaniu wszystkich rachunków i wykonaniu granicy termodynamicznej $V \rightarrow \infty$ (utrzymując koncentrację cząstek N/V ustaloną) położymy $\mu = 0$ otrzymując przypadek kulombowski, którym jesteśmy zainteresowani.

Warunek obojętności elektrycznej wymaga by $\int d^3r \rho_+(\mathbf{r}) = N$. W tym zadaniu będziemy rozważali tak zwany *model jellium* dla którego przyjmujemy, że gęstość dodatnich ładunków tła jest jednorodna, tj. $\rho_+ = N/V$.

(a) Pokaż, że $\hat{H}_{b-b}$ i $\hat{H}_{el-b}$ są stałe i wynoszą odpowiednio

$$\hat{H}_{b-b} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\mu^2\epsilon_0} \frac{N^2}{V}$$

oraz

$$\hat{H}_{el-b} = -\frac{e^2}{\mu^2\epsilon_0} \frac{N^2}{V}.$$

Wsk.: Wykorzystać niezmienniczość translacyjną problemu.

(b) Pokaż, że transformacja Fouriera potencjału Yukawy, tj. $e^{-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ wynosi

$$v_{\mathbf{q}} = \frac{e^2}{\epsilon_0(q^2 + \mu^2)}.$$

(c) Wykorzystując reprezentację II kwantyzacji $\hat{H}_{el-el}$ (z $v_{\mathbf{q}}$ obliczonym wyżej) pokaż, że wyraz $q = 0$ wynosi

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{\epsilon_0\mu^2} \frac{N^2 - N}{V}.$$

Pokaż, że wtedy hamiltonian oddziaływania kulombowskiego w modelu jellium redukuje się do

$$\hat{H}_I = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sum_{\mathbf{k}', \sigma'} \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}', \sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}', \sigma'} c_{\mathbf{k}, \sigma}$$

(Należy pokazać, że drugi człon występujący w wyrazie $q = 0$ można pominąć najpierw przechodząc do granicy termodynamicznej, a następnie kładąc $\mu = 0$.)

Po wyprowadzeniu powyższego oddziaływania rozwiążemy model jellium zadany hamiltonianem

$$\hat{H}_{jell} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \sum_{\mathbf{k}', \sigma'} \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}', \sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}', \sigma'} c_{\mathbf{k}, \sigma}$$

wykorzystując rachunek zaburzeń. Wygodnie jest wprowadzić skalę wielkości zadaną przez promień Bohra $a_B = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ oraz skalę energii $Ry = \hbar^2/2ma_B^2$ (Rydyberg). Niech r_0 będzie mierzyło średnią odległości pomiędzy elektronami (zdefiniowany jako promień kuli, której objętość jest równa objętości przypadającej na jeden elektron) oraz wprowadzamy bezwymiarowy parametr $r_s = r_0/a_B$.

(d) Najpierw rozważ nieoddziałujący gaz elektronowy, którego hamiltonian jest dany tylko przez człon kinetyczny. Jego stanem podstawowym jest wypełniona kula Fermiego (morze Fermiego) $|FS\rangle$ o promieniu k_F . Pokaż, że

$$k_F a_B = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{1}{r_s}$$

a następnie, że energia przypadająca na elektron w tym przypadku wynosi

$$\frac{E^{(0)}}{N} = \frac{3}{5} (k_F a_B)^2 Ry \approx \frac{2.21}{r_s^2} Ry.$$

(e) Teraz przyjmując, że $\hat{H}_I$ jest zaburzeniem. Pokaż w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, że poprawka do energii stanu podstawowego wynosi

$$\frac{E^{(1)}}{N} = -\frac{3}{2\pi} (k_F a_B)^2 \text{Ry} \approx -\frac{0.916}{r_s^2} \text{Ry}.$$

Wsk.: Pokaż, że pojawiający się wyraz przy liczeniu poprawki w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń ma postać

$$\langle FS | c_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}',\sigma'} c_{\mathbf{k},\sigma} | FS \rangle = -\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}+\mathbf{q}} \delta_{\sigma\sigma'} \theta(k_F - |\mathbf{k} + \mathbf{q}|) \theta(k_F - |\mathbf{k}|).$$

Następnie zastąp odpowiednie sumy po $\mathbf{k}$ i $\mathbf{q}$ całkami wykorzystując współrzędne sferyczne. Zauważ, że wartość tej całki będzie proporcjonalna do objętości przecięcia dwóch kul Fermiego o promieniu k_F , których środki są połączone wektorem $\mathbf{q}$. Wygodnie jest wybrać oś z wzdłuż wektora $\mathbf{q}$.

(f) Wykorzystując powyższe wyniki wyznacz równowagową wartość parametru r_s przewidywanego w modelu jellium i oblicz ciśnienie gazu elektronowego podstawiając uzyskany wyżej promień. Co oznacza ten wynik?

Zadanie 7: Funkcja dielektryczna w ramach teorii liniowej odpowiedzi

Rozważmy sytuację w której do metalu została wprowadzona pewna zewnętrzna gęstość ładunków $\rho_{ext}(\mathbf{r}, t)$. Jej wprowadzenie spowoduje zmianę gęstości kwaziswobodnych elektronów wewnątrz układu powodując ekranowanie ładunków zaburzających. Efekt ekranowania jest opisywany przez funkcję dielektryczną układu $\varepsilon(\mathbf{q}, E)$, która jest miarą odpowiedzi układu na wprowadzenie zewnętrznych ładunków zaburzających $\rho_{ext}(\mathbf{r}, t)$. Pokażemy w tym zadaniu, że także w tym przypadku *funkcja odpowiedzi* układu może być wyrażona za pomocą retardowanej funkcji Greena.

(a) Pokazać, że oddziaływanie pomiędzy ładunkami zaburzającymi oraz elektronami przewodnictwa klasycznie można przedstawić w postaci

$$V_t = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE \exp[-\frac{i}{\hbar}(E + i0^+)t] \sum_{\mathbf{q}} \bar{v}(\mathbf{q}) \rho_{-\mathbf{q}} \rho_{ext}(\mathbf{q}, E),$$

gdzie $\bar{v}(\mathbf{q}) = v_0(\mathbf{q})/(-e)$, przy czym $v_0(\mathbf{q})$ to transformata Fouriera potencjału Coulomba, natomiast $\rho_{-\mathbf{q}}$ i $\rho_{ext}(\mathbf{q}, E)$ to transformaty Fouriera odpowiednio gęstości elektronów przewodnictwa oraz gęstości ładunku zaburzającego.

Wykorzystując podobny argument jak w przypadku modelu jellium zakładamy, że w stanie równowagi gęstość ładunku elektronów przewodnictwa oraz jonów w sieci krystalicznej kompensują się, przy czym gęstość ładunku elektronowego jest mobilna, a ładunek jonów jest jednorodnie rozłożony w metalu. Całkowity gęstość ładunku w rozważanym układzie jest zatem sumą ρ_{ext} oraz wyindukowanej gęstości ładunku ρ_{ind} w gazie elektronowym:

$$\rho_{tot}(\mathbf{r}, t) = \rho_{ext}(\mathbf{r}, t) + \rho_{ind}(\mathbf{r}, t).$$

(b) Posługując się równaniami Maxwella w ośrodku pokaż, że

$$\rho_{ind}(\mathbf{q}, E) = \left[\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, E)} - 1 \right] \rho_{ext}(\mathbf{q}, E).$$

(c) Przejdziemy teraz do rozważań kwantowych poprzez zastąpienie gęstości elektronów przewodnictwa odpowiednim operatorem

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} a_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}.$$

Pokaż, że w tym przypadku postać oddziaływania z pkt. (a) ma postać

$$V_t = \sum_{\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger \tilde{F}_t(\mathbf{q})$$

i znajdź jak explicite wygląda pole zaburzające $\tilde{F}_t(\mathbf{q})$.

(d) Chcemy zobaczyć jak wartość oczekiwana operatora indukowanej gęstości ładunku, $\langle \hat{\rho}_{ind}(\mathbf{q}, t) \rangle = -e(\langle \hat{\rho}(\mathbf{q}) \rangle_t - \langle \hat{\rho}(\mathbf{q}) \rangle_0)$, odpowiada na pole zaburzające. W tym celu skorzystamy ze wzoru Kubo

$$\Delta(\rho_{\mathbf{q}})_t = \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}'} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{F}_{t'}(\mathbf{q}) \langle \langle \hat{\rho}_{\mathbf{q}}(t); \hat{\rho}_{\mathbf{q}'}(t') \rangle \rangle.$$

Pamiętając o symetrii translacyjnej niezaburzonego problemu pokaż, że funkcja dielektryczna jest dana równaniem:

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, E)} = 1 + \frac{1}{\hbar} v_0(\mathbf{q}) \langle \langle \hat{\rho}_{\mathbf{q}}; \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger \rangle \rangle_E.$$

Zadanie 8*: Przybliżenie losowej fazy (RPA) w ramach zależnego od czasu rachunku zaburzeń

W gazie swobodnych elektronów wszystkie elektrony są rozmięszczone zgodnie z stanami własnymi pędu $|\mathbf{k}\rangle = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, gdzie przyjmujemy, że objętość układu jest jednostkowa, a rozkład pędów jest zadany rozkładem Fermiego $f(\mathbf{k})$. W zadaniu tym wyprowadzimy i zbadamy postać funkcji dielektrycznej o której mowa była w poprzednim zadaniu wykorzystując w tym celu rachunek zaburzeń zależny od czasu. Naszym podstawowym założeniem jest, że funkcja falowa każdego konkretnego elektronu jest zaburzona przez zewnętrzny potencjał V_{ext} oraz indukowany potencjał V_{ind} , który jest związany z fluktuacjami wszystkich pozostałych elektronów w metalu. Będziemy zatem potencjał ekranujący $V_{sc} = V_{ext} + V_{int}$ traktować jako zaburzenie funkcji falowej każdego z elektronów z osobna. W odróżnieniu do poprzedniego problemu będziemy zainteresowani tutaj tzw. właściwą funkcją odpowiedzi gęstość-gęstość $\tilde{\chi}_{\rho, \rho}(\mathbf{q})$, która wiąże odchylenie wartości gęstości elektronowej od jej wartości równowagowej $\Delta\rho(\mathbf{q}, \omega)$ z potencjałem ekranującym ($\hbar = 1$)

$$\Delta\rho(\mathbf{q}, \omega) = \tilde{\chi}_{\rho\rho}(\mathbf{q}, \omega) V_{sc}(\mathbf{q}, \omega), \quad (*)$$

wtedy funkcja dielektryczna jest dana równaniem

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - v_0(\mathbf{q}) \tilde{\chi}_{\rho\rho}(\mathbf{q}, \omega), \quad (**)$$

gdzie $v_0(\mathbf{q})$ to transformata Fouriera potencjału Coulomba.

(a) W celu obliczenia właściwej funkcji odpowiedzi gęstość-gęstość danej równaniem (*) zakładamy, że potencjał ekranujący ma postać

$$V_{sc}(\mathbf{r}, t) = V e^{i[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - (\omega - i\alpha)t]} + c. c., \quad V \in \mathbb{R}$$

tj. mamy do czynienia z oscylacjami o wektorze falowym $\mathbf{q}$ i częstotliwości ω (a także $-\mathbf{q}$ i $-\omega$, tak by V_{ext} było rzeczywiste), których amplituda powoli rośnie, co jest opisywane przez niezależną od czasu stałą $\alpha > 0$. Ewolucja czasowa funkcji falowej przy obecności zaburzenia V_{sc} jest dana równaniem

$$\psi_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(t) e^{-it\epsilon_{\mathbf{k}'}} |\mathbf{k}'\rangle,$$

gdzie współczynnik $c_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(t)$ może być obliczony w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń przy wykorzystaniu równania

$$c_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(t) = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - i \int_{-\infty}^t ds \langle \mathbf{k}' | V_{sc}(s) | \mathbf{k} \rangle e^{is(\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}})}.$$

Oblicz funkcję falową $\psi_{\mathbf{k}}(t)$ wykorzystując te równania i pokaż, że indukowana gęstość

$$\Delta\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) (|\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)|^2 - 1)$$

ma następującą postać

$$\Delta\rho(\mathbf{r}, t) = V \sum_{\mathbf{k}} \frac{f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\epsilon(\mathbf{k}) - \epsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \omega + i\alpha} e^{i[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - (\omega - i\alpha)t]} + c. c.$$

Przez porównanie powyższego równania z (*) oraz definicją V_{sc} dostajemy postać właściwej funkcji odpowiedzi gęstość-gęstość

$$\tilde{\chi}_{\rho\rho}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{f(\mathbf{k}) - f(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\epsilon(\mathbf{k}) - \epsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \omega + i\alpha}.$$

(b) Oblicz funkcję dielektryczną (**) w przypadku statycznego ekranowania ($\omega = 0$). Pokaż, że dla $q \ll k_F$,

$$\epsilon(q, 0) \approx 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \int d\epsilon D(\epsilon) \left(-\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right),$$

gdzie $D(\epsilon)$ jest gęstością stanów. W szczególności dla $T \rightarrow 0$ dostajemy wynik

$$\epsilon(q, 0) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} D(\epsilon_F).$$

(c) Dla $\omega = 0$ oraz $T = 0$, ale dowolnych $\mathbf{q}$ wykonaj całkowanie po pędach (kładąc $\epsilon(\mathbf{k}) = k^2/2m$) i pokaż, że

$$\epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{mk_F}{\pi^2} \mathcal{F}(q/2k_F),$$

gdzie

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{4x} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$